Esercizio 1

Studiare le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = f(x) = x\left|1 + \frac{1}{\ln x}\right|,$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}} & \text{se} \quad x \leq 1\,, \\ (x-1)^2 \ln(x-1) & \text{se} \quad x > 1\,, \end{cases}$$

$$f(x) = \arctan x - \arctan(1/x) - x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 4x + 1}\,,$$

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\arctan(1/x)} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - |\cos x|}\,,$$

$$f(x) = \ln\left(1 - \left|\frac{x}{2-3x}\right|\right)\,.$$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+3x^3)^{\ln x} - 1}{6 \ln x \ln(1 + x - \operatorname{sen} x)} \quad (= 3)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} + e^{-7/x^2}}{\cos^2 x - \cos x^2 + x^2} \quad (= -1/5)\,.$$

Tra parentesi i rusultati attesi.

Esercizio 3

Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\arctan x} + \ln\left(\dfrac{1+x}{e}\right)}{x[1 - \cos(2x)]^\alpha} \quad \left(= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha < 2\,, \\ 1/8 & \text{se} \quad \alpha = 2\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha > 2\,, \end{cases} \right)$$

Tra parentesi il risultato atteso.

Esercizio 4

Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\big[\operatorname{sen} x-\ln(1+2x)\big]+\operatorname{senh} x^2-2x^3}{x[\ln(1+x)+1-\cos x]-\operatorname{sen}^2 x}\ (=-17/4)\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\big[\ln(1+\operatorname{senh} x+x^4)-\ln(1+\operatorname{sen} x+\tan^4 x)\big]}{2\operatorname{sen}(\tan x\operatorname{sen} x^2)}\ (=1/6)\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{12\big([1+\operatorname{sen}^3 x]^{1/4}-1\big)\big(\operatorname{sen}[\ln(1+x)]-\operatorname{sen}[\ln(1-x)]-2x\big)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^6)}\ (=1)\,.$$

Tra parentesi i rusultati attesi.

Esercizio 5

Sia $\{a_n\}$ definita da

$$a_n=\begin{cases}(-1)^{n/2}\,\dfrac{(2\pi)^n}{n!}\,, & \text{se } n \text{ è pari}\\ (-1)^{(n-1)/2}\,\dfrac{\pi^n}{2^n\,n!}\,, & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 6

Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\ln(n^n+n!)\Big)\Big(n\tan\frac{1}{n}-\cos\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{\alpha}{6n^2}\Big)$$

Esercizio 7

Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^2-\sqrt{n^2+ne^{-n}}}\,,\qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ln n\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)\right].$$

Esercizio 8

Stabilire quante soluzioni positive ha l'equazione

$$12x^6-14x^3-3x^2-5=0\,.$$

Esercizio 9

Determinare a, $b \in \mathbb{R}$ affinchè la funzione definita da

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

sia infinitesima del massimo ordine possibile per $x \to 0$.

Esercizio 9

Si scrivano i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni nel punto di centro x_0 e grado n indicati a fianco

$$\begin{aligned}
&f(x) = \operatorname{sen} x\,, && x_0 = \pi/6\,,\ n = 5\,,\\
&f(x) = \arctan(x-1)\,, && x_0 = 2\,,\ n = 4\,,\\
&f(x) = \ln\big(e^{x-1} + x\big)\,, && x_0 = 1\,,\ n = 4\,,\\
&f(x) = \cosh\big(\arctan(x-2) + 1\big)\,, && x_0 = 2\,,\ n = 5\,.
\end{aligned}$$