Esercizio 1

Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}(1/x)\,, \qquad x \neq 0\,,$$

non ha limite per $x \to 0$.

Esercizio 2

Utilizzando la definizione di limite verificare che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\operatorname{sen} x}{x+1} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x + \ln x}{\ln^2 x + \operatorname{sen} x} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+\cos x}{2x+1} = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x^2+1} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 1} \left[\cosh\left(e^{1/|x-1|}+2\right)\cosh\left[\operatorname{sen}|x-1| + \cos(\ln|x-1|)\right] + \ln\Big(|\cos x|+1\Big)\right] = +\infty\,.$$

Esercizio 3 (importante)

Siano n un numero naturale pari non nullo e a un numero reale fissato. Verificare, usando la definizione di limite, che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty\,.$$

Esercizio 4 (importante)

Siano n un numero naturale dispari e a un numero reale fissato. Verificare, usando la definizione di limite, che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty\,.$$

Esercizio 5 (importante)

Verificare, usando la definizione di limite, che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} = 0\,, \quad \forall\ \alpha > 0$$

Esercizio 6 (importante)

Sia $a > 1$. Verificare, usando la definizione di limite, che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty\,.$$

Esercizio 7 (importante)

Sia $0 < a < 1$. Verificare, usando la definizione di limite, che valgono

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty\,.$$