Esercizio 1

Sia

$$a_0 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad n \geq 0\,,$$

la successione definita dall'algoritmo di Erone.

1. Utilizzando il principio di induzione provare che

$$\frac{2}{a_n} < \sqrt{2} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{$*$}$$

2. Dedurre da $(*)$ che

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2}) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^\alpha + 5n + 3}{n^5 - n + 5}\right)^{n^4}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 3^{n\ln n}}{n^n}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4n^n - 3n!}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\big((n+1)!\big)^{2n}\big[(7n!)^{3/n!} - 1\big]}{n^{2n}\ln(n!)^6\big[(n!)^{2n-1} + n^2\big]}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{n^2(n+1)+2}{n}\pi\right), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)!n^n - (n+1)!n^{n-4}}{2(n-4)!(n^n - n!\ln n}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (2^n + n!)\operatorname{sen}(4\arctan n!)\,.$$

dove, per il calcolo dell'ultimo limite, può essere utile sapere che

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0\,,$$

e nel primo limite α è un parametro reale.

Esercizio 3

Utilizzando il criterio di Cauchy provare che la successione $\{\cos n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è convergente.

Esercizio 4

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione tale che

$$\lim_k a_{2k} = \lim_k a_{2k+1} = \ell \in \overline{R}\,.$$

Dimostrare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite ℓ.

Esercizio 5

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione decrescente e non convergente e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$b_n = \begin{cases} e^{a_{n/2}} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \tan \dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dimostrare che $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Esercizio 6

Sia data la successione definita da

$$a_0 = 1\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad n \geq 0\,.$$

1. Utilizzando il principio di induzione provare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente e limitata.
2. Dedurre che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.