Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{\cosh t}}\,dt\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^7}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 t^5 e^{-t^2}\,dt\,, \qquad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^x - e}}\,dx\,,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx\,, \qquad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}\,dx\,, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x + \cot x}{4\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}\,dx\,,$$

$$\int_0^1 (x+3)\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx\,, \qquad \int_1^2 (x^2+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}\,dx\,,$$

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+2x+3)^2}\,dx\,, \qquad \int \frac{e^{2x}+e^x+4}{(e^{2x}+5e^x+6)^3(e^{2x}+6e^x+10)}\,dx\,,$$

Esercizio 2

Stabilire al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore del

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}\,.$$

Sugg.: riscrivere $\ln n!$ in modo opportuno sfruttando le proprietà dei logaritmi e successivamente stimarlo con un integrale. Risultato: 0 se $\alpha > 1$, $+\infty$ se $\alpha \leq 1$.

Esercizio 3

Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}\,.$$

Risultato: $\alpha > 2$.

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{\cosh t}}\,dt\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^7}\,dx\,,$$

$$\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^2}\ dt\,, \qquad \int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - e^5}}\ dx\,,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx\,.$$

Esercizio 5

Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x \ln|x||}{|x|^\alpha + 1}\ dx\,, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x^{(2+x)/x}}{x^{3/2}\ln x}\ dx\,,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3\cosh(e^{-x}) + 1}}\ dx\,, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\ln(1+x^{3/2})(x^4+1)}\ dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \ln(1+e^{\alpha x})\ dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(1-x^{3/2})}{\ln(1+x)(x^3+1)}\ dx\,,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{x^5 + \operatorname{sen}(e^x)}}\ dx\,, \qquad \int_0^3 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}\,\sqrt[7]{(x-2)^{10}}}\ dx\,,$$

$$\int_0^{\pi^2} |x|^\alpha \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{(\pi^2 - x)^\alpha}\,,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.