Indice

Capitolo 1

Prima settimana - 8 ore

Discorsetto

- Proietta il file di presentazione
- **Enrico Savio ha presentato il corso di laurea in ingegneria meccanica**

1.1 Elementi di logica

Proposizione: frase, affermazione di cui si può stabilire il **valore di verità**.

Esempio 1.1 Il leone è un animale (VERA!)
La zebra è un volatile (FALSA!)
I quadri di Picasso sono belli (?!)
x è maggiore di 1 (?!)

1.1.1 Connettivi logici

Le proposizioni possono essere legate tra loro usando dei **connettivi logici**

Esempio 1.2 Il leone è un animale ***e*** la zebra è un volatile (FALSA!)
Il leone è un animale ***o*** la zebra è un volatile (VERA!)

congiunzione (e) si indica con $\wedge$. Date due proposizioni P e Q, restituisce $P \wedge Q$ che è vera solo quando *entrambe* P e Q sono vere.

disgiunzione (o) si indica con $\vee$. Date due proposizioni P e Q, restituisce $P \vee Q$ che è vera quando *almeno una* delle due proposizioni P e Q è vera.

implicazione (se ... allora ...) si indica con $\implies$. Date due proposizioni P e Q, restituisce $P \implies Q$ (P implica Q), che è vera quando da P discende Q. Si dice allora che P è condizione sufficiente per Q, ovvero Q è condizione necessaria per P. Questo vuol dire che per dimostrare che l'implicazione $P \implies Q$ è vera è sufficiente supporre P (ipotesi) vera e dedurre che allora è vera anche Q (tesi). Se P fosse falsa, $P \implies Q$ sarebbe comunque vera (FAI TABELLA DI VERITÀ).

doppia implicazione (... se e solo se ...) si indica con $\iff$. Date due proposizioni P e Q, restituisce $P \iff Q$ (P se e solo se Q), che è vera quando P e Q sono entrambe vere o entrambe false. Si dice che P è condizione necessaria e sufficiente per Q.

negazione (non ...) si indica con $\neg$. Data una proposizione P, restituisce $\neg\, P$ che è vera solo quando P è falsa.

Esempio 1.3 $2 < 3 \iff 3 < 4$ (VERA!)
$2 < 3 \iff 3 > 4$ (FALSA!)
$\neg$ (*il leone è un animale*) (FALSA!)
$\neg$ (*la zebra è un volatile*) (VERA!)

Modus ponens

Date due proposizioni P e Q, la proposizione

$$\big(P \wedge (P \implies Q)\big) \implies Q$$

è una *tautologia*, cioè una proposizione sempre vera indipendentemente dai valori di verità di P e Q. Allora, per provare che una certa proposizione Q è vera, è sufficiente dimostrare che la proposizione $P \wedge (P \implies Q)$ è vera. Ad esempio: voglio dimostrare che $2 < 3$. Prendo $P : 1 < 2$ e dimostro che l'implicazione $1 < 2 \implies 2 < 3$ è vera.

Uso contemporaneo di $\neg$ con altri connettivi

- Fai esempi con $\vee$ e $\wedge$ (scrivi *leggi di De Morgan*).
- Per negare $\implies$ ricorda che $P \implies Q = \neg P \vee Q$ (Fai tabella di verità)

Dimostrazione per assurdo

Lemma 1.1 *Siano P e Q proposizioni. Allora $P \implies Q$ è vera se e solo se $\neg Q \implies \neg P$ è vera.*

Esempio: per dimostrare che l'implicazione

$$\text{Marco va a sciare} \quad \Longrightarrow \quad \text{è nevicato,} \tag{1.1}$$

è vera, è sufficiente dimostrare la sua equivalente secondo il lemma 1.1

$$\text{non è nevicato} \quad \Longrightarrow \quad \text{Marco non va a sciare.} \tag{1.2}$$

Lemma 1.2 *Siano P, Q e R proposizioni, con R falsa. Allora $P \implies Q$ è vera se e solo se $(P \wedge \neg Q) \implies R$ è vera.*

Riprendiamo l'esempio fatto in precedenza: per dimostrare che l'implicazione (1.1) è vera, è suffciente dimostrare che l'implicazione

$$\text{Marco va a sciare} \wedge \text{non ha nevicato} \implies R \tag{1.3}$$

è vera, con R proposizione falsa. Si noti che $P \wedge \neg Q$ è logicamente equivalente (ha la stessa tabella di verità) di $\neg(P \implies Q)$.

1.1.2 Quantificatori

In una frase possono apparire delle variabili.

Esempio 1.4 $x > 1$
$x \leq y^2$
$x \cdot y = z$

È evidente che le frasi nell'esempio **non** sono proposizioni, perchè non si può stabilire il loro valore di verità. Queste frasi diventano proposizioni nel momento in cui

si assegna un valore a **tutte** le variabili coinvolte;

o

si *legano* le variabili con dei **quantificatori**.

I quantificatori sono tre

per ogni - quantificatore universale si indica con $\forall$

esiste ... tale che ... - quantificatore esistenziale si indica con $\exists \ \ldots \ : \ \ldots$

esiste unico ... tale che ... si indica con $\exists! \ \ldots \ : \ \ldots$

Esempio 1.5 $\forall\, x$ intero $(x > 1)$ (FALSA!)
$\exists\, x$ intero : $(x > 1)$ (VERA!)
$\exists!\ x$ intero : $(x > 1)$ (FALSA!)
$\forall\, y$ razionale $\exists\, x$ razionale : $x \leq y^2$ (VERA!)
$\exists\, y$ razionale : $\forall\, x$ razionale $(x \leq y^2)$ (FALSA!)
$\forall\, x \neq 0$ razionale $\forall\, z$ razionale $\exists!\ y$ razionale : $x \cdot y = z$ (VERA!)

Uso contemporaneo di $\neg$ e dei quantificatori

Come negare l'affermazione $\forall\, x(\ x > 1)$? Si nega dicendo che *esiste almeno un valore di x tale che per quel valore $x \leq 1$.* Dunque

$$\neg\ \big(\forall\ x\ (x > 1)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\ x:\ x \leq 1\,.$$

Come negare $\exists\ x:\ (x > 1)$? Si nega affermando che *qualunque sia il valore assunto dalla variabile x, per tale valore $x \leq 1$.* Dunque

$$\neg\ \big(\exists\ x:\ (x > 1)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\ x\ (x \leq 1)\,.$$

Altro esempio. Come negare l'affermazione $\forall\ y\ \exists\ x:\ x \leq y^2$? Si nega dicendo che *esiste un valore di y tale che qualunque sia il valore assunto da x allora $x > y^2$.* Dunque

$$\neg\ \big(\forall\ y\ \exists\ x:\ x \leq y^2\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\ y:\ \forall\ x\ (x > y^2)\,.$$

Si osservi che

1. ad ogni occorrenza di $\exists$ si è sostituito $\forall$;
2. ad ogni occorrenza di $\forall$ si è sostituito $\exists$;
3. si è negata la frase conclusiva.

Dunque

$$\begin{aligned} \neg\ \big(\exists\ x:\ Q(x)\big) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \forall\ x\ \neg\ Q(x)\,, \\ \neg\ \big(\forall\ x\ Q(x)\big) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \exists\ x:\ \neg\ Q(x)\,. \end{aligned}$$

1.2 Elementi di teoria degli insiemi

Un **insieme** è un'idea primitiva per indicare una **raccolta** o **collezione** di oggetti. Gli oggetti che lo costituiscono si dicono **elementi** o **punti** dell'insieme. Un insieme è indicato con lettere maiuscole A, B, X, ed in genere i suoi elementi con lettere minuscole. Un insieme A si intende dato quando preso un oggetto a l'espressione

$$a \in A \qquad (a \text{ appartiene ad } A)$$

è una proposizione, cioè è possibile stabilire se è vera oppure falsa. Per definire un insieme si possono elencare i suoi elementi indicandoli tra due parentesi graffe $\{\}$

$$\begin{gathered} A = \big\{a, b, c, d\big\} \\ B = \big\{1, 3, 5, 7, 9\big\}\,, \end{gathered}$$

oppure definire una proprietà di cui devono godere i suoi elementi

$$A = \{x \in \mathcal{U} : \ P(x)\} ,$$

dove $\mathcal{U}$ è un insieme già noto, detto *insieme universo*. Per esempio

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

si può anche scrivere

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \ x \text{ è dispari e } x < 10\} .$$

Per indicare che un elemento a non appartiene all'insieme A si scrive

$$a \notin A .$$

Si postula l'esistenza di un insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto*, indicato con $\emptyset$. Per tale insieme la proposizione

$$x \in \emptyset$$

risulta sempre **falsa** qualunque sia l'oggetto x.

Si dice che un insieme B è un *sottoinsieme* di un insieme A oppure è contenuto in A e scriviamo

$$B \subseteq A \qquad \text{oppure} \qquad A \supseteq B$$

se *ogni elemento* di B è anche elemento di A (vedi figura 1.1) e scriveremo

$$B \subset A \qquad \text{oppure} \qquad A \supset B$$

nel caso in cui escludiamo che $A = B$.

Definizione 1.1 Dati due insiemi A e B si definisce l'insieme $A \cup B$ (A unito B) come l'insieme costituito da tutti e soli quegli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B, cioè (vedi figura 1.2)

$$x \in A \cup B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \vee \ x \in B .$$

Definizione 1.2 Dati due insiemi A e B si definisce l'insieme $A \cap B$ (A intersecato B) come l'insieme costituito da tutti e soli quegli elementi che appartengono sia ad A che a B, cioè (vedi figura 1.2)

$$x \in A \cap B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \wedge \ x \in B .$$

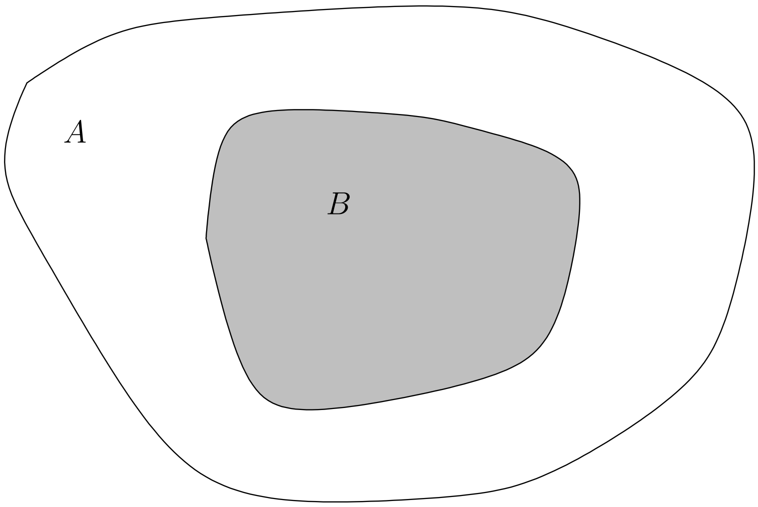


Figura 1.1: $B \subseteq A$

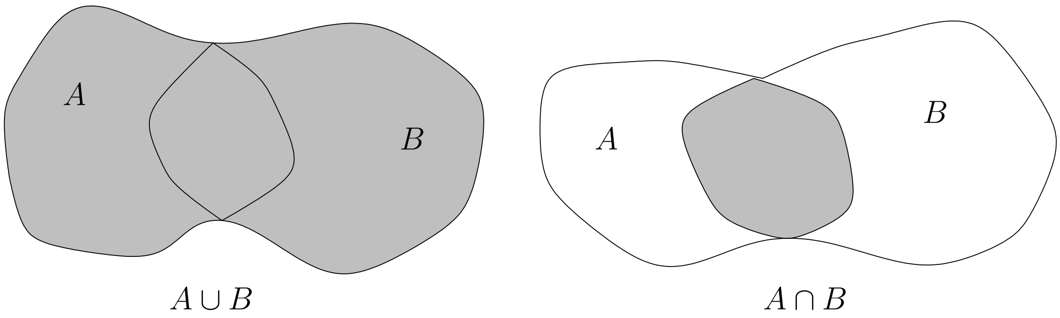


Figura 1.2: Unione e intersezione

Esempio 1.6 Siano

$$\begin{aligned} A &= \left\{1, 2, 3, 4, a, b, c\right\}, \\ B &= \left\{1, 3, 5, a, d\right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Allora

$$\begin{aligned} A \cup B &= \left\{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d\right\}, \\ A \cap B &= \left\{1, 3, a\right\}. \end{aligned}$$

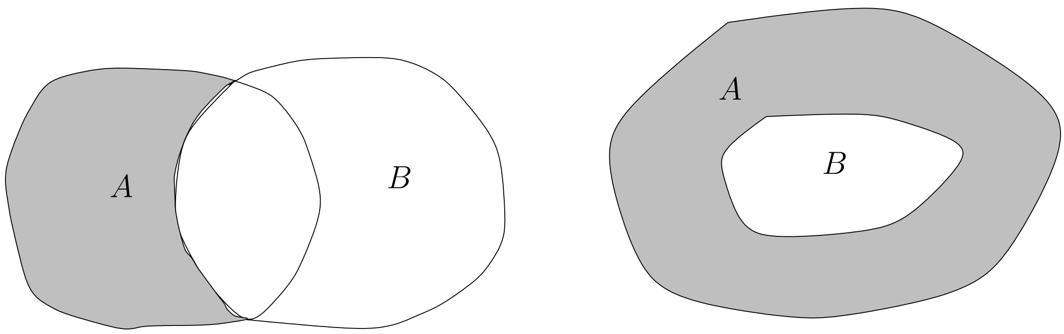
Qualora $A \cap B = \emptyset$, i due insiemi A e B si dicono *disgiunti.*

Definizione 1.3 Dati due insiemi A e B si definisce l'insieme $A \backslash B$ (A meno B o differenza di B da A) come l'insieme costituito da tutti e soli quegli elementi che appartengono ad

A che non appartengono a B, cioè (vedi figura 1.3)

$$x \in A \setminus B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \wedge \ x \notin B\,.$$

Se $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si dice anche *complementare* di B rispetto ad A e viene indicato con $\complement_A B$.



$A \setminus B$ $\qquad$ $\complement_A B$

Figura 1.3: Differenza e complementazione

Esempio 1.7 Siano A e B come in (1.4). Allora

$$A \setminus B = \big\{2, 4, b, c\big\}\,.$$

- Leggi di De Morgan per la complementazione: scrivile e dimostrale usando che

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)\,.$$

- Differenza simmetrica: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Definizione 1.4 Dato un insieme A si definisce *l'insieme delle parti di* A, indicato con $\mathcal{P}(A)$, come quell'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di A, cioè

$$\mathcal{P}(A) \doteq \big\{B : \ B \subseteq A\big\}\,.$$

Esempio 1.8 Sia

$$A = \big\{1, 3, a\big\}\,.$$

Allora

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, A, \{1\}, \{3\}, \{a\}, \{1,3\}, \{1,a\}, \{3,a\}\big\}\,.$$

Definizione 1.5 Dati due insiemi A e B, si definisce l'insieme *prodotto cartesiano* di A per B, denotato con $A \times B$, come l'insieme di tutte le coppie ordinate $(a,\, b)$ con $a \in A$ e $b \in B$, cioè

$$A \times B \doteq \big\{(a,\, b):\; a \in A,\; b \in B\big\}\,.$$

Le coppie ordinate hanno la proprietà che

$$(a,\, b) = (a',\, b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = a' \;\wedge\; b = b'\,,$$

a differenza dell'insieme $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Esempio 1.9 Siano

$$A = \big\{1, 2, 3\big\}\,, \qquad\qquad B = \big\{1, 3, 4, 5\big\}\,.$$

Allora

$$A \times B = \big\{(1,1), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,3), (3,4), (3,5)\big\}\,.$$

Si osservi che si può anche definire

$$A^2 \doteq A \times A = \big\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\big\}\,.$$

1.2.1 Relazioni

Una relazione tra due insiemi non vuoti A e B, non necessariamente distinti, è un sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Si dice che due elementi $a \in A$ e $b \in B$ sono in relazione tra loro secondo la relazione $\mathcal{R}$, e si scrive $a\mathcal{R}b$, se $(a,\, b) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.10 Sia A l'insieme di tutte le persone e B l'insieme di tutte le abitazioni. Definiamo la relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ in questo modo: $(a,\, b) \in \mathcal{R}$ se e solo se b è l'abitazione di residenza di a. Notare che ci sono elementi di A che non sono in relazione con alcun elemento di B: i senzatetto.

Sia sempre A l'insieme di tutte le persone. Definiamo una relazione tra A e se stesso, cioè un sottoinsieme $\mathcal{R}$ di A^2. Diciamo che $a\mathcal{R}b$ se e solo se a è figlio di b.

Dato un insieme non vuoto A, il sottoinsieme $\mathcal{D}$ di A^2 dato da

$$\mathcal{D} \doteq \big\{(a,\, a):\; a \in A\big\}\,, \qquad \text{diagonale di } A,$$

definisce la relazione di *uguaglianza*. Infatti $a\mathcal{D}b$ se e solo se $a = b$.

Relazioni d'ordine

Diamo la seguente

Definizione 1.6 Dato un insieme non vuoto A ed una relazione $\mathcal{R}$ in esso, $\mathcal{R}$ si dice *relazione d'ordine* se gode delle seguenti tre proprietà

proprietà riflessiva
$$\forall\, a \in A \qquad a\mathcal{R}a\,;$$

proprietà antisimmetrica

$$\forall\, a, b \in A \qquad \big(a\mathcal{R}b \ \wedge\ b\mathcal{R}a\big) \quad \Longrightarrow \quad a = b\,;$$

proprietà transitiva

$$\forall\, a, b, c \in A \qquad \big(a\mathcal{R}b \ \wedge\ b\mathcal{R}c\big) \quad \Longrightarrow \quad a\mathcal{R}c\,.$$

Se vale anche la proprietà
$$\forall\, a, b \in A \qquad a\mathcal{R}b \ \vee\ b\mathcal{R}a$$
allora la relazione d'ordine si dice *totale* è l'insieme A *totalmente ordinato.*

Esempio 1.11 La relazione "$\leq$" su $\mathbb{N}$ è una relazione di ordine totale, mentre alla relazione "$<$" manca la proprietà riflessiva per essere una relazione d'ordine. Invece, dato un qualsiasi insieme A, si può definire una relazione di $\mathcal{P}(A)$ in questo modo

$$\forall\, B, C \subseteq A \quad B\mathcal{R}C \quad \Longleftrightarrow \quad B \subseteq C\,.$$

$\mathcal{R}$ risulta essere una relazione d'ordine, ma non totale: è sufficiente prendere A come nell'Esempio 1.8 e scegliere $B = \{1\}$ e $C = \{3\}$.

1.3 Il principio di induzione

Enuncia la prima forma e poi la seconda:

Principio di induzione - prima forma

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ sia $\mathcal{P}_n$ un enunciato. Se

i) $\mathcal{P}_{n_0}$ è vero

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ ($\mathcal{P}_n$ è detta ipotesi induttiva)

allora $\mathcal{P}_n$ è vero per ogni n.

Principio di induzione - seconda forma

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ sia $\mathcal{P}_n$ un enunciato. Se

i) $\mathcal{P}_{n_0}$ è vero

ii) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, vale $\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1, \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ ($\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1, \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n$ è detta ipotesi induttiva)

allora $\mathcal{P}_n$ è vero per ogni n.

Dire come funziona. Spiegare cosa succede se $\mathcal{P}_n$ è definita solo da un certo n_0 in poi. Introduci il *simbolo di sommatoria*. Definiamo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \doteq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \,. \tag{1.5}$$

Notare che l'indice i che compare a pedice del simbolo di sommatoria è *muto*: può essere sostituito da una qualsiasi altra lettera dell'alfabeto senza inficiare il significato di (1.5). Così, ad esempio, valgono

$$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5\,, \qquad \sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2\,.$$

Dimostriamo per induzione che

$$\forall\ n \geq 1 \quad \text{vale} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Non farlo!
Attenzione ad usare correttamente il principio di induzione. Esempio con

$$\mathcal{P}_n \ :\ 0 = 1 = 2 = \cdots = n\,.$$

1.4 I coefficienti binomiali

Non farlo: definisci il fattoriale quando ti servirà
Per ogni numero naturale n si definisce n *fattoriale* come

$$n! \doteq \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0, 1\,, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se} \quad n \geq 2\,, \end{cases} \tag{1.6}$$

che può essere riscritta come

$$0! = 1\,, \qquad n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{se } n \geq 1\,, \tag{1.7}$$

utilizzando un modo di dare la definizione per *induzione* o *ricorrenza*.

Esempio 1.12 Numero delle permutazioni di n elementi.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, si definisce

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\,, \tag{1.8}$$

e si legge n *sopra* k. Le espressioni del tipo in (1.8) si dicono *coefficienti binomiali* e per ogni n e k con $k \leq n$ sono tutti numeri naturali. Seguono esempi.

Esempio 1.13 Come scegliere k biglie nere tra $n \geq k$? Per la prima hai n possibilità, per la seconda $n-1$, per la k-esima $n-k+1$. Siccome sono indistinguibili, devi dividere per il numero di permutazioni $k!$. Si ottiene $\binom{n}{k}$.

Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\,,\\
&\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,,\\
&\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\,.
\end{aligned}$$

Dimostrane un paio.

Teorema 1.1 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\,.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Fai vedere come funziona con il *triangolo di Tartaglia.*

1.5 I numeri razionali

Diamo per noti l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$. Ricordiamo che l'insieme dei numeri razionali è definito come

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{ \frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}\,.$$

Questo insieme gode di alcune proprietà che qui elenchiamo. Di seguito, a, b, $c\dots$ indicheranno elementi di $\mathbb{Q}$.

- È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta somma o addizione che gode delle seguenti proprietà

S1 proprietà commutativa: $\forall\ a, b \quad a + b = b + a$;

S2 proprietà associativa: $\forall\ a, b, c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$;

S3 esistenza dell'elemento neutro: esiste un elemento detto *zero* e indicato con 0 tale che $\forall\ a,\ a + 0 = a$;

S4 esistenza dell'opposto: per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste un elemento detto *opposto di* a e indicato con $-a$ tale che $a + (-a) = 0$.

• È definita in $\mathbb{Q}$ un'operazione detta prodotto o moltiplicazione che gode delle seguenti proprietà

P1 proprietà commutativa: $\forall\ a, b \quad a \cdot b = b \cdot a$;

P2 proprietà associativa: $\forall\ a, b, c \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

P3 esistenza dell'elemento neutro: esiste un elemento detto *uno* e indicato con 1 tale che $\forall\ a,\ a \cdot 1 = a$;

P4 esistenza dell'inverso: per ogni $a \neq 0$ esiste un elemento detto *inverso di* a e indicato con a^{-1} oppure con $1/a$ tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

P5 proprietà distributiva: $\forall\ a, b, c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Queste proprietà definiscono in $\mathbb{Q}$ una struttura algebrica detta *campo*. Notare che le operazioni di somma e prodotto definite sugli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non godono di tutte queste proprietà. A titolo di esempio, in $\mathbb{N}$ nessun elemento tranne lo zero ha un opposto, e in $\mathbb{Z}$ nessun elemento non nullo a parte ± 1 ammette inverso. Osserviamo inoltre che in $\mathbb{Q}$ è definita una relazione d'ordine totale "$\leq$" e che tale relazione è compatibile con la struttura di campo di $\mathbb{Q}$. Infatti valgono

O1 $\forall\ a, b, c \quad$ se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$;

O2 $\forall\ a, b, c$ con $c > 0 \quad$ se $a \leq b$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$,

cioè $\mathbb{Q}$ è quello che viene chiamato un *campo ordinato*.

Proprietà di densità

$$\forall\ x, y,\ x < y,\ \exists \text{ infiniti elementi } z \text{ tali che } x < z < y\,. \tag{1.10}$$

Basta prendere (vedi figura 1.4)

$$z_1 = \frac{x + y}{2}\,, \quad z_2 = \frac{x + z_1}{2}\,, \ldots, z_{n+1} = \frac{x + z_n}{2}\,.$$

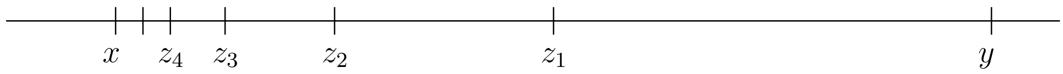


Figura 1.4: Proprietà di densità

Proprietà di Archimede

$$\forall\, x, y > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tale che } nx \geq y\,. \tag{1.11}$$

Per dimostrarla osservare che se $x = p/q$ e $y = r/s$, posto $n = qr$, risulta

$$nx = pr \geq r \geq \frac{r}{s} = y\,.$$

Numerabilità di $\mathbb{Q}$

Vedi Tabella B.1 sezione approfondimenti del Capitolo 2.

Fai capire che puoi contare gli elementi di $\mathbb{Q}$ esattamente come puoi contare quelli di $\mathbb{N}$.

	0		1		-1		2		-2		...
0	(0,0)		(0,1)	$\rightarrow$	(0,-1)		(0,2)	$\rightarrow$	(0,-2)		...
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$	
1	(1,0)		(1,1)		(1,-1)		(1,2)		(1,-2)		...
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$			
-1	(-1,0)		(-1,1)		(-1,-1)		(-1,2)		...		...
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$		$\nearrow$					
2	(2,0)		(2,1)		(2,-1)		...		...		
		$\swarrow$		$\nearrow$							
-2	(-2,0)		(-2,1)		...		...		...		
	$\downarrow$	$\nearrow$									
...	...		...		...						

Tabella 1: Numerabilità di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Rappresentazione decimale

Per rappresentare un numero razionale, oltre all'espressione p/q con p e q interi, $q \neq 0$, si può usare anche la *rappresentazione decimale*, cioè

$$\frac{p}{q} = \pm r.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots\,, \tag{1.12}$$

dove r è un numero naturale, mentre

$$\alpha_i \in \big\{0, 1, \dots, 9\big\} \qquad \forall\, i\,.$$

Per esempio

$$\frac{3}{2} = 1.5\,, \qquad \frac{2}{3} = 0.666666666\cdots = 0.\bar{6}\,.$$

Un'espressione del tipo (1.12) si dice *allineamento decimale*. Ogni numero razionale ha un allineamento decimale *limitato* (cioè da un certo $\bar{n}$ in poi $\alpha_n = 0$), oppure periodico (cioè da un certo $\bar{n}$ in poi esiste un blocco di un numero finito di cifre, detto *periodo*, che è ripetuto indefinitamente).

Allineamenti propri: limitati o periodici, ma di periodo diverso da 9. Infatti giustificheremo più avanti che

$$r.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\bar{9} = r.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\gamma_n \qquad \gamma_n = \alpha_n + 1$$

e quindi vale $0.\bar{9} = 1$.

1.6 I numeri reali

L'insieme dei numeri razionali, pur avendo molte proprietà utili ai fini del calcolo, non soddisfa tutte le nostre necessità. Un esempio per chiarire.

Esempio 1.14 È noto che diagonale e lato di un quadrato sono grandezze incommensurabili. Questo equivale a dire che la lunghezza d della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale: è quello che viene detto un numero *irrazionale*. Proviamo a dimostrarlo per assurdo, cioè assumiamo che esistano p e q interi primi tra loro tali che $d = p/q$. Per il teorema di Pitagora $d^2 = 2$, da cui $p^2 = 2q^2$. Dunque p^2 è pari e quindi lo è anche p, supponiamo sia $p = 2k$. Allora $p^2 = 4k^2$, da cui $q^2 = 2k^2$ e quindi anche q è pari: ciò contrasta con il fatto che p ed q sono primi tra loro.

Consideriamo ore i due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ dati da

$$A = \{a \in \mathbb{Q} :\ a \geq 0,\ a^2 \leq 2\}\,, \qquad B = \{b \in \mathbb{Q} :\ b > 0,\ b^2 \geq 2\}\,. \tag{1.13}$$

Allora ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, ma non esiste un numero razionale c tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$, perchè tale elemento dovrebbe soddisfare $c^2 = 2$, e nell'Esempio 1.14 abbiamo visto che questo non può verificarsi. Dunque $\mathbb{Q}$ non è completo, cioè $\mathbb{Q}$ ha dei "buchi" che vogliamo riempire. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è quello che fa al caso nostro, cioè è quello che viene detto un *un campo ordinato completo*, cioè senza "buchi". Questo traduce l'idea di *continuo*, idea che geometricamente si può intuire guardando una retta. In questo senso l'insieme dei numeri reali può essere messo in *corrispondenza biunivoca* con i punti di una retta sulla quale si è individuato un verso di percorrenza, generalmente da sinistra verso destra, ed una unità di misura (vedi figura 1.6).

Definizione 1.7 Si definisce *numero reale* un allineamento decimale proprio, cioè che non ha 9 come periodo. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.

Per l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali continuano a valere le proprietà di densità e di Archimede enunciate per l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Inoltre valgono le proprietà S1-S4, P1-P5, O1-O2, e quindi $\mathbb{R}$ è un campo ordinato.

Teorema 1.2 (di completezza) *Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.*

$\mathbb{R}$ è allora un *campo ordinato completo*

1.6.1 Esercizi

Esercizio 1

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$ vale la *disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,. \tag{1.14}$$

Utilizzare il principio di induzione.

$$\mathcal{P}_n \;:\; (1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Per dedurre $\mathcal{P}_{n+1}$ da $\mathcal{P}_n$, moltiplica ambo i membri di $\mathcal{P}_n$ per $(1+x)$.

Esercizio 2

Sia $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. Allora vale

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\,. \tag{1.15}$$

Scrivi

$$S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = 1 + rS_n$$

e ricava S_n.

1.6.2 Intervalli

Definiamo ora alcuni sottoinsiemi dei numeri reali che ci saranno utili in seguito, introducendo anche delle opportune notazioni. Un intervallo è un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, a, b \in \mathcal{I} \quad a < r < b \quad \Longrightarrow \quad r \in \mathcal{I}\,.$$

Dati due numeri reali a e b, $a \leq b$, si dice *intervallo di estremi* a *e* b (vedi figura 1.5) uno qualsiasi dei seguenti insiemi:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\Big\}, && \text{intervallo chiuso} \\
[a,b[&\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\Big\}, && \text{intervallo aperto} \\
]a,b] &\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\Big\}, && \text{intervallo chiuso a sx, aperto a dx} \\
]a,b[&\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\Big\}, && \text{intervallo chiuso a dx, aperto a sx}\,.
\end{aligned}
$$

Spesso si usa anche la notazione

$$[a,b) = [a,b[\,, \qquad (a,b] =]a,b]\,, \qquad (a,b) =]a,b[\,.$$

Gli elementi a e b si dicono *estremi* dell'intervallo, i punti di $]a,b[$ punti inetrni, $b-a$ è il diametro o ampiezza, $(b-a)/2$ il raggio, $(a+b)/2$ il cenrto. FAI ESEMPI.

Introduciamo ora i simboli $-\infty$ e $+\infty$, per indicare due oggetti (CHE NON SONO NUMERI REALI!) che verificano

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.16}$$

Con questi simboli, assieme agli intervalli di prima, si definiscono anche gli intervalli *illimitati* (vedi figura 1.5)

$$
\begin{aligned}
]-\infty, c] &\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; x \leq c\Big\}, \\
]-\infty, c) &\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; x < c\Big\}, \\
[c, +\infty[&\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; x \geq c\Big\}, \\
]c, +\infty[&\doteq \Big\{x \in \mathbb{R} : \; x > c\Big\},
\end{aligned}
$$

dove comunque si possono usare le parentesi tonde al posto delle quadre con le stesse avvertenze di prima. Vale $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ e si usa la notazione $\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, retta reale

Figura 1.5: Intervalli

estesa.

1.6.3 Il modulo di un numero reale

Si dice *modulo* o *valore assoluto* di un numero reale x la quantità

$$|x| \doteq \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Se utilizziamo una retta per rappresentare $\mathbb{R}$, $|x|$ rappresenta la distanza del punto x dallo zero, mentre dati $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2|$ rappresenta la distanza di x_1 da x_2 (vedi figura 1.6). Dalla definizione si ottiene che

$$\forall\ M \geq 0 \qquad |x| \leq M \qquad \Longleftrightarrow \qquad -M \leq x \leq M\,, \tag{1.18}$$

che dice che x dista da 0 meno di M se e solo se x è compreso tra $-M$ e M. Usando (1.18)

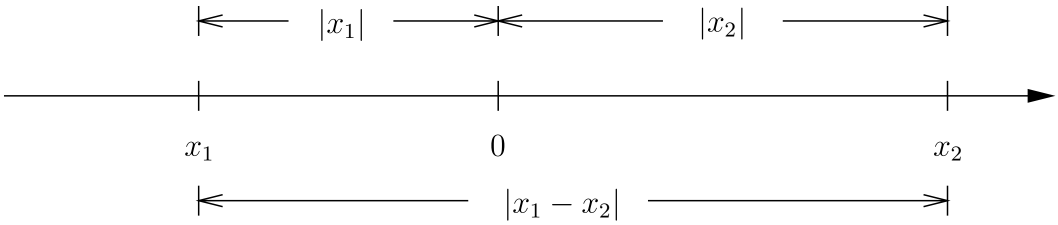


Figura 1.6: Retta reale e modulo

e sommando membro a membro le disuguaglianze

$$-|x| \leq x \leq |x|\,, \quad -|y| \leq y \leq |y|\,,$$

si ottiene la *disuguaglianza triangolare*

$$\forall\ x, y, \in \mathbb{R} \qquad |x + y| \leq |x| + |y|\,, \tag{1.19}$$

Da questa si ottiene anche quest'altra importante disuguaglianza:

$$\forall\ x, y, \in \mathbb{R} \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,. \tag{1.20}$$

Infatti:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|\,,$$

da cui

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|\,,$$

e quindi (1.20).
La (1.19) si può estendere al caso della somma di n addendi, cioè vale:

$$\big|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\big| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\,. \tag{1.21}$$

La (1.21) si può scrivere in forma compatta utilizzando il *simbolo di sommatoria* $\sum$ in questo modo

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,. \tag{1.22}$$

1.6.4 Massimo, minimo

Cosa distingue un intervallo illimitato da uno che non lo è? Se guardiamo al paragrafo precedente, osserviamo che per un intervallo limitato $\mathcal{I}$ possiamo trovare due elementi di $\mathbb{R}$ ℓ e L tali che

$$\ell \leq x \leq L \qquad \forall\, x \in \mathcal{I}\,.$$

Per esempio, se $\mathcal{I} =]2, 4]$, possiamo prendere $\ell = 2$ e $L = 4$, ma anche $\ell = -100$ e $L = 1020$ vanno bene. Questo non accade per gli intervalli illimitati: almeno uno dei due numeri ℓ e L non riusciamo a trovarlo. Le osservazioni appena fatte possono essere estese ad un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.8 Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono ℓ, $L \in \mathbb{R}$ tali che

$$\ell \leq x \leq L \qquad \forall\, x \in A\,. \tag{1.23}$$

In caso contrario, A si dice *illimitato*.

Così l'insieme

$$\mathbb{Z}^- \doteq \big\{x \in \mathbb{Z} :\ x < 0\big\} \tag{1.24}$$

risulta illimitato, mentre se consideriamo solo i numeri naturali minori od uguali a 20 otteniamo un inseme limitato: è sufficiente prendere $\ell = -1$ e $L = 21$ nella definizione appena data. Risulta limitato anche l'insieme A definito in (1.13) (basta prendere $\ell = 0$ e $L = 2$), mentre l'insieme B lì definito è illimitato.

Una definizione equivalente di limitatezza di un insieme si ottiene dalla seguente

Proposizione 1.1 *Un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che*

$$|a| \leq M \quad \forall\, a \in A\,. \tag{1.25}$$

Dim. A è limitato se e solo se esistono $\ell,\ L \in \mathbb{R}$ per cui vale (1.23). Sia

$$M = \begin{cases} |L| & \text{se} \quad |L| \geq |\ell|, \\ |\ell| & \text{se} \quad |\ell| \geq |L|. \end{cases}$$

Se $a \in A$, si ha

$$-M \leq \ell \leq a \leq L \leq M\,,$$

da cui si ottiene (1.25) sfruttando (1.18). Se invece vale (1.25), allora da (1.18) segue (1.23) con $\ell = -M$ e $L = M$. □

Capitolo 2

Seconda settimana - 8 ore

2.1 I numeri reali

2.1.1 Massimo, minimo

Ora facciamo un passo avanti, distinguendo due situazioni. L'insieme $\mathbb{Z}^-$ definito in (1.24) è illimitato perchè non riusciamo a trovare $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\ell \leq x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}^-$. Riusciamo però a trovare $L \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq L$ per ogni $x \in \mathbb{Z}^-$: è sufficiente prendere $L = 0$. Il contrario accade per l'insieme B definito in (1.13): non riusciamo a trovare $L \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq L$ per ogni $x \in B$, mentre prendendo $\ell = 0$ risulta $\ell \leq x$ per ogni $x \in B$. Distinguiamo allora queste due situazioni con un'opportuna definizione.

Definizione 2.1 Un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ si dice *superiormente limitato* se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \leq L \qquad \forall\, x \in A\,. \tag{2.1}$$

Un elemento L soddisfacente (2.1) si dice *maggiorante* di A. In caso un tale L non esista, A si dice *superiormente illimitato* e vale

$$\forall\, L > 0 \quad \exists\, x \in A : x > L\,. \tag{2.2}$$

Definizione 2.2 Un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ si dice *inferiormente limitato* se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ell \leq x \qquad \forall\, x \in A\,. \tag{2.3}$$

Un elemento ℓ soddisfacente (2.3) si dice *minorante* di A. In caso un tale ℓ non esista, A si dice *inferiormente illimitato* e vale

$$\forall\, \ell < 0 \quad \exists\, x \in A : x < \ell\,. \tag{2.4}$$

Dalle (2.1), (2.3) segue immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 2.1 *Un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$ è limitato se e solo se è sia superiormente che inferiormente limitato.*

Un ruolo particolare è svolto dai maggioranti e minoranti di un insieme A che sono anche elementi di A. Se prendiamo l'insieme $\mathbb{Z}^-$ definito in (1.24), osserviamo che l'insieme dei suoi maggioranti è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \geq -1$. Fra questi, -1 appartiene a $\mathbb{Z}^-$. Simmetricamente, se consideriamo l'insieme A in (1.13), tutti e soli i suoi minoranti sono i reali minori od uguali a zero. Fra questi, 0 appartiene ad A. Diamo allora le seguenti definizioni.

Definizione 2.3 Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Un maggiorante M di A che appartiene ad A si dice *massimo di A* ed è indicato con $\max A$. Quindi

$$M = \max A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M \in A \ \wedge \ a \leq M \ \forall \, a \in A\,.$$

Un minorante m di A che appartiene ad A si dice *minimo di A* ed è indicato con $\min A$. Quindi

$$m = \min A \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \in A \ \wedge \ m \leq a \ \forall \, a \in A\,.$$

La seguente proposizione è di immediata dimostrazione.

Proposizione 2.2 *Qualora esistano, massimo e minimo di un insieme sono unici.*

2.1.2 Estremo superiore, estremo inferiore

Ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che, pur essendo limitati, non hanno massimo oppure minimo oppure mancano di entrambi: per esempio si possono considerare gli intervalli $[0,1[$, $]0,1]$ e $]0,1[$. In questi esempi è chiaro però che i numeri 0 e 1 giocano un ruolo particolare: essi sono rispettivamente il *massimo dei minoranti* ed il *minimo dei maggioranti.* Diamo allora un nome a questi oggetti.

Definizione 2.4 Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato, si dice *estremo superiore di A* ($\sup A$) il minimo dell'insieme dei maggioranti di A, cioè

$$S = \sup A \qquad \Longleftrightarrow \qquad S = \min\big\{x : \ a \leq x \ \forall \, a \in A\big\}\,.$$

Definizione 2.5 Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato, si dice *estremo inferiore di A* ($\inf A$) il massimo dell'insieme dei minoranti di A, cioè

$$I = \inf A \qquad \Longleftrightarrow \qquad I = \max\big\{x : \ x \leq a \ \forall \, a \in A\big\}\,.$$

Dal teorema di completezza segue il seguente risultato

Teorema 2.1 (di completezza, seconda forma) *Ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette estremo superiore (risp. inferiore). In tal caso l'estremo superiore (risp. inferiore) di A è unico.*

Osservazione 2.1 Notare che il teorema 2.1 non vale nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$. Se consideriamo gli insiemi A e B definiti in (1.13), si può osservare che, come sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$, A non ha estremo superiore e B non ha estremo inferiore, pur essendo rispettivamente superiormente e inferiormente limitati. Invece l'estremo superiore di A esiste in $\mathbb{R}$ e vale $\sqrt{2}$, che è anche estremo inferiore di B.

Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme sono caratterizzati da due propietà fondamentali che sono enunciate nel seguente teorema.

Teorema 2.2 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato. Allora*

$$S = \sup A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} S \geq \alpha \ \forall \ \alpha \in A \\ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \alpha \in A : \ \alpha > S - \varepsilon \, . \end{cases} \tag{2.5}$$

Se $A \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e inferiormente limitato, allora

$$I = \inf A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} I \leq a \ \forall \ a \in A \\ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ a \in A : \ a < I + \varepsilon \, . \end{cases} \tag{2.6}$$

Dim. FAI LA DIMOSTRAZIONE COME NEL LIBRO DI TESTO. □

La (2.5) dice che S è l'estremo superiore di A se e solo se (vedi figura 2.1)

1. S è un maggiorante di A
2. posso approssimare S quanto voglio con elementi di A.

La (2.6) dice che I è l'estremo inferiore di A se e solo se (vedi figura 2.1)

1. I è un minorante di A
2. posso approssimare I quanto voglio con elementi di A.

Vale la seguente proposizione di immediata dimostrazione.

Proposizione 2.3 *Se $S = \sup A$ appartiene ad A, allora S è anche massimo di A. Analogamente, se $I = \inf A$ appartiene ad A, allora I è anche minimo di A.*

Risulta comodo adottare una convenzione che definisca $\sup A$ e $\inf A$ anche nel caso in cui $A \subseteq \mathbb{R}$ non sia rispettivamente superiormente o inferiormente limitato. Questo si fa utilizzando i simboli $-\infty$ e $+\infty$ introdotti in (1.16)

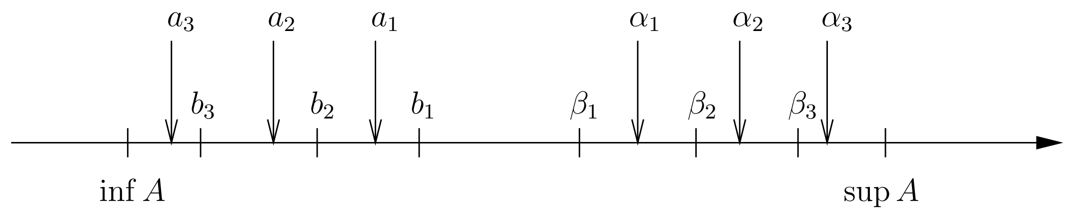


Figura 2.1: Caratterizzazione di $\sup A$ e $\inf A$

Teorema 2.3 (Proprietà di Archimede) *Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.*

Dim. Sia A l'insieme contenente tutti i multipli di a,

$$A = \{na : n \in \mathbb{N}\} .$$

Se dimostriamo che A è superiormente illimitato siamo a posto, perché b non può essere un maggiorante e dunque esiste un elemento di A, na, che supera b. Supponiamo, per assurdo, che A sia superiormente limitato e indichiamo con S il suo estremo superiore. Per la seconda proprietà dell'estremo superione, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n}a > S - a$, cosicché

$$(\bar{n} + 1)a > S .$$

Dunque, $(\bar{n} + 1)a$ è un elemento di A maggiore di S, contro l'ipotesi che $S = \sup A$. □

Esempio 2.1 Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \right\} .$$

Allora $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$. Verifichiamo che rispettivamente (2.5) e (2.6) sono verificate. Cominciamo con la prima. Sicuramente 1 è un maggiorante di A, ed inoltre $1 \in A$, da cui si deduce in particolare che 1 è il massimo di A. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora 1 è un elemento di A maggiore di $1 - \varepsilon$, dunque (2.5) è verificata. Passiamo ora alla (2.6) con $I = 0$. Banalmente 0 è minorante di A. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare un elemento di A minore di ε, cioè dobbiamo trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n} < \varepsilon .$$

È sufficiente quindi prendere $n > 1/\varepsilon$, che esiste grazie alla proprietà di Archimede 2.3

Osservazione 2.2 La proprietà di Archimede ha un'importante conseguenza. Essa implica che non esiste alcun numero reale positivo che sia più piccolo di tutti i numeri reali positivi, in formula

$$\nexists\, \alpha > 0 : \alpha \leq \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0 .$$

Infatti se un tale α esistesse, fissato $\varepsilon > 0$, esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\alpha > \varepsilon$. Allora ε/n sarebbe un numero reale positivo minore di α, contro l'ipotesi. Questo ha un'ulteriore conseguenza: vale

$$0 \le \alpha \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 0\,.$$

Teorema 2.4 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $a < r < b$.*

Dim. Poiché $b - a > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 1$ tale che $q(b-a) > 1$. Allora l'intervallo $]qa, qb[$ ha ampiezza maggiore di 1 e quindi contiene un numero intero p. Se ne deduce che $qa < p < qb$, da cui

$$a < \frac{p}{q} < b\,.$$

Quindi $r = p/q$ è il numero razionale cercato. $\square$

Dai **definizione di insieme denso** e osserva che $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile denso in $\mathbb{R}$. Osserva che questo permette di dire che l'uso dei calcolatori è "ragionevole".

Definizione 2.6 Se un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente (risp. inferiormente) illimitato diremo che

$$\sup A = +\infty \qquad (\text{risp.} \quad \inf A = -\infty)\,.$$

A titolo di esempio, se consideriamo l'insieme B definito in (1.13) e l'insieme $\mathbb{Z}^-$ definito in (1.24) risulta

$$\sup B = +\infty\,, \qquad \inf \mathbb{Z}^- = -\infty\,.$$

2.1.3 Esercizi

Esercizio 1

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi

$$\mathcal{A} = \left\{ (-1)^n + \frac{2}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \ge 2 \right\}\,,$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}\,,$$

indicando in quali casi essi sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Si ha

1. $\max \mathcal{A} = 3$ (si ottiene con $n = 2$) e $\inf \mathcal{A} = -1$, ma non è minimo. Distingui i casi n pari e n dispari.

2. $\sup \mathcal{B} = 2$ (si ottiene con n pari) e $\min \mathcal{B} = 1/2$ (si ottiene con $n = 1$).

Esercizi per casa

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi (tratti dal Marcellini–Sbordone)

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ (-1)^n n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad \mathcal{D} = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \sqrt{7n} - \sqrt{7(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{n} - n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

indicando in quali casi essi sono anche rispettivamente massimo e minimo.

2.1.4 Radicali e potenze

Radicali

Teorema 2.5 *Siano $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = y$. Tale numero x viene indicato con uno dei simboli $\sqrt[n]{y}$ o $y^{1/n}$ e viene detto radice n-esima di y.*

Attenzione:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Fai notare che

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

Osservazione 2.3 Si noti che $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$ anche per n dispari e useremo sempre questa convenzione per evitare ambiguità.

Potenze

Per ogni $a \in \mathbb{R}^{>0}$ e $r \in \mathbb{Q}$, $r = m/n$ con $n > 0$, si definisce a^r come

$$a^r = a^{m/n} \doteq \left(a^{1/n}\right)^m = (a^m)^{1/n}, \tag{2.7}$$

dove naturalmente

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ volte}}.$$

Fai vedere cosa succede se definisci $\sqrt[n]{y}$ con $y < 0$:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Se $a > 1$ e $r \in \mathbb{R}^{>0}$, con $r = p, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, allora

$$a^r \doteq \sup\left\{a^{p,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{2.8}$$

Si noti che il sup in (2.8) esiste perché gli elementi dell'insieme $\{a^{p,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato da a^{p+1} (vedi proprietà di monotonia sotto).

Se $0 < a < 1$ e $r \in \mathbb{R}^{>0}$ si definisce

$$a^r \doteq \frac{1}{(1/a)^r}, \tag{2.9}$$

osservando che $1/a > 1$.

Se $a > 0$ e $r < 0$ si definisce

$$a^r \doteq \frac{1}{a^{-r}}, \tag{2.10}$$

osservando che $-r > 0$. Inoltre si definisce

$$1^r \doteq 1 \quad \forall\, r \in \mathbb{R}, \qquad 0^r = 0 \quad \forall\, r \in \mathbb{R}^{>0}. \tag{2.11}$$

Valgono le usuali proprietà delle potenze. Sottolinea che

$$\begin{gathered}\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{se } a > 1\,,\ \text{allora } r_1 < r_2 \iff a^{r_1} < a^{r_2}\,,\\ \forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{se } 0 < a < 1\,,\ \text{allora } r_1 < r_2 \iff a^{r_1} > a^{r_2}\,.\end{gathered}$$

2.1.5 Esercizi

Esercizio 1

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

$$\begin{aligned}&x + 3 < \sqrt[3]{x^3 + 27}\,,\\ &x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} \geq \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 10x + 9}}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Risolvere le seguenti disequazioni

$$\begin{aligned}&x^3 - x^{3/2} - 6 > 0\,,\\ &(x+1)^{x^2-1} < 1\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{2^{n^2-4n+2}} : n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

Si ha $\inf \mathcal{A} = 0$, e non è minimo, mentre il massimo vale 4 ed è raggiunto per $n = 2$ (usa $n^2 - 4n + 2 = (n-2)^2 - 2$).

Esercizi per casa

Risolvere le seguenti disequazioni (l'ultima dal Marcellini–Sbordone, le altre da Stefani–Zanardo, Disequazioni)

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{x^2-19} \geq \sqrt[3]{x+1}\,, & \sqrt[4]{3x+1} < \sqrt[4]{x+3}\,, \\
\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \leq 1\,, & \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \leq 1\,, \\
x - 8 < \sqrt{x^2 - 9x + 14}\,, & x < \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}\,, \\
x - x^{4/5} - 2x^{3/5} \geq 0\,, & x^{7/3} - 4x^{5/3} > 0\,, \\
(x^2-3)^x < x^2 - 3\,, & 8^{x+1} > 2^{x^2}\,, \\
4^x > 2\,. &
\end{array}$$

2.2 Logaritmi

Teorema 2.6 *Siano $a, y \in \mathbb{R}^{>0}$, $a \neq 1$, allora esiste uno ed uno solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. La soluzione si chiama logaritmo in base a di y e si indica con $\log_a y$ (cioè $a^{\log_a y} = y$). Esso è individuato da*

$$\log_a y = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} : a^r \leq y\} & se \quad a > 1 \\ \sup\{r \in \mathbb{R} : a^r \geq y\} & se \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

Osservazione 2.4 Il numero reale $\log_a y$ è l'esponente che bisogna dare ad a per ottenere y. L'equazione $a^x = y$ non ha soluzioni per $y \leq 0$; se $a = 1$, tale equazione non ha soluzione per $y \neq 1$ e ne ha infinite per $y = 1$.

Proprietà

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, $a, b \neq 1$, si ha:

1. $a^{\log_a x} = x$ per definizione

2. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$

3. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
4. $\log_a(x/y) = \log_a |x| - \log_a |y|$
5. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a |x|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $\log_a x = 1/\log_x a = -\log_{1/a} x$, $x \neq 1$
7. (*Cambiamento di base*) $\log_a x = \log_b x / \log_b a$
8. se $a > 1$, allora $\log_a x > \log_a y$ se e solo se $x > y$
9. se $0 < a < 1$, allora $\log_a x < \log_a y$ se e solo se $x > y$
10. per ogni $a \in \mathbb{R}^{>0}$, $a \neq 1$, si ha

$$\log_a 1 = 0\,, \qquad \log_a a = 1\,, \qquad \log_a(1/a) = -1\,.$$

Richiamale velocemente soffermandoti su 8, 9 e 10.

- Definisci il logaritmo naturale, ln, con

$$e = 2.71828182845904523\ldots$$

2.2.1 Esercizi

Esercizio 1

Risolvere le seguenti disequazioni:

$$2^{3x} - 52^{3x/2} + 6 > 0\,,$$
$$\log_{x+9}\left(\frac{x+7}{x-5}\right) < 0\,.$$

Esercizio 2

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ 2^{p/q} - \frac{1}{p} : p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}\,.$$

Svolgimento: notare che $2^{p/q} > 1$, mentre $1/p < 1$ e dunque tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ sono positivi. Sia

$$\mathcal{B} = \left\{ 2^{1/q} - 1 : q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathcal{A}\,,$$

e dimostriamo che $\inf \mathcal{B} = 0$, cosicchè anche $\inf \mathcal{A} = 0$, essendo $\inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$. Sicuramente 0 è un minorante di $\mathcal{B}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e dimostriamo che esiste $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $2^{1/q} - 1 < \varepsilon$. Deve essere

$$2^{1/q} < \varepsilon + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{q} < \log_2(1+\varepsilon)\,.$$

Quindi è sufficiente scegliere

$$q > 1/\log_2(1+\varepsilon) = -\log_{1/2}(1+\varepsilon)\,.$$

Dimostriamo ora che $\sup \mathcal{A} = +\infty$, cioè che $\mathcal{A}$ è superiormente illimitato. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{C} = \left\{ 2^p - \frac{1}{p} : p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathcal{A}\,,$$

e dimostriamo che $\mathcal{C}$ è superiormente illimitato. Fissiamo $M > 0$: dobbiamo trovare $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $2^p - (1/p) > M$. Si ha

$$2^p - \frac{1}{p} \geq 2^p - 1 > M \qquad \Rightarrow \qquad p > \log_2(M+1)\,.$$

Esercizi per casa

Risolvere le seguenti disequazioni (le prime tre dallo Stefani–Zanardo, Disequazioni, le ultime dal Marcellini–Sbordone):

$$\begin{array}{ll}
2^{x^2-3x+2} > 1\,, & \left(\dfrac{1}{10}\right)^x < 2^5\,, \\
\log_3\left(\dfrac{x+7}{x-5}\right) < 0\,, & \log_{(1/2)}(x^2-x) < 1\,, \\
\log_2\big(\log_3(2x-5)\big) < 0\,, & \log_{1/5}(x^2+4x) > -1\,, \\
\log_3\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq 1\,, & \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} < 3\,.
\end{array}$$

2.3 Le funzioni - 8 ore

2.3.1 Il concetto di funzione

Partiamo con un esempio. Supponiamo di investire un capitale di un euro ad un tasso di interesse annuale t, cioè con una rendita annuale di t euro. Se l'interesse viene pagato dopo un anno, alla fine ci ritroveremo con $1+t$ euro in tasca. Se invece l'interesse viene pagato mensilmente avremo

- un capitale di $1 + \dfrac{t}{12}$ dopo il primo mese;
- un capitale di
$$1 + \frac{t}{12} + \frac{t}{12}\left(1 + \frac{t}{12}\right) = \left(1 + \frac{t}{12}\right)^2$$
dopo il secondo mese;
- un capitale di
$$\left(1 + \frac{t}{12}\right)^2 + \frac{t}{12}\left(1 + \frac{t}{12}\right)^2 = \left(1 + \frac{t}{12}\right)^3$$
dopo il terzo mese;
- un capitale pari a
$$\kappa(t) = \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12} \tag{2.12}$$
a fine anno.

Allora, se si investe un capitale di un euro ad un tasso annuale di interesse t pagato con scadenza mensile, il capitale finale dipende dal tasso di interesse secondo la formula data da (2.12). Si trova così una corrispondenza che ad ogni numero dell'intervallo $[0, 1]$, dove prende valori il tasso t, associa univocamente il capitale finale $\kappa(t)$. Si dice che il capitale finale κ è *funzione* del tasso t.

- Indice della borsa di New York (Dow Jones): ad ogni giorno lavorativo è associato l'indice a fine giornata. L'indice è *funzione* del giorno preso in considerazione.

In questi esempi si è usato il termine *funzione* non a caso. Si dice che una quantità y è esprimibile come *funzione* di una quantità x quando, data x, si può ricavare y da x in modo univoco, cioè ad ogni valore di x corrisponde *uno ed un solo* valore di y. Ciò è espresso dalla definizione che segue.

Definizione 2.7 Siano X e Y insiemi. Una *funzione f da X in Y* è una corrispondenza che ad *ogni* elemento x di X associa uno ed un solo elemento y di Y che si dice *valore* della funzione in x e si denota con $y = f(x)$. L'insieme X si chiama *dominio* della funzione f e si denota anche con $\operatorname{dom} f$. Si scrive

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto f(x)\,, \end{aligned}$$

oppure

$$y = f(x) \qquad x \in X\,.$$

Il numero $f(x)$ si dice anche *immagine di x tramite f* e l'insieme

$$\operatorname{im} f = f(X) \doteq \{f(x) \ : \ x \in X\}$$

di tutti i valori assunti da f si dice *insieme immagine* o semplicemente *immagine* di f.

La formula (2.12) definisce una funzione. In particolare il dominio di κ in (2.12) è l'intervallo $[0,1]$. Nel caso dell'indice Dow Jones, il dominio è l'insieme dei giorni lavorativi dall'apertura della borsa di New York ad oggi, il codominio è $\mathbb{N}$.

Esempio 2.2 Prendi due insiemi numerici, definisci una funzione e fai vedere l'immagine. Dai esempi di cose che non sono funzioni (studente - numero di matricola, circonferenza sul piano cartesiano).

1. funzione potenza: $x \mapsto x^\alpha$, dove il dominio è $\mathbb{R}$ se $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$ se $\alpha \in \mathbb{Z}^{<0}$, $\mathbb{R}^{>0}$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
2. funzione esponenziale, $\exp_a$, $a > 0$
3. funzione logaritmo $\log_a$, $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$
4. funzioni trigonometriche

Il grafico di una funzione

Il *grafico* di una funzione $f : X \to Y$ è l'insieme

$$\operatorname{graf} f \doteq \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y \,. \tag{2.13}$$

La dipendenza di $f(x)$ da x si può visualizzare utilizzando un sistema di assi cartesiani e disegnando l'insieme dei punti di coordinate $(x, f(x))$. A titolo di esempio, consideriamo la funzione f definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dalla formula

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Il suo grafico rappresenta i rami di un'iperbole equilatera (vedi figura 2.2)

Esempio 2.3 Consideriamo il modulo di un numero reale che abbiamo definito in (1.17). Allora nello stesso modo possiamo definire la funzione che ad ogni numero reale x associa il suo valore assoluto $|x|$, il cui grafico è riportato in figura 2.3. L'altro grafico riportato nella stessa figura è quello della funzione parte intera di x, indicata con $[x]$. Tale funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ e si definisce in questo modo: dato un numero reale x la sua parte intera $[x]$ è il più grande fra i numeri interi minori od uguali ad x. In simboli

$$[x] \doteq \max\{z \in \mathbb{Z} \ : \ z \leq x\} \,. \tag{2.14}$$

Quindi per esempio risulta $[z] = z$ per ogni intero z, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1/2] = -1$.

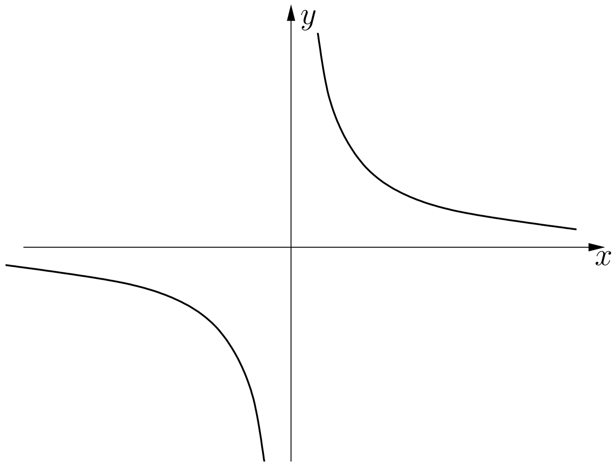


Figura 2.2: Grafico di $f(x) = 1/x$

- Non di tutte le funzioni si è in grado di disegnare il grafico: esempio di $\chi_{\mathbb{Q}}$.
- Fai i grafici delle funzioni potenza, esponenziale e logaritmo nei vari casi.
- Funzione identità e suo grafico

Immagini e controimmagini

Dai definizione di immagine e controimmagine o immagine inversa di un insieme. Fai un esempio con una funzione tra due insiemi con un numero finito di elementi.

Funzioni composte

Consideriamo la funzione h di dominio $\mathbb{R}$ definita da $h(x) = \log_2(x^2 - 1)$ e analizziamola. Calcolare h nel punto x equivale a *prima* calcolare x^2-1 e *poi* calcolare $\log_2 y$ per $y = x^2-1$. Si dice allora che h è la *composizione* delle due funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(y) = \log_2 y$, nel senso che

$$h(x) = g(f(x)) \doteq g \circ f(x)\,. \tag{2.15}$$

In generale, date due funzioni

$$f : X \longrightarrow Y\,, \qquad g : V \longrightarrow W\,,$$

se $f(X) \cap V \neq \emptyset$, allora si può definire una nuova funzione $h : \overline{X} \longrightarrow W$ mediante la (2.15) con

$$\overline{X} \doteq \big\{x \in X : f(x) \in V\big\}\,.$$

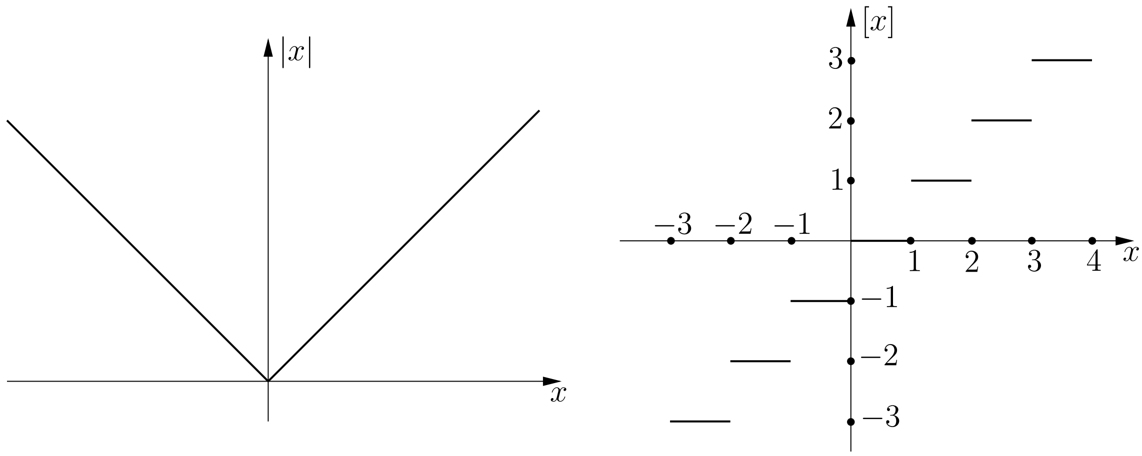


Figura 2.3: Grafici delle funzioni valore assoluto e parte intera

La condizione $f(X) \cap V \neq \emptyset$ è necessaria affinché $\overline{X} \neq \emptyset$ e si possa effettivamente calcolare la funzione g nel punto $f(x)$ con $x \in \overline{X}$. Nell'esempio sopra riportato $\overline{X} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ Notare che il prodotto di composizione di due operazioni **non** è un'operazione commutativa, cioè in generale

$$g \circ f \neq f \circ g\,,$$

come si può vedere dall'esempio precedente notando che esistono valori della variabile reale x per cui

$$g \circ f(x) = \log_2(x^2 - 1) \neq \log_2^2 x - 1 = f \circ g(x)\,.$$

Notare che cambiano anche gli insiemi dove le funzioni sono definite. La proprietà associativa, al contrario, è valida per il prodotto di composizione, cioè date tre funzioni f, g, h, se ha senso farne la composizione, vale

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\,.$$

Funzioni iniettive

- Dai definizione
- Osserva che l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione
- Digli che $\operatorname{dom} f$ e $\operatorname{im} f$ si dicono in *corrispondenza biunivoca*
- Fai esempi di $\log_a$ ed $\exp_a$
- Fai controesempio con polinomio
- Grafico di una funzione iniettiva

Capitolo 3

Terza settimana - 6 ore

3.1 Le funzioni

Funzione inversa

- f iniettiva, allora $f(x) = y$ ha una ed una sola soluzione per ogni $y \in \operatorname{im} f$.
- Fai notare che $f^{-1} \circ f = I_{\operatorname{dom} f}$ e $f \circ f^{-1} = I_{\operatorname{im} f}$.
- Fai esempio con due insiemi finiti.
- Inverse di log ed exp.
- Inversa di x^3, scrivila utilizzando la funzione segno.
- Restrizione di una funzione per invertire x^2.

3.1.1 Esercizi

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \in]-\infty, -1[\,, \\ 2^x & \text{se} \quad x \in [-1, 1[\,, \\ 2x^2 & \text{se} \quad x \in [1, +\infty[\,, \end{cases}$$

si chiede di

1. tracciarne il grafico
2. provare che è iniettiva

3. trovare $f(\mathbb{R})$
4. trovare l'inversa

Svolgimento

1. facile
2. prova che se $x_2 > x_1$ allora $f(x_2) > f(x_1)$ considerando i vari casi
3. considera separatamente le immagini dei vari sottointervalli che compaiono nella definizione della funzione
4. sfrutta il lavoro al punto 3.

Funzione inversa

- Riprendi la definizione di funzione inversa e fai un esempio con un disegno
- Inversa di x^3, scrivila utilizzando la funzione segno.
- Restrizione di una funzione per invertire x^2.

3.1.2 Esercizi

Esercizio 1

Inverti $f(x) = \ln(2^x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \in]-\infty, -1[\,, \\ 2^x & \text{se} \quad x \in [-1, 1[\,, \\ 2x^2 & \text{se} \quad x \in [1, +\infty[\,, \end{cases}$$

si chiede di

1. tracciarne il grafico
2. provare che è iniettiva
3. trovare $f(\mathbb{R})$
4. trovare l'inversa

Svolgimento

1. facile
2. prova che se $x_2 > x_1$ allora $f(x_2) > f(x_1)$ considerando i vari casi
3. considera separatamente le immagini dei vari sottointervalli che compaiono nella definizione della funzione
4. sfrutta il lavoro al punto 3.

3.1.3 Funzioni reali di variabile reale

- Operazioni con le funzioni: somma, prodotto, quoziente
- *Dominio naturale:* quando trattiamo una funzione f di variabile reale di cui è assegnata la legge ma non è specificato il dominio, chiamiamo *dominio naturale* il più grande sottoinsieme $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}$ nei cui elementi il valore assunto da f è ben definito. In altre parole, $f(x)$ è ben definita (si può effettivamente calcolare) per ogni $x \in \mathcal{D}$, e se $A \subseteq \mathbb{R}$ è tale che $f(a)$ è ben definita per ogni $a \in A$, allora $A \subseteq \mathcal{D}$. Spesso ci si riferirà al dominio naturale di una funzione f chiamandolo semplicemente dominio di f o *insieme di definizione* di f.
- Modulo di una funzione
- Parti positiva e negativa di una funzione

Funzioni simmetriche

Una funzione f è simmetrica quando il suo grafico presenta proprietà di simmetria rispetto all'origine o all'asse delle ordinate. Se ne deduce che

f è simmetrica ripetto all'origine o *dispari* se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x del suo dominio;

f è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate o *pari* se $f(-x) = f(x)$ per ogni x del suo dominio.

In ambedue i casi è chiaro che il dominio di f deve essere simmetrico rispetto all'origine della retta reale. Notare che la funzione $x \mapsto |x|$ il cui grafico è riportato in figura 2.3 è pari. La funzione

$$\operatorname{sgn} x \doteq \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

è dispari, come anche risulta dal suo grafico in figura 3.1.
Esempi con $x \mapsto x^{2n}$ e $x \mapsto x^{2n+1}$.

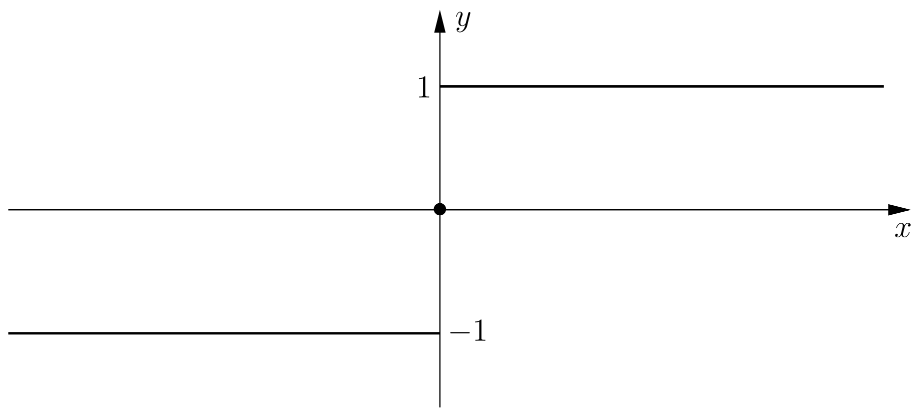


Figura 3.1: Grafico della funzione $y = \mathrm{sgn}\ x$

Funzioni monotone

Una funzione f di dominio D si dice *monotona crescente* se vale

$$x_2 > x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_2) \geq f(x_1) \qquad \forall\ x_1, x_2 \in D\,.$$

La stessa funzione si dice *strettamente crescente* se vale la disuguaglianza stretta, cioè

$$x_2 > x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_2) > f(x_1) \qquad \forall\ x_1, x_2 \in D\,.$$

Una funzione f di dominio D si dice *monotona decrescente* se vale

$$x_2 > x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_2) \leq f(x_1) \qquad \forall\ x_1, x_2 \in D\,.$$

La stessa funzione si dice *strettamente decrescente* se vale la disuguaglianza stretta, cioè

$$x_2 > x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_2) < f(x_1) \qquad \forall\ x_1, x_2 \in D\,.$$

A titolo di esempio, la funzione sgn definita in (3.1) è monotona crescente, mentre la funzione $x \mapsto -e^x$, il cui grafico è riportato in figura 3.2, è strettamente decrescente. La funzione $y = x^2$ invece non ha proprietà di monotonia, ma le sue restrizioni ai reali negativi e ai reali positivi sono rispettivamente strettamente decrescente e strettamente crescente.

La funzione *gradino di Heaviside*, $H(x) = \chi_{[0,+\infty[}$. Le funzioni parte positiva x_+ e parte negativa x_-, parte positiva f_+, parte negativa f_- e valore assoluto $|f|$ di una funzione f.

- Proprietà di monotonia delle funzioni potenza, esponenziale, logaritmo

- Inversa di una funzione monotona è monotona

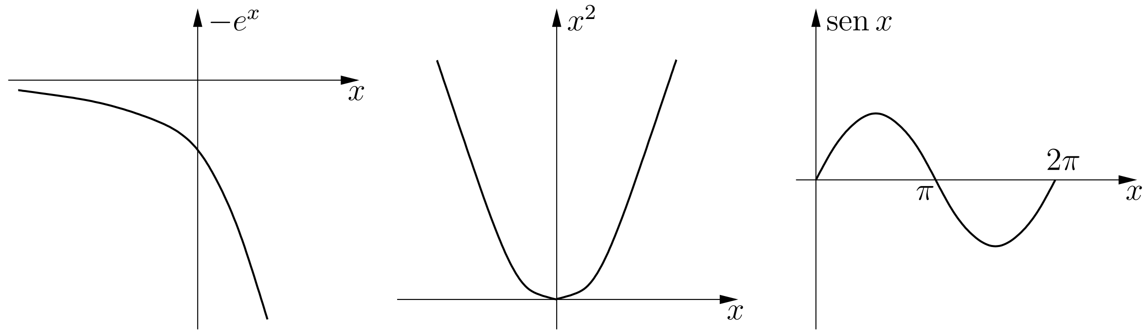


Figura 3.2: Grafici delle funzioni $y = -e^x$, $y = x^2$, $y = \operatorname{sen} x$

Funzioni periodiche

Una funzione f di dominio D si dice *periodica* se esiste $T > 0$ tale che

1. se $x \in \operatorname{dom} f$, allora $x + T, x - T \in \operatorname{dom} f$
2. $f(x + T) = f(x) \qquad \forall\, x \in D$

Se esiste, il più piccolo $T > 0$ per cui il punto 2 è verificato si dice periodo (principale) di f e ogni intervallo di ampiezza T si dice *intervallo di periodicità* di f. In pratica, è sufficiente conoscere i valori che assume f in un intervallo di periodicità per conoscere f in tutto il suo dominio. Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni seno ($T = 2\pi$) e tangente ($T = \pi$).

La funzione *mantissa*, $(x) = x - [x]$, periodica di periodo 1.

- Funzioni trigonometriche sen, cos, tan, cot e loro proprietà di simmetria
- Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche

Funzioni iperboliche e loro inverse

- Introduci seno, coseno, tangente e cotangente iperboliche
- Ricorda che $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- Proprietà di simmetria delle funzioni iperboliche
- Introduci le inverse di senh e cosh calolando esplicitamente settcosh e lassciando settsenh per casa

3.1.4 Esercizi

Esercizio 1

Determinare il dominio delle funzioni di variabile reale

$$f(x) = \arccos\big(|x^2-4|-2x\big)\,, \quad g(x) = \ln\big[\cosh(2x)-3\big]\,, \quad h(x) = \frac{\sqrt{2(\cos x - \operatorname{sen} x)-1}}{x-1}\,.$$

Esercizio 2

Risolvere la seguente disequazione

$$\operatorname{arcsen}\frac{x}{x^2-1} > \frac{\pi}{6}\,.$$

Esercizi per casa

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni (le prime due da Stefani–Zanardo, le altre da Marcellini–Sbordone):

$$\begin{aligned}
&|\cos x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\,, && 2\cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 > 0\,,\\
&\operatorname{sen} x < \cos 2x\,, && \sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 x} \ge \operatorname{sen} x + 1\,,\\
&4\operatorname{sen} x\cos x + 1 < 0\,, && \sqrt[3]{7-8\cos^3 x} \ge 1 - 2\cos x\,.
\end{aligned}$$

3.1.5 Funzioni limitate

Dai la definizioni di funzione superiormente limitata, inferiormente limitata e limitata, di estremo superiore ed inferiore, di massimo e minimo globale o assoluto e relativo o locale. Fai esempi. Punti di massimo o di minimo si dicono anche *punti di estremo*.

Definizione 3.1 Siano dati una funzione $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e un sottoinsieme A di D. Allora si definiscono

$$\sup f(x) \doteq \sup\big\{f(x)\ :\ x \in D\big\}\,, \tag{3.2}$$

$$\sup_{x\in A} f(x) \doteq \sup\big\{f(x)\ :\ x \in A\big\}\,, \tag{3.3}$$

$$\inf f(x) \doteq \inf\big\{f(x)\ :\ x \in D\big\}\,, \tag{3.4}$$

$$\inf_{x\in A} f(x) \doteq \inf\big\{f(x)\ :\ x \in A\big\}\,. \tag{3.5}$$

Definisci anche massimo e minimo

Osservazione 3.1 È chiaro che analogamente a quanto succede per gli insiemi, se una funzione ammette massimo, questo è anche estremo superiore, e se ammette minimo, questo è anche estremo inferiore.

- Fai esempi: problema barattolo di vernice o corridoio
- Considera la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1[\,, \\ 2 & \text{se} \quad x = 1\,, \end{cases}$$
e fai vedere cosa succede di max e sup includendo o no $x = 1$
- Illimitatezza di exp e log

3.1.6 Esercizi

Esercizio 1

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore della funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da
$$f(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \,,$$
indicando se essi sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Capitolo 4

Quarta settimana - 8 ore

4.1 Limiti

4.1.1 Cosa si vuole descrivere

Vogliamo qualcosa che descriva queste due situazioni.

Esempio 4.1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad x \neq 0 \tag{4.1}$$

Allora quando x si avvicina a zero, $f(x)$ tende ad assumere valori sempre più vicini ad 1.

Esempio 4.2 Supponiamo di investire un capitale c ad un tasso di interesse annuale $t \leq 1$. Vogliamo capire quanto al massimo possiamo ricavare, agendo sulla frequenza di pagamento degli interessi. È evidente che gli interessi conviene che vengano pagati il più frequentemente possibile. Supponendo che siano pagati ogni n-esima frazione di anno, $n \geq 1$, si ha che a fine anno il nostro capitale C, funzione della sola n, ammonta a

$$C_n \doteq C(n) = c\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n .$$

Per cercare quanto al massimo possiamo ricavare dobbiamo studiare l'andamento di C_n per n molto grande: con parole poco rigorose, diciamo che dobbiamo capire che valore "tende" ad assumere C_n quando n "si avvicina" a $+\infty$.

Ingredienti:

1. Una funzione f
2. Un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ a cui ci si può "avvicinare con elementi di $\operatorname{dom} f$
3. un altro punto $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ cui si "avvicina" $f(x)$ quando x si "avvicina" ad x_0

4.1.2 Topologia

- Definizioni di intorno sferico nei casi $r \in \mathbb{R}$ e $r = \pm\infty$
- Intersezione di intorni è intorno
- Proprietà di separazione
- Punto di accumulazione e punto isolato: fai esempi con intervalli, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ (il cui insieme di punti di accumulazione è $\mathbb{R}$)
- $\sup A$ e $\inf A$ sono di accumulazione se non appartengono ad A (*errata libro* per insiemi illimitati)
- Concetto di definitivamente: siano f una funzione di variabile reale e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$. Si dice che f ha una certa proprietà $\mathcal{P}$ *definitivamente* per x che *tende* ad x_0 se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 per cui per ogni $x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, $f(x)$ ha la proprietà $\mathcal{P}$.
- Esempi su definitivamente:
  - $e^{1/|x|} > 10^6$ definitivamente per $x \to 0$
  - $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\arctan x > \pi/2 - \varepsilon$ definitivamente per $x \to +\infty$

4.1.3 La definizione di limite

Definizione 4.1 (di limite) Siano f una funzione reale di variabile reale e x_0 un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$. Allora $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice *limite di $f(x)$ per x che tende a x_0* e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{oppure} \qquad f(x) \to \ell \quad \text{per} \quad x \to x_0\,,$$

se per ogni intorno $\mathcal{V}$ di ℓ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che per ogni $x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, si ha $f(x) \in \mathcal{V}$. In simboli

$$\forall\, \mathcal{V} \text{ intorno di } \ell \ \exists \mathcal{U} \text{ intorno di } x_0 : x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{dom} f, x \neq x_0 \implies f(x) \in \mathcal{V}\,. \tag{4.2}$$

Usando la nozione di “definitivamente”, (4.2) si può riscrivere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \iff \quad \forall\, \mathcal{V} \text{ intorno di } \ell \ f(x) \in \mathcal{V} \text{ definitivamente per } x \to x_0\,. \tag{4.3}$$

Data una funzione f reale di variabile reale che ammetta limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$, in seguito useremo la seguente nomenclatura:

1. se $\ell \in \mathbb{R}$, diremo che f ha *limite finito* per $x \to x_0$;

2. se $\ell = \pm\infty$, diremo che f è *divergente* o *infinita* per $x \to x_0$;

3. se $\ell = 0$, diremo che f è *infinitesima* per $x \to x_0$.

Osservazione 4.1 Si noti che la definizione di limite non fa intervenire il valore di f nel punto x_0 dove si calcola il limite. In tale punto f potrebbe anche non essere definita e ciononostante possiamo calcolare il valore del suo limite per $x \to x_0$. Ribadiamo: quello che interessa è il comportamento di f *vicino ad* x_0 ma *non in* x_0.

- Poni attenzione all'ordine dei quantificatori!

Teorema 4.1 ***(di unicità del limite)*** *Siano*

$$\ell_1 = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad e \quad \ell_2 = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Allora $\ell_1 = \ell_2$.

Dim. Fai la dimostrazione mettendo in evidenza il ruolo della proprietà di separazione. Sottolinea che l'intersezione di due intorni di un punto è ancora un intorno. □

Proposizione 4.1 *Se f ha limite finito per $x \to x_0$, allora è limitata in un intorno di x_0, cioè esiste $N > 0$ tale che $|f(x)| \leq N$ definitivamente per $x \to x_0$*

Dim. Falla! □

- Verifica che
$$\lim_{x \to 2} |x-2| \cos\left[\,\ln|x-2| + e^{\operatorname{sen} x}\right] = 0$$
utilizzando definizione cone ε-δ
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in \operatorname{dom} f \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon\,. \tag{4.4}$$
e utilizzando la figura 4.1 per esemplificare.

- Verifica che
$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$
utilizzando
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ :\ x < N,\ x \in \operatorname{dom} f, \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{4.5}$$
e la figura 4.2.

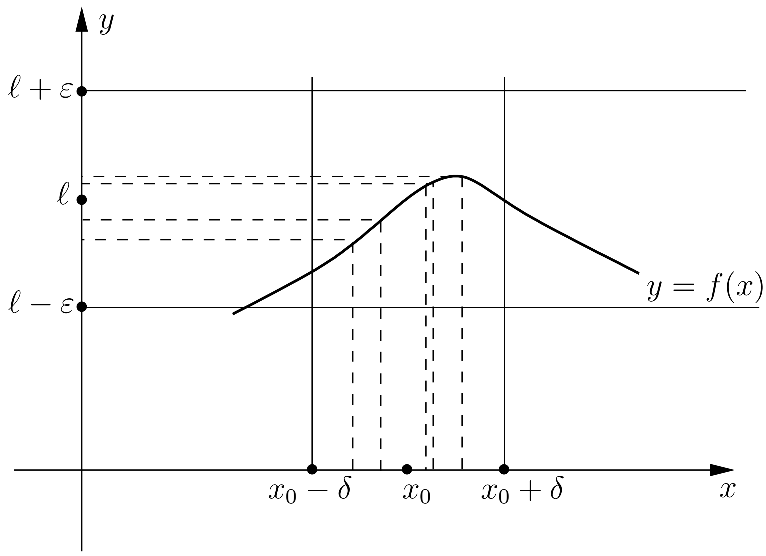


Figura 4.1: La definizione 4.4

- **Per casa.** Verifica che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\operatorname{sen} x}{x+1} = 1$$
utlizzando
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ :\ x > N,\ x \in \operatorname{dom} f,\ \Longrightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{4.6}$$
e la figura 4.2.

- **Per casa.** Verifica che
$$\lim_{x\to1} \left[\cosh\left(e^{1/|x-1|}+2\right)\cosh\left[\,\operatorname{sen}|x-1| + \cos(\ln|x-1|)\right] + \ln\left(|\cos x| + 1\right)\right] = +\infty$$
utilizzando
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \\ &\qquad \forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta,\ x \in X,\ x \neq x_0,\ \Longrightarrow\ f(x) > M\end{aligned} \tag{4.7}$$
e la figura 4.3

- Dimostra che $\operatorname{sen} x$ non ha limite per $x \to +\infty$, e lascia a loro provare che $\operatorname{sen}(1/x)$ non ha limite per $x \to 0$.

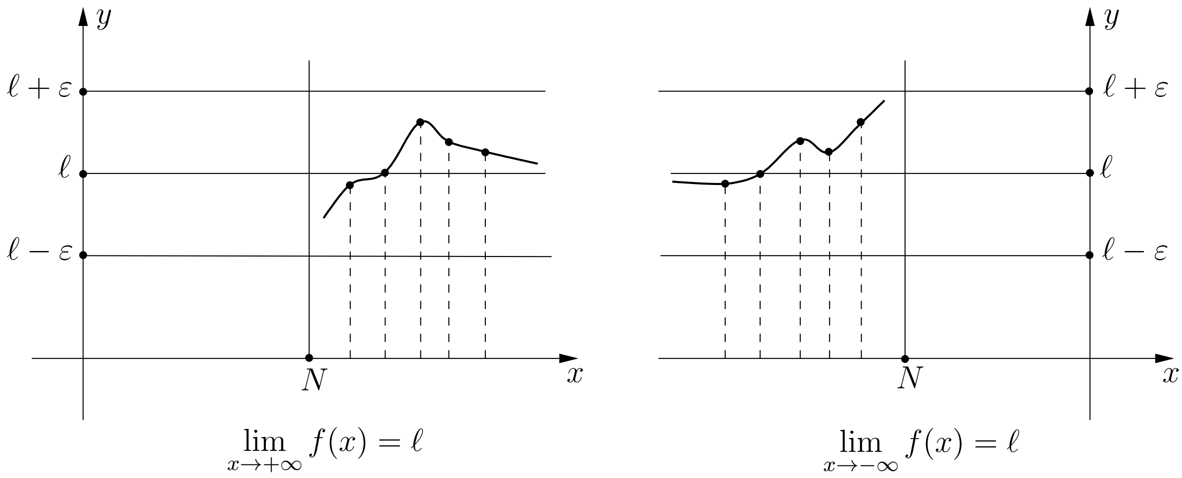


Figura 4.2: Le definizioni (4.6) e (4.5)

4.1.4 Limiti destro e sinistro

Diamo ora la le definizioni di *limite destro* e *limite sinistro*. Queste nozioni descrivono il comportamento di una funzione vicino ad un punto x_0 rispettivamente quando si approssima x_0 per eccesso e per difetto. Consideriamo per esempio la funzione $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ definita in (3.1). Per ogni $x > 0$ risulta $\operatorname{sgn} x = 1$, e dunque $\operatorname{sgn} x \to 1$ per $x \to 0$ con $x > 0$. D'altra parte, $\operatorname{sgn} y = -1$ per ogni $y < 0$, e dunque $\operatorname{sgn} y \to -1$ per $y \to 0$ con $y < 0$.

Definizione 4.2 $r \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro per A se $A \cap]r, r+\varepsilon[\neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$. Poi definisci punto di accumulazione sinistro.

Osservazione 4.2 Se x_0 è punto di accumulazione destro o sinistro per X, allora è punto di accumulazione nel senso ordinario del termine. Non vale il viceversa.

Definizione 4.3 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro per $\operatorname{dom} f$. Si dice che f ha limite ℓ per x che tende ad x_0 *da destra* o che f ha *limite destro* ℓ per x che tende ad x_0 e si scrive

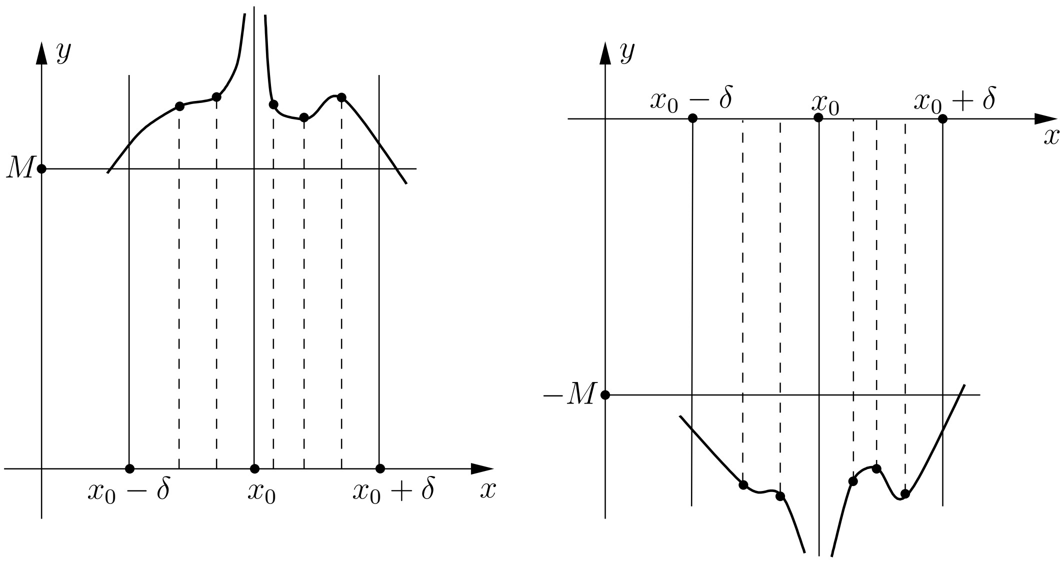
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell \qquad \text{oppure} \qquad f(x)\to\ell \quad \text{per} \quad x\to x_0^+ ,$$

se per ogni intorno $\mathcal{V}$ di ℓ esiste $\delta > 0$ tale che se $x_0 < x < x_0+\delta$, $x \in \operatorname{dom} f$, si ha $f(x) \in \mathcal{V}$.

Definizione 4.4 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione sinistro per $\operatorname{dom} f$. Si dice che f ha limite ℓ per x che tende ad x_0 *da sinistra* o che f ha *limite sinistro* ℓ per x che tende ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell \qquad \text{oppure} \qquad f(x)\to\ell \quad \text{per} \quad x\to x_0^- ,$$

se per ogni intorno $\mathcal{V}$ di ℓ esiste $\delta > 0$ tale che se $x_0-\delta < x < x_0$, $x \in \operatorname{dom} f$, si ha $f(x) \in \mathcal{V}$.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Figura 4.3: La definizione (4.7) a sinistra

Esempio 4.3 Con le definizioni date sopra e per quello che è stato detto all'inizio della sezione risulta

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}\ x = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}\ x = 1\,.$$

Se invece consideriamo la funzione parte intera $x \mapsto [x]$ definita in (2.14) e rappresentata in figura 2.3, si ha

$$\lim_{x\to k^-}[x] = k-1 \qquad \lim_{x\to k^+}[x] = k\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

Questo perchè se k è intero e $k-1<x<k$ si ha $[x]=k-1$. D'altra parte, se $k<x<k+1$, allora $[x]=k$.

Osservazione 4.3 Le definizioni di limite destro e sinistro hanno senso solo per $x_0\in\mathbb{R}$: non può avere infatti alcun significato calcolare il limite da destra di una funzione in $+\infty$ o quello da sinistra in $-\infty$.

- Teorema di unicità.
- Fai verifiche che

  $$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$$

  con un paio di disegni esemplificativi.

Cosa succede se una funzione ha limiti destro e sinistro uguali in un punto?

Teorema 4.2 *Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro e sinistro per X. Allora*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell\,.$$

Dim. Dimostralo in generale, non solo con $\ell \in \mathbb{R}$, e rifatti alla figura 4.4. $\square$

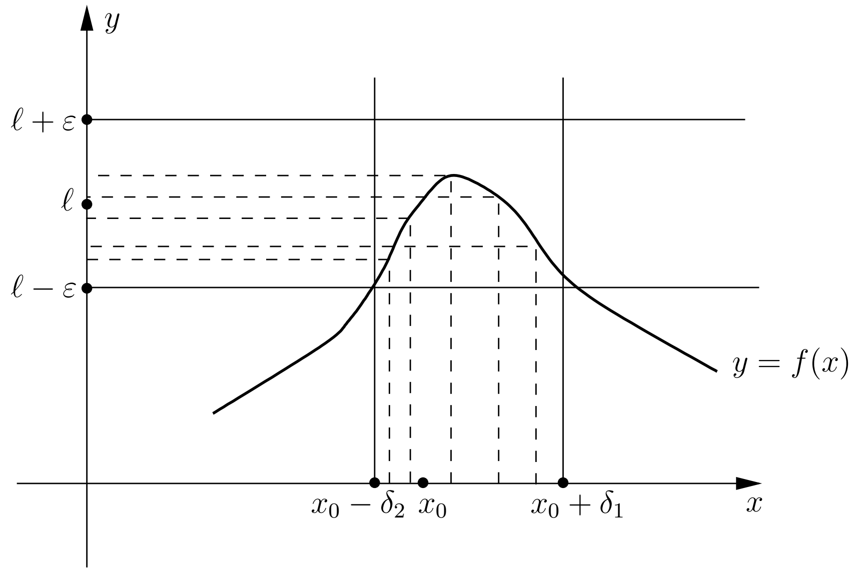


Figura 4.4: Il teorema 4.2

Osservazione 4.4 Dal teorema 4.2 si deduce che per dimostrare che una funzione f non ha limite in x_0 si può procedere in questo modo

1. dimostrare che uno dei limiti destro o sinistro in x_0 non esiste;

2. dimostrare che i limiti destro e sinistro in x_0 esistono ma sono diversi.

Consideriamo, per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

il cui grafico è riportato in figura 4.5. Allora risulta

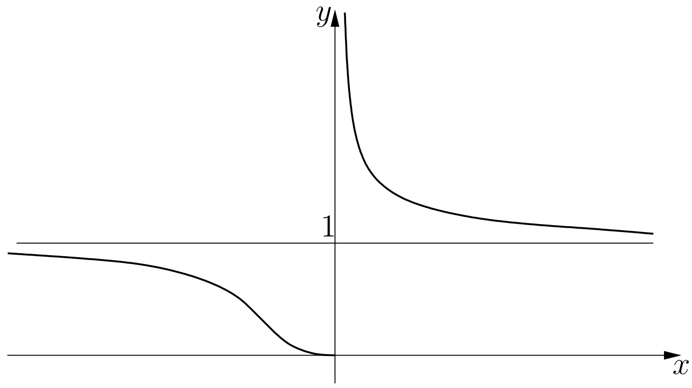


Figura 4.5: La funzione $g(x) = e^{1/x}$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 \neq +\infty = \lim_{x\to 0^+} g(x)\,,$$

e dunque f non ha limite in $x_0 = 0$,
Analogamente, per provare che una funzione ha limite in un punto, basterà provare che essa ha limite destro e sinistro e che questi sono uguali.

Esercizi per casa

Verificare, usando la definizione, i seguenti limiti, dove a è un numero reale e n un numero naturale non nullo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \qquad \text{per } n \text{ pari},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \qquad \text{per } n \text{ dispari},$$

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{per } n \text{ pari},$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \qquad \text{per } n \text{ dispari},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0\,, \quad \forall\ \alpha > 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad \text{per } a > 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad \text{per } a > 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \qquad \text{per } 0 < a < 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \qquad \text{per } 0 < a < 1.$$

4.1.5 Limiti e valore assoluto

Enuncia le proposizioni

- $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se e solo se $|f(x) - \ell|$ è infinitesima per $x \to x_0$.
- Corollario: $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$ se e solo se lo è $|f(x)|$.
- Se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, allora $|f(x)| \to |\ell|$ per $x \to x_0$, dove è da intendersi $|\ell| = +\infty$ se $\ell = \pm\infty$.
- Scrivi l'ultima come
$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right| ,$$
che è da intendersi bene perché la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}\,, \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$
non ha limite in nessun punto, mentre $|f(x)| \equiv 1$ ha limite in ogni punto.

4.1.6 Limiti e relazione d'ordine

Teorema 4.3 ***(della permanenza del segno)*** *Siano f funzione reale di variabile reale, s'x_0 punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f$. *Se*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0\,,$$
allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, cioè $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$.

Dim. Fai dimostrazione con intorni, usando la proprietà di separazione con ℓ e 0. □

Osservazione 4.5 Il teorema della permanenza del segno 4.3 afferma che, poiché per x "vicino" a x_0 $f(x)$ deve essere "vicino" ad ℓ, se questo è positivo deve per forza esserlo anche $f(x)$.

Osservazione 4.6 Se nel teorema 4.3 $x_0 \in \mathbb{R}$, allora si conclude che esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \in X$ e $x \neq x_0$, si ha $f(x) > 0$. Se $x_0 = +\infty$, esisterà un $N \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x > N$ con $x \in X$; se $x_0 = -\infty$, esisterà un $N \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x < N$ con $x \in X$.

Corollario 4.1 *Sia f funzione reale definita in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Se $f(x) \geq 0$ in un intorno di x_0 ed esiste il limite di f per $x \to x_0$, allora il valore di tale limite è non negativo.*

Dim. Se il valore del limite fosse strettamente negativo, il teorema della permanenza del segno ci assicurerebbe l'esistenza di un intorno di x_0 dove f è strettamente negativa, contro l'ipotesi. □

Teorema 4.4 (del confronto) *Siano f e g funzioni reali di variabile reale definite in un insieme X, x_0 punto di accumulazione per X, $f(x) \leq g(x)$ definitvamente per $x \to x_0$ e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_f\,, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_g\,.$$

Allora $\ell_f \leq \ell_g$.

Dim. Fai dimostrazione nel caso $\ell_f, \ell_g \in \mathbb{R}$ prendendo $\ell_f > \ell_g$ e separando gli intorni. □

Osservazione 4.7 Il teorema precedente dice che al limite sono conservate le disuguaglianze "larghe", questo non è vero per quelle "strette": $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$.

Teorema 4.5 (dei due carabinieri) *Siano f, g e h funzioni reali definite in uno stesso insieme X che ha x_0 come punto di accumulazione. Supponiamo che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$, e che f e g ammettano limite ℓ per $x \to x_0$. Allora anche h ammette limite ℓ per $x \to x_0$.*

Dim. Supponi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Sfrutta il fatto che gli intorni sono intervalli. □

Esempio 4.4 Dal teorema dei due carabinieri discende

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,. \tag{4.9}$$

Infatti, da considerazioni geometriche (vedi figura 4.6) segue che per $0 < x < \pi/2$ si ha

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x\,, \tag{4.10}$$

da cui si ricava

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1\,, \tag{4.11}$$

valida anche per $-\pi/2 < x < 0$, perché le funzioni coinvolte sono pari. Usando (4.11) si può concludere, una volta dimostrato che

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1\,.$$

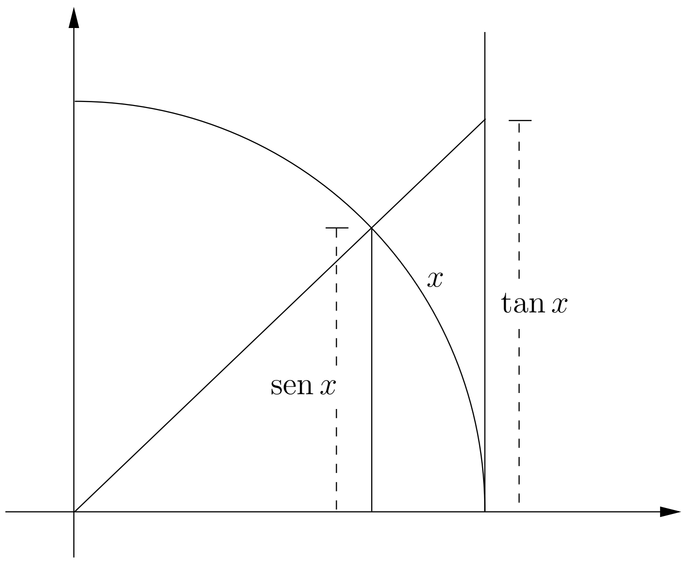


Figura 4.6: La disuguaglianza (4.10)

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Vogliamo che sia $1 - \cos x < \varepsilon$, dove abbiamo omesso il modulo essendo $\cos x \leq 1$ per $x \in \mathbb{R}$. Affinché $1 - \cos x < \varepsilon$ sia verificata, è sufficiente che valga

$$-\arccos(1-\varepsilon) < x < \arccos(1-\varepsilon) = \delta\,.$$

- Fai vedere che
$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0\,,$$
sfruttando il fatto che
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}$$
e il teorema dei due carabinieri

- Lascia per casa dimostrare che
$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

- Dimostra che
$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n\,,$$
sfruttando
$$x^n - x_0^n = (x-x_0)\big(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\big)\,.$$

Corollario 4.2 *Siano f e g funzioni reali definite in uno stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che abbia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione. Supponiamo che $f(x) \geq g(x)$ (risp. $f(x) \leq g(x)$) definitivamente per $x \to x_0$. Se $g(x) \to +\infty$ (risp. $g(x) \to -\infty$) per $x \to x_0$, allora anche $f(x) \to +\infty$ (risp. $f(x) \to -\infty$) per $x \to x_0$.*

Dim. Dai solo l'idea. □

4.2 Metodi di calcolo dei limiti

4.2.1 Limiti di funzioni monotone

- Fai un esempio semplice con un disegno per dare un'idea di quello che accade
- Ricorda quello che hai dimostrato circa quando $\sup A$ è punto di accumulazione per A

Vale il seguente teorema che non dimostriamo.

Teorema 4.6 *Siano f funzione reale di variabile reale e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione sinistro per $\operatorname{dom} f$. Se f è monotona in $]-\infty, x_0[$, allora esiste il limite sinistro di f in x_0 e valgono*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in \operatorname{dom} f}} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è monotona crescente,} \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= \inf_{\substack{x < x_0 \\ x \in \operatorname{dom} f}} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è monotona decrescente.} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se x_0 è punto di accumulazione destro per $\operatorname{dom} f$ e f è monotona in $]x_0, +\infty[$, allora esiste il limite destro di f in x_0 e valgono

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in \operatorname{dom} f}} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è monotona crescente,} \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= \sup_{\substack{x > x_0 \\ x \in \operatorname{dom} f}} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è monotona decrescente.} \end{aligned} \tag{4.13}$$

- Limiti al finito di exp e log
- Corollario su funzione monotona in un intervallo $]x_0 - \delta, x_0[$ o $]x_0, x_0 + \delta[$
- Limiti al finito di potenze e loro reciproche
- Corollario su funzione monotona in una semiretta
- Limiti all'infinito di exp, log, potenze e loro reciproche

Capitolo 5

Quinta settimana - 8 ore

5.1 Metodi di calcolo dei limiti

5.1.1 Cambio di variabile

Esempi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}=\alpha$$

con cambio di variabile $y=\alpha x$, e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+3}{e^x+1}=1$$

con cambio di variabile $y=e^x$.

Teorema 5.1 ***(della funzione composta o del cambio di variabile)*** *Siano f e g funzioni reali di variabile reale con $g\circ f$ definita in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$ che ammetta $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione. Supponiamo che*

a) $g(y)\to\ell$ per $y\to y_0$;

b) $f(x)\to y_0$ per $x\to x_0$;

c) $f(x)\neq y_0$ definitivamente per $x\to x_0$.

Allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{y\to y_0} g(y)=\ell\,.$$

Dim. Niente dimostrazione. $\square$

Osservazione 5.1 L'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$ è essenziale. Si consideri il seguente esempio. Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x\to 0} g\big[x \operatorname{sen}(1/x)\big]\,, \tag{5.1}$$

dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

La funzione $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ ha limite 0 per $x \to 0$: si può dimostrare facilmente, tenendo conto che $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $x \neq 0$. Consideriamo la successione infinitesima $\big\{1/n\pi\big\}_{n\geq 1}$. Accade che $f(1/n\pi) = 0$ per ogni $n \geq 1$, da cui si ottiene che $g(1/n\pi) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Se prendiamo invece la successione infinitesima $\big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$a_n = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

si ottiene che $f(a_n) = a_n$ e $g(a_n) \to 1$. Dunque il limite in (5.1) non esiste. Se cerchiamo di calcolarlo applicando (male!) il teorema del cambio di variabile ponendo $y = f(x)$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} g\big[x \operatorname{sen}(1/x)\big] = \lim_{y\to 0} g(y) = 1\,.$$

Questo perché nel calcolo del limite di $g(y)$ per $y \to 0$ il valore che g assume in zero non interviene, mentre nel calcolo del limite in (5.1) esso interviene perché f è nulla sui punti della successione infinitesima $\big\{1/n\pi\big\}_{n\geq 1}$.

Esempio 5.1 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x \operatorname{sen}\frac{1}{2^x+1} = 1\,.$$

Utilizzando il teorema del cambio di variabile 5.1 con $g(x) = 1/(2^x + 1)$, che tende a zero per $x \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x \operatorname{sen}\frac{1}{2^x+1} \underset{\substack{\downarrow \\ y = \frac{1}{2^x+1}}}{=} \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y} - 1\right)\operatorname{sen} y = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} y}{y} - \operatorname{sen} y\right] = 1\,.$$

5.1.2 Limiti e operazioni

Teorema 5.2 *Siano f e g funzioni reali di variabile reale e x_0 punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. *Supponiamo che f e g ammettano limite finito rispettivamente ℓ_f e ℓ_g per $x \to x_0$. Allora valgono*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell_f \pm \ell_g \,, \tag{5.2}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_f \cdot \ell_g \,, \tag{5.3}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_f}{\ell_g} \,, \qquad \ell_g \neq 0 \,. \tag{5.4}$$

Dim. Dimostra con ε-δ per somma e prodotto. □

Osservazione 5.2 Notare che in (5.4) si ha $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Questo deriva dal Teorema 4.3, sfruttando il fatto che $\ell_g \neq 0$. Quindi il rapporto $f(x)/g(x)$ ha senso in un opportuno intorno di x_0 e quindi ha senso anche calcolarne il limite.

Osservazione 5.3 Un teorema analogo al 5.2 si enuncia anche considerando solo il limite destro o solo il limite sinistro: la dimostrazione non cambia, è sufficiente considerare un intorno destro o sinistro di x_0 a seconda dei casi.

- Limite del recirpoco di una funzione
- Soffermati su
  $$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\ell_f)^{\ell_g} \qquad \ell_f > 0 \,,$$
  e dimostralo scrivendo $f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$, facendo vedere il ruolo del teorema del cambio di variabile opportunamente modificato per le funzioni continue.

Esempio 5.2 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \,. \tag{5.5}$$

Osserviamo che siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $0/0$, perché $x^2 = x \cdot x \to 0$ per $x \to 0$ grazie a (5.3) e $1 - \cos x \to 0$ per $x \to 0$ grazie a (5.2) e al fatto che $\cos x \to 1$ per $x \to 0$, cosa che abbiamo dimostrato. Quindi non possiamo applicare direttamente (5.4). Cerchiamo di manipolare opportunamente l'espressione in (5.5).

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \,.$$

Si ha

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1 \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

grazie a (4.9) e (5.3). Inoltre, per (5.4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

In totale, di nuovo per (5.3),

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

come si voleva.

- Calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

- Limiti al finito di polinomi
- Prodotti di funzioni infinitesime per funzioni limitate
- Calcola

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}\cos(1/x^2)$$

- Uso del buon senso anche nel calcolo di limiti. Calcola

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} (x+\operatorname{sen} x)\,, && \lim_{x\to 0^+} \ln x + \arctan(1/x)\\
&\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\big[\operatorname{sen}(1/x)+2\big]\,, && \lim_{x\to+\infty} \ln x(\cos x - 2)\\
&\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}\,, && \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\tanh(\operatorname{sen} x)-3}\\
&\lim_{x\to+\infty} (3+\operatorname{sen} x)^x\,, && \lim_{x\to 0} (\cosh x + 1)^{\ln x}
\end{aligned}$$

- **Forme indeterminate.** $+\infty+(-\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$, ∞/∞, $0/0$, ∞^0, 1^∞, 0^0, queste ultime riconducibili a forme indeterminate del prodotto con la posizione $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. Fai qualche esempio.
- Limiti all'infinito di polinomi e di rapporti di polinomi. Ruolo del termine di grado massimo.

5.1.3 Limiti con e

Riprendiamo la funzione κ definita in (2.12). Se facciamo lo stesso conto pensando che l'interesse venga pagato ogni n-esima parte di anno, alla fine avremo accumulato un capitale pari a

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n .$$

Per $t=1$, considerando cioè un interesse del 100%, otteniamo la successione

$$n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \tag{5.6}$$

Si può dimostrare che questa successione è strettamente crescente e che vale $2 \le a_n < 4$ per ogni n naturale. Quindi il suo estremo superiore è finito e grazie al teorema 4.6 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ risulta essere convergente. Il suo limite è il numero di Nepero e. Da (5.6) sfruttando il fatto che

$$[x] \le x \le [x]+1 , \qquad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

si ricava che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{5.7}$$

Esempio 5.3 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha , \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R} . \tag{5.8}$$

Fai notare ruolo del teorema del cambio di variabili.

Esempio 5.4 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0^\pm}(1+\alpha x)^{1/x} = e^\alpha , \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Infatti si ha

$$\underset{\substack{\downarrow \\ y=\frac{1}{\alpha x}}}{\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} =} \lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^\alpha = e^\alpha ,$$

dove si è utilizzato il teorema del cambio di variabile 5.1 con $g(x)=1/(\alpha x)$ che per $x\to 0\pm$ tende a $\pm\infty$, a seconda del segno di α.

Esempio 5.5 Dimostra che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 , \tag{5.10}$$

con la sostituzione $y=(1+x)^{1/x}$ e sfruttando il fatto che

$$\lim_{x\to x_0}\log_a x = \log_a x_0 , \qquad \forall\ x_0 \in \mathbb{R}^+ .$$

Esempio 5.6 Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,. \tag{5.11}$$

Ponendo $e^x-1=y$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=1\,.$$

Esempio 5.7 Da (5.11), scrivendo $a^x=e^{x\log a}$, si ricava che

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,. \tag{5.12}$$

Esempio 5.8 Da (5.11) con un cambio di variabili $e^y=1+x$ si ricava che se $\alpha\in\mathbb{R}$, vale

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\frac{y}{e^y-1}\alpha=\alpha\,. \tag{5.13}$$

Forma indeterminata 1^∞

Dai l'enunciato del seguente lemma senza dimostarlo.

Lemma 5.1 *Siano φ e g funzioni reali di variabile reale e $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per* $\operatorname{dom}\varphi\cap\operatorname{dom}g$. *Se $\varphi(x)\to 0$ e $\varphi(x)g(x)\to\ell$ per $x\to x_0$, allora*

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln\big(1+\varphi(x)\big)=\ell\,. \tag{5.14}$$

Nelle stesse ipotesi del lemma, da questo segue che

$$\lim_{x\to x_0}\big[1+\varphi(x)\big]^{g(x)}=\exp\Big[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)g(x)\Big]=e^\ell\,,$$

dove $e^\ell=+\infty$ se $\ell=+\infty$ e $e^\ell=0$ se $\ell=-\infty$.

Esempio 5.9 Calcola

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\big[1+(\cos x-1)\big]^{1/x^2}=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x-1}{x^2}\right]=e^{-1/2}$$

5.1.4 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(ax)}{x}\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(ax)}{x}\,,$$

dove a è un parametro reale.

Esercizio 2

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+|\operatorname{sen}x|}{x}\right)^{x}\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x^2)^{1/\log_5 x^2}\,.$$

Svolgimento:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+|\operatorname{sen}x|}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\exp_2\left(x\log_2\left(\frac{1+|\operatorname{sen}x|}{x}\right)\right)=0\,,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x^2)^{1/\log_5 x^2}=\lim_{x\to 0^+}\exp_5\left(1+\frac{\log_5(\operatorname{sen}x^2/x^2)}{\log_5 x^2}\right)=5\,.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty}(1+3\operatorname{sen}e^x)^{\cos e^{-x^2}+1/\operatorname{sen}e^x}\,.$$

Utilizzando il teorema del cambio di variabile 5.1 si ha

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ \downarrow\\ y=e^x}} 3\operatorname{sen}e^x=\lim_{y\to 0}\operatorname{sen}y=0\,,$$

ed inoltre

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ \downarrow\\ y=e^{-x^2}}}\cos e^{-x^2}=\lim_{y\to 0}\cos y=1\,.$$

Si ottiene, grazie anche al teorema 5.2 e alla (5.9),

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(1+3\operatorname{sen}e^x)^{\cos e^{-x^2}+1/\operatorname{sen}e^x} &= \left[\lim_{x\to-\infty}(1+3\operatorname{sen}e^x)^{\cos e^{-x^2}}\right]\cdot\left[\lim_{x\to-\infty}(1+3\operatorname{sen}e^x)^{1/\operatorname{sen}e^x}\right] \\
&\underset{y\,=\,3\operatorname{sen}e^x}{\overset{\downarrow}{=}} 1\cdot\lim_{y\to0}(1+y)^{3/y} = e^3\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Calcolare i seguenti limiti:

$$
\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+\operatorname{sen}x}{(1+x)^2-1+\tan x}\,,\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{cx}-\sqrt{1+x}}{\tan x}\,,
$$

$$
\lim_{x\to+\infty}x\big(a^{1/x}-1\big)\,,\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}\,.
$$

Svolgimento: per calcolare il primo dividi per x numeratore e denominatore. Poi

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{e^{cx}-\sqrt{1+x}}{\tan x} = \lim_{x\to0}\left[\frac{e^{cx}-1}{\tan x}-\frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x}\right] = c-\frac{1}{2}\,,\\
&\lim_{x\to+\infty}x\big(a^{1/x}-1\big) = \lim_{y\to0}\frac{a^y-1}{y} = \log a\,,\\
&\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to0}\left[\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right] = \log\frac{a}{b}\,.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Esercizio 6

Calcolare i seguenti limiti:

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\arctan x}{x}\right)^x\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+2x^3+x}{x^4}\right)^{3x}\,.
$$

5.2 Confronti asintotici

Cerchiamo di calcolare il seguente limite

$$
\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-1+\cos x+\ln^2(1+x)}{x\operatorname{sen}x-2\tan x+1-\cos x}\,.
\tag{5.16}
$$

Per $x\to0$ si ha

$$
\arctan x\approx x\,,\qquad 1-\cos x\approx\frac{1}{2}x^2\,,\qquad \ln(1+x)\approx x\,,\qquad \operatorname{sen}x\approx x\,,\qquad \tan x\approx x
$$

da cui

$$\arctan x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x) \approx x + \frac{1}{2}x^2$$

$$x \operatorname{sen} x - 2\tan x + 1 - \cos x \approx -2x + \frac{3}{2}x^2\,,$$

Allora nel limite in (5.16) vorremmo poter mettere x al posto di $\operatorname{sen} x$ e $\log(1+x)$ e $x^2/2$ al posto di $1 - \cos x$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x)}{x \operatorname{sen} x - 2\tan x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + (1/2)x^2}{-2x + (3/2)x^2} = -\frac{1}{2}\,, \tag{5.17}$$

la qual cosa semplifica di molto i conti.

Definizione 5.1 Date due funzioni reali di variabile reale f e g e x_0 punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, con $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \neq x_0$, si dice che f è *"o" piccolo di* g per $x \to x_0$ e si scrive $f = o(g)$ se vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,. \tag{5.18}$$

In particolare, se f è infinitesima per $x \to x_0$ si srcive $f = o(1)$.

Osservazione 5.4 Dalla definizione 5.1 appena data e da (5.5) segue che

$$1 - \cos x = o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = 0\,.$$

Da (4.9) si ottiene che vale anche

$$\operatorname{sen}^2 x = o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 0\,.$$

Sottolineamo che il simbolo $o(g)$ appena introdotto in generale indica una funzione di cui *non conosciamo la forma analitica* e che soddisfa

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0\,.$$

In questo senso, possiamo scrivere $\operatorname{sen}^2 x = o(x)$ e $1-\cos x = o(x)$ usando sia per la funzione $x \mapsto \operatorname{sen}^2 x$ che per la funzione $x \mapsto 1 - \cos x$ lo stesso simbolo $o(x)$

Con il simbolo "o piccolo" si possono definire le seguenti operazioni

$$o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))\,, \tag{5.19}$$
$$o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))\,, \tag{5.20}$$
$$g(x) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))\,, \tag{5.21}$$
$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x))\,, \qquad \text{con } f \text{ funzione limitata}\,, \tag{5.22}$$
$$\big|o(g(x))\big|^\lambda = o(|g(x)|^\lambda)\,, \qquad \forall\ \lambda > 0\,, \tag{5.23}$$

che possono essere giustificate usando la (5.18) e vanno debitamente interpretate tenedo conto dell'osservazione 5.4. La (5.19) dice che se si sommano due infinitesimi di ordine superiore a g per $x \to x_0$, si ottiene ancora un infinitesimo di ordine superiore a g. Ad esempio se sommiamo $\arctan^2 x$ e $\cosh x - 1$ sono entrambe $o(x)$ per $x \to 0$. Sommandole si ottiene ancora una funzione che è $o(x)$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2 x + \cosh x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan^2 x}{x} + \frac{\cosh x - 1}{x} \right) = 0\,.$$

La (5.20) dice che se si fa il prodotto di due infinitesimi di ordine superiore a g, si ottiene un infinitesimo di ordine superiore a g^2, e la stessa cosa succede nella (5.21) se si moltiplica un infinitesimo di ordine superiore a g per g. Ad esempio, considerando sempre le funzioni $x \mapsto \arctan^2 x$ e $x \mapsto \cosh x - 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2 x \cdot (\cosh x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2 x}{x} \cdot \frac{\cosh x - 1}{x} = 0\,,$$

e dunque $\operatorname{sen}^2 x \cdot (1 - \cos x) = o(x^2)$. La (5.22) dice che se si moltiplica una funzione limitata per un infinitesimo di ordine superiore a g, si ottiene ancora un infinitesimo di ordine superiore a g. La (5.23) dice che se si eleva un infinitesimo di ordine superiore a g alla λ, si ottiene un infinitesimo di ordine superiore a g^λ.

- Se f e g sono infiniti o infinitesimi per $x \to x_0$, e $f(x)/g(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, con $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, allora

$$f(x) = \ell g(x) + o(g(x))\,, \qquad \text{per } x \to x_0\,. \tag{5.24}$$

Infatti

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - \ell g(x)}{g(x)} \right| = \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = 0\,.$$

Esempio 5.10 Quindi si può scrivere

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)\,, \qquad \text{per } x \to 0\,, \tag{5.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,, && \text{per } x \to 0\,, && (5.26)\\
&\arctan(ax) = ax + o(x)\,, && \text{per } x \to 0\,, && (5.27)\\
&\ln(1+x) = x + o(x)\,, && \text{per } x \to 0\,, && (5.28)\\
&e^x = 1 + x + o(x)\,, && \text{per } x \to 0\,, && (5.29)\\
&(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)\,, && \text{per } x \to 0\,, && (5.30)
\end{aligned}
$$

e così via. Generalizza fino al secondo termine dello sviluppo per sen, cos, senh, cosh, exp, $\ln(1+x)$, tan, arctan.

Teorema 5.3 ***(Principio di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti)*** *Siano date quattro funzioni f, f_1, g, g_1 definite in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che abbia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione e tali che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ e $f = f_1 + o(f_1)$ e $g = g_1 + o(g_1)$ per $x \to x_0$. Allora*

$$
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,, \tag{5.31}
$$

nel senso che il primo limite esiste se e solo se esiste il secondo ed in tal caso i due limiti sono uguali.

Dim. Infatti

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))}\\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{1 + o(f_1(x))/f_1(x)}{1 + o(g_1(x))/g_1(x)}\\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.
\end{aligned}
$$

□

Allora, riprendendo il limite in (5.16), per $x \to 0$ risulta

$$
\arctan x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + 3x^2 + o(x) + o(x^2) = x + o(x)
$$

$$
x\ln(1+x) - 2\tan x + 1 - \cos x = x(x + o(x)) - 2x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -2x + o(x)\,,
$$

e allora possiamo procedere come in (5.17).

Questo metodo per calcolare i limiti è molto potente, ma bisogna prestare molta attenzione quando si usa. Consideriamo il seguente esempio

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x) - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x}\,. \tag{5.32}
$$

Cercando di usare il metodo appena introdotto, per la quantità al numeratore si trova $\operatorname{sen} x - \ln(1+x) = o(x)$. Se noi volessimo comunque procedere nel calcolo del limite in (5.32), troveremmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x) - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{-(1/2)x^2} = ?\,.$$

Se ci dimenticassimo di $o(x)$, troveremmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x) - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{-(1/2)x^2} = 0\,,$$

che è un risultato sbagliato. Il fatto che ci avanza un $o(x)$ non indica che abbiamo sbagliato, ma semplicemente che stiamo prendendo un'approssimazione troppo grossolana delle funzioni coinvolte: dobbiamo cercarne una più fine.

- Calcola il limite correttamente.

Capitolo 6

Sesta settimana - 8 ore

6.1 Confronti asintotici

- Sviluppi di funzioni composte. Fai esempio $\operatorname{sen} x^2$ e $\cos(\tan x)$

Proposizione 6.1 *Siano f, φ e φ_1 funzioni reali di variabile reale con $\varphi \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ definite in un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ che ammetta $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione. Supponiamo che*

a) $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ *per* $y \to y_0$*;*

b) $f(x) \to y_0$ *per* $x \to x_0$*;*

c) $f(x) \neq y_0$ *definitivamente per* $x \to x_0$*.*

Allora

$$\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o[\varphi_1(f(x))] \qquad \text{per } x \to x_0 \,.$$

Esempio 6.1 Si ha

$$\operatorname{senh}(e^x) = e^x + \frac{e^{3x}}{6} + o(e^{4x}) \qquad \text{per} \quad x \to -\infty \,.$$

6.1.1 Esercizi

- Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 + \ln(1+2x)}{x\cos x + \operatorname{sen}(3x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2 \operatorname{sen}\sqrt{x} + (1-\cos x)^2}{\sqrt{x}\operatorname{senh} x^2 + (e^x-1)^3}\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cosh x - 1) - \operatorname{sen}(\cos x - 1)}{\cosh(\operatorname{senh}(x/2)) - \cosh(\operatorname{sen} x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x) + \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) + \arctan(3\operatorname{arcsen} x)}\,.$$

- Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti sono finiti e diversi da zero:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2\sqrt{x}\arctan x) - e^{x^{3/2}} + 1}{\sqrt{1+3x^\alpha} - 1}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^\alpha)^{1/\operatorname{sen}^2 x} - 1}{\operatorname{senh} x}\,.$$

6.1.2 Confronti fra infiniti/infinitesimi

Fai esempi prendendo

$$f(x) = x^4 + x^2 + \operatorname{sen} x\,, \qquad g_1(x) = x^2 + 3\,, \qquad g_2(x) = x^4 + x + 1\,, \qquad g_3(x) = x^6 + 4\,,$$

e confrontandole fra loro.
Cerchiamo di formalizzare il procedimento e ottenere una regola generale. Date due funzioni, f e g, entrambe infinite o entrambe infinitesime per $x \to x_0$, x_0 punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, vogliamo stabilire quale delle due tende "più rapidamente all'infinito" o a 0 per $x \to x_0$. Supponiamo che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ e consideriamo il limite del loro rapporto. Possono accadere quattro casi.

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \begin{cases} 0 & 1) \\ \ell \text{ finito e } \neq 0 & 2) \\ +\infty & 3) \\ \text{inesistente} & 4) \end{cases}$$

Se f e g sono entrambe infinite per $x \to x_0$ diciamo che

1) f è un infinito di *ordine inferiore* a g;

2) f e g sono infiniti *dello stesso ordine*;

3) f è un infinito di *ordine superiore* a g;

4) f e g *non sono confrontabili.*

Se invece f e g sono entrambe infinitesime per $x \to x_0$ diciamo che

1) f è un infinitesimo di *ordine superiore* a g;

2) f e g sono infinitesimi *dello stesso ordine*;

3) f è un infinitesimo di *ordine inferiore* a g;

4) f e g *non sono confrontabili.*

Nel caso in cui f e g siano infiniti o infinitesimi dello stesso ordine, allora si dice che f è asintotica o asintoticamente equivalente a g e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Osservazione 6.1 La condizione (5.18) in particolare dice che se f e g sono funzioni *infinitesime* in x_0, cioè tali che $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora dire che $f = o(g)$ per $x \to x_0$ equivale a dire che f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$.

Esempio 6.2 Fai esempi di funzioni non confrontabili. Prendi $f(x) = 2x + x\,\mathrm{sgn}\,x$ e $g(x) = x$ per $x \to 0$ e $f(x) = 2x + x\,\mathrm{sen}\,x$ e $g(x) = x$ per $x \to +\infty$. Poi evidenzia che per $x \to 0$

$$\mathrm{sen}\,x \sim x\,, \qquad \tan x \sim x\,, \qquad 1 - \cos x \sim x^2\,, \qquad \arctan x \sim x\,.$$

Definizione 6.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione. Allora

1. se $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo che f ha ordine di infinitesimo $\alpha > 0$ per $x \to x_0$ se f e $|x - x_0|^\alpha$ sono infinitesime dello stesso ordine per $x \to x_0$;

2. se $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo che f ha ordine di infinito $\alpha > 0$ per $x \to x_0$ se f e $1/|x - x_0|^\alpha$ sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$;

3. se $x_0 = \pm\infty$, diremo che f ha ordine di infinitesimo $\alpha > 0$ per $x \to x_0$ se f e $1/|x - x_0|^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$;

4. se $x_0 = \pm\infty$, diremo che f ha ordine di infinito $\alpha > 0$ per $x \to x_0$ se f e $|x - x_0|^\alpha$ sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$.

Esempio 6.3 Fai esempi con $\ln(1 + x)$ e $e^x - 1$ per $x \to 0$. Fai vedere che e^x e $\ln x$ non hanno ordine di infinito rispettivamente per $x \to +\infty$ e $x \to 0$. Fai vedere che e^x non ha ordine di infinitesimo per $x \to -\infty$. Mostra che un polinomio di grado n ha ordine di infinito n per $x \to \pm\infty$. Fai vedere che $|x|^\alpha\,\mathrm{sen}(1/x)$ non ha ordine di infinitesimo per $x \to 0$.

- Valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log_a x|^\beta}{x^\alpha} = 0\,, \quad \forall\, \alpha > 0\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,, a > 0\,, a \neq 1\,, \tag{6.1}$$

$$\lim_{x\to0^+} |\ln x|^\beta x^\alpha = 0\,, \quad \forall\, \alpha > 0\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,, a > 0\,, a \neq 1\,, \tag{6.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ a > 1\,, \tag{6.3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ a > 1\,, \tag{6.4}$$

$$\lim_{x\to0} |x|^\alpha a^{1/|x|} = 0\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ a > 1\,. \tag{6.5}$$

- *Gerarchia di infiniti.* Osservando (6.3) e (6.1) si nota che c'è una gerarchia tra funzioni divergenti all'infinito. In particolare valgono

$$\log_a x = o(x^\alpha)\,, \quad x^\alpha = o(a^x)\,, \qquad \text{per } x \to +\infty\,, \quad \forall\, \alpha > 0, a > 1\,. \tag{6.6}$$

  Per rendere più efficacemente l'idea, introduciamo il simbolo "$\gg$" per dire che

$$f(x) \gg g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty\,,$$

  allorché $f(x), g(x) \to \pm\infty$ per $x \to x_0$ (cioè $f(x) \gg g(x)$ quando f è un infinito di ordine superiore a g per $x \to x_0$). Allora grazie a (6.3) e (6.1) si ha

$$a^x \gg x^\alpha \gg \log_a x \qquad \text{per } x \to +\infty\,, \quad \forall\, \alpha > 0, a > 1\,. \tag{6.7}$$

  Naturalmente è possibile crescere ancora con la gerarchia osservando, per esempio, che per $x \to +\infty$ vale $a^{x^2} \gg a^x$ e poi ancora che $a^{x^3} \gg a^{x^2}$ e così via, e si potrebbe proseguire all'infinito trovando infiniti sempre "più grandi".

- Fai esempi sull'uso della gerarchia calcolando

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + e^x + x \operatorname{sen} x}{3e^x + x^{15} \ln x}\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x + x^2 + \operatorname{senh} x}{e^{2x} + \cosh x + x \ln x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 \ln(x^4 + 3) + x^3 + \ln^4 \cosh x}{x^{20} e^{-x} + x^4 \ln(2 + x^5) + x^2 \cos x}\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} + (\ln x)/x^4}{\operatorname{senh}(1/x) + \ln(e^{1/x} + 1)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\ln x} + \cot^2 x}{e^{1/x} + 1/\tanh^2 x}\,.$$

6.1.3 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare l'ordine di infinitesimo in $x = 0$ delle funzioni

$$f(x) = \cos x - \cosh x\,, \qquad g(x) = \ln\left(1 - \sqrt{|x|}\right) + \sqrt{|x|}\,.$$

Calcolare poi l'ordine di infinitesimo di $f \cdot g$ e il

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Esercizio 2

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \operatorname{sen}(\tan^2 x) - x^2 + e^{-1/|x|} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{sen}^2 x} - 1\,.$$

Si calcoli l'ordine di infinitesimo di g per $x \to 0$ e si dica se $f = o(g)$ o $g = o(f)$ per $x \to 0$.

Esercizio 3

Calcolare, se esiste, l'ordine di infinito delle seguenti funzioni

$$f(x) = (x + \sqrt[3]{x^3 - 1})^3 + \operatorname{sen} x\,, \qquad \text{per } x \to +\infty\,,$$

$$f(x) = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} - \frac{1}{|\ln(1 + \sqrt{|x|})|}\,, \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

6.2 Successioni

Esempio 6.4 (algoritmo di Erone) Per costruire una approssimazione di $\sqrt{2}$ con un calcolatore dobbiamo necessariamente lavorare con numeri razionali, che, essendo esprimibili come rapporti di numeri interi (e quindi con una coppia di numeri interi), possono essere implementati nella memoria del nostro computer. Sappiamo per certo che

$$1 < \sqrt{2} < 2 \doteq a_0\,,$$

cioè 1 è un'approssimazione per *difetto* di $\sqrt{2}$, mentre 2 lo è per *eccesso*. Osservando che $\sqrt{2} < a_0$ implica $2/a_0 < \sqrt{2}$, se facciamo la media tra $a_0 = 2$ e $2/a_0 = 1$, otteniamo

$$a_1 \doteq \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}\,,$$

che fornisce un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$, migliore sia di 2 che di 1. A questo punto possiamo costruire una nuova approssimazione per eccesso a_2 definita da

$$a_2 \doteq \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)\,,$$

e poi costruirne un'altra a_3 a partire da a_2, e così via. In pratica, per ogni numero naturale n si definisce

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)\,, \quad n \geq 1\,, \tag{6.8}$$

e tutti i numeri a_n che così costruiamo verificano

$$\frac{2}{a_n} < \sqrt{2} < a_n\,. \tag{6.9}$$

Dimostriamolo con il principio di induzione. La coppia di disuguaglianze è verificata per a_0. Supponiamo sia vera per a_n (ipotesi induttiva) e dimostriamola per a_{n+1}. Da (6.8) si ottiene

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{2}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{a_n}(a_n - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2})\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a_n}\right) > 0\,, \end{aligned}$$

grazie all'ipotesi induttiva, e quindi $a_{n+1} > \sqrt{2}$. Da questa, moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{2}/a_n$ si ottiene $\sqrt{2} > 2/a_{n+1}$, come si voleva. Quindi, grazie al principio di induzione, (6.9) è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre da (6.9) si ottiene anche

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{2}) \,.$$

da cui, sottraendo ad ambo i membri $\sqrt{2}$,

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2}) \,. \tag{6.10}$$

Allora in questo modo si costruisce una *successione* di numeri $a_0, a_1, a_2, \dots$ tali che, prendendo come valore approssimato di $\sqrt{2}$ il numero a_{n+1} di posto $n+1$, si commette un errore che è la metà di quello che si commetterebbe prendendo come valore approssimato il numero a_n di posto n. Questo vuol dire che prendendo valori di n sempre più grandi ottengo approssimazioni sempre migliori di $\sqrt{2}$, cioè a_n *tende* a $\sqrt{2}$, anche se $a_n \neq \sqrt{2}$ per ogni n essendo gli a_n tutti numeri razionali per costruzione. Da notare che, per come è stato definito a_{n+1} a partire da a_n in (6.8), l'algoritmo che abbiamo costruito può essere facilmente implementato in un calcolatore.

Per risolvere il nostro problema di trovare un'approssimazione di $\sqrt{2}$, essenzialmente cosa abbiamo fatto? Abbiamo costruito una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $f(n) = a_n$, dove $a_0 = 2$ e a_{n+1} si ottiene da a_n tramite la (6.8). Abbiamo cioè costruito quella che viene chiamata una *successione*, vale a dire una *funzione il cui dominio è* $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme illimitato. La nostra speranza è che per $n \to +\infty$ si abbia $a_n \to \sqrt{2}$.
Una *successione* a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, e quindi una legge che ad ogni numero naturale n associa *uno ed un solo* numero reale a_n:

$$n \mapsto a_n \,.$$

Una successione viene spesso indicata con

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,,$$

che è l'insieme dei valori da essa assunti. Spesso viene anche indicata con

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

per evidenziare l'insieme dei numeri $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ considerati nell'ordine in sui si succedono al crescere di n:

Esempio 6.5 Esempi di successioni sono

$$
\begin{array}{lll}
n \geq 0 & n \mapsto n & 1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots \\
n \geq 0 & n \mapsto (-1)^n & 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \\
n \geq 1 & n \mapsto \dfrac{1}{n} & 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots \\
n \geq 1 & n \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n} & -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \ldots
\end{array}
$$

Poiché l'unico punto di accumulazione del dominio $\mathbb{N}$ di una successione è $+\infty$, ha senso considerare il limite di una successione solo per $n \to +\infty$.

- Definitivamente per successioni
- Definizione di limite, anche con concetto di definitivamente

Definizione 6.2 Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice

1. *convergente* se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste finito; *infinitesima* se il limite è zero;
2. *divergente* se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ è uno dei simboli $+\infty$ o $-\infty$;
3. *regolare* o *determinata* se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste.
4. *irregolare* o *indeterminata* se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

Dalla definizione 6.2 e usando la definizione di limite 4.1 si ottiene che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R} : n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon\,. \tag{6.11}$$

In pratica (6.11) dice che comunque si sceglie ε piccolo a piacere, riusciamo a trovare N per cui per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ più grandi di N, a_n cade nell'intervallo $(\ell - \varepsilon,\, \ell + \varepsilon)$, cioè dista da ℓ per meno di ε (vedi figura 6.1). Sempre usando le definizioni 4.1- 6.2 si ottiene che una

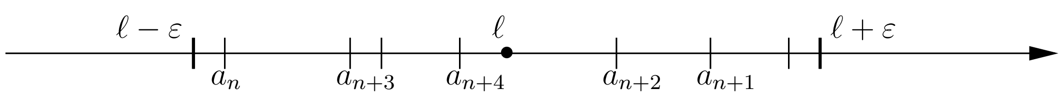


Figura 6.1: Limite di successione

successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ se

$$\forall\, M > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R} : n > N \ \Longrightarrow\ a_n > M\,, \tag{6.12}$$

mentre diverge a $-\infty$ se

$$\forall\, M > 0 \;\exists\, N \in \mathbb{R} : n > N \implies a_n < -M\,. \tag{6.13}$$

Esempio 6.6 La successione $\big\{(-1)^n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette limite e dunque è indeterminata. Supponiamo infatti che esista $\ell \geq 0$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \ell\,.$$

Allora per n dispari risulta $|(-1)^n - \ell| \geq 1$, e quindi se fissiamo $\varepsilon < 1$, per esempio $\varepsilon = 1/2$, non è possibile trovare N per cui se $n > N$ risulti $|(-1)^n - \ell| \leq \varepsilon$. Se fosse $\ell < 0$, si argomenta nello stesso modo considerando i termini della successione di posto pari.

Proposizione 6.2 *Sia* $\big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ *successione convergente. Allora è limitata.*

Dim. Ricordiamo che una successione è limitata se esistono ℓ, $L \in \mathbb{R}$ tali che $\ell \leq a_n \leq L$ per ogni n o, equivalentemente, se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni n. Sia $\ell \in \mathbb{R}$ il limite di $\big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$. In corrispondenza di $\varepsilon = 1$ troviamo $N \in \mathbb{N}$ tale che se $n > N$ si ha $|a_n - \ell| < 1$, da cui si ottiene

$$|a_n| < |\ell| + 1 \qquad \forall\, n > N\,.$$

Posto

$$M = \max\big\{|a_1|,\, |a_2|,\, \ldots,\, |a_N|,\, |\ell| + 1\big\}$$

risulta $|a_n| \leq M$ per ogni n naturale. $\square$

Il teorema 6.2 non si può invertire, cioè non è detto (anzi, in generale è falso) che una successione limitata converga. Si prendano, ad esempio,

$$a_n = (-1)^n\,, \qquad b_n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 3k\,,\ \exists\, k \in \mathbb{Z}, \\ 4 & \text{se} \quad n = 3k+1\,,\ \exists\, k \in \mathbb{Z}, \\ 20 & \text{se} \quad n = 3k+2\,,\ \exists\, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6.14}$$

che sono indeterminate ma verificano per ogni n naturale rispettivamente $|a_n| \leq 1$ e $|b_n| \leq 20$ e sono quindi limitate.

6.2.1 Proprietà e calcolo di limiti

- $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se $|a_n - \ell| \to 0$
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima se e solo se $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo è
- Se $a_n \to \ell$,allora $|a_n| \to |\ell|$, con $|\ell| = +\infty$ se $\ell = \pm\infty$

- **Teorema della permanenza del segno**
- **Teorema del confronto**
- **Teorema dei due carabinieri**
- Convergenza dell'algoritmo di Erone: prova che

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}(a_0 - \sqrt{2})$$

- Dimostra che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$$

con la stima

$$\frac{n!}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{n^k} = \underbrace{1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{k \text{ fattori} \geq 1/k} \cdot (n-k)!\,.$$

- Dimostra che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$$

facendo vedere per induzione che $2^n > n^2$, con primo passo $n = 5$ e riscrivendo la disuguaglianza come $2^{n/2} > n$

- Cita che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$

- Prova che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

con la stima

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{n \text{ fattori}}}{n \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 1} = \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2}}_{n-1 \text{ fattori } \geq 1} \cdot n \geq n\,.$$

- Riprendi gerarchia di infiniti

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^k \gg \log_a n \qquad \text{per } n \to +\infty\,, \quad \forall\, k > 0, a > 1\,.$$

Successioni monotone

Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice

monotona crescente se	$\forall\, n,\ a_n \le a_{n+1}$;	*strettamente crescente se*	$\forall\, n,\ a_n < a_{n+1}$;
monotona decrescente se	$\forall\, n,\ a_n \ge a_{n+1}$;	*strettamente decrescente se*	$\forall\, n,\ a_n > a_{n+1}$.

- Successioni definitivamente monotone

Ad esempio le successioni $\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono strettamente crescenti, mentre $\{1 + 1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente. Invece le successioni

$$1, 1, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 10, 35, 40, 40, \ldots$$
$$10, 5, 4, 4, 1, 0, -5, -5, -5, -20, \ldots$$

sono rispettivamente monotona crescente e monotona decrescente, ma non strettamente monotone. Notare che una successione strettamente crescente è anche crescente e che una successione strettamente decrescente è anche decrescente.

- Esempio di successione definitivamente monotona

Le successioni monotone non sono mai indeterminate. Questo è stabilito nel teorema che segue

Teorema 6.1 *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione monotona crescente. Allora vale*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\,. \tag{6.15}$$

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione monotona decrescente, allora vale

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\,. \tag{6.16}$$

In particolare, una successione monotona limitata è convergente.

Dim. Falla! □

Esempio 6.7 Si consideri la progressione geometrica $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di ragione q. A seconda del valore di q, si ottengono comportamenti diversi:

1. se $q > 1$, la successione è strettamente crescente e superiormente illimitata;
2. se $q = 1$ la successione assume costantemente il valore 1;
3. se $0 < q < 1$ la successione è strettamente decrescente e infinitesima;

4. se q è negativo la successione non è più monotona, ma è comunque infinitesima per $-1 < q < 0$.

Quindi vale

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad q > 1, \\ 1 & \text{se} \quad q = 1, \\ 0 & \text{se} \quad |q| < 1, \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad q \leq -1. \end{cases}$$

- La successione che definisce e si dimostra essere monotona crescente e limitata, dunque converge

6.2.2 Esercizi

Calcolare i seguenti limiti di successioni, dove $\alpha > 0$ è un parametro reale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)!n^{n+2} - (n+1)!n^{n-1}}{n^n\big[(n-2)! + 3^n\big]}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+5)! - \ln(n!+5)}{\ln(2n^{|\alpha|} + \cos(n\pi))},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1} + 3(n+1)^{n+1}}{n^n + n!} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)! - n^n \cos n}{n^{2n} - (\operatorname{sen} n + 2)(3n)!},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n\sqrt{n+1}}{(n+1)^{1/n}(n^{n+1} + \operatorname{sen} n)},$$

dove nell'ultimo usa la formula di De Moivre-Stirling: per ogni $n \geq 1$ esiste $a_n \in]0,1[$ tale che

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^{a_n/12n}, \tag{6.17}$$

cosicché si ha

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} + o(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}).$$

Capitolo 7

Settima settimana - 8 ore

7.1 Successioni

7.1.1 Esistenza del limite e sottosuccessioni

Enunciamo ora un risultato che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una successione sia convergente. Diamo prima una definizione

Definizione 7.1 Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *di Cauchy o fondamentale* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero N tale che

$$n, m > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Osservazione 7.1 La definizione 7.1 dice che una successione è di Cauchy quando man mano che n cresce i suoi termini sono sempre più vicini tra loro. Perciò le successioni $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ **non** sono di Cauchy

Teorema 7.1 (Criterio di Cauchy) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione converga è che essa sia di Cauchy.*

Osservazione 7.2 In pratica il criterio di Cauchy dice che una successione è convergente se e solo se i suoi termini si avvicinano tra loro sempre più al crescere di n. Notare che il criterio dà una condizione intrinseca ad una successione per stabilire se essa è convergente oppure no. Solo con la definizione 6.2 di limite questo non è possibile farlo, perché per affermare che una successione è convergente la definizione fa intervenire anche il valore del limite. Invece, il fatto di essere di Cauchy per una successione coinvolge **solo** i termini della successione stessa, come è chiaro dalla definizione 7.1

Osservazione 7.3 La sufficienza del criterio di Cauchy per la convergenza di una successione equivale alla completezza. Infatti un analogo criterio che stabilisca che una successione di Cauchy a valori razionali converga ad un numero razionale non si può enunciare. Anzi, come abbiamo visto nell'esempio 6.4, con l'algoritmo di Erone è possibile costruire una successione di numeri razionali convergente (e quindi di Cauchy) a $\sqrt{2}$.

Esempio 7.1 Dimostriamo che la successione $\{\operatorname{sen} n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge: per il criterio di Cauchy, è sufficiente dimostrare che non è fondamentale, cioè non soddisfa la definizione 7.1. Grazie alle formule di addizione degli archi si ha

$$\operatorname{sen}(n+1) = \operatorname{sen} n \cos 1 + \cos n \operatorname{sen} 1\,,$$

da cui

$$\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n = \operatorname{sen} n \cos 1 + \cos n \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} n = \operatorname{sen} n(\cos 1 - 1) + \cos n \operatorname{sen} 1\,.$$

Si scelga n tale che $\operatorname{sen} n \le 0$ e $\cos n \ge 0$: basta prendere n in uno degli infiniti intervalli $[-\pi/2 + 2k\pi, 2k\pi]$, con $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$ (ad esempio, $n = [2k\pi]$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera). Si ottiene

$$|\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n| = (1-\cos 1)|\operatorname{sen} n| + \operatorname{sen} 1|\cos n| \ge C(\cos n - \operatorname{sen} n)\,,$$

dove $C = \min\{1-\cos 1, \operatorname{sen} 1\} > 0$. Si fissi $0 < \varepsilon < C$. Poiché $-\pi/2 + 2k\pi \le n \le 2k\pi$, vale

$$\begin{aligned}\cos n - \operatorname{sen} n &= \cos n - \tan(\pi/4)\operatorname{sen} n = \frac{1}{\cos(\pi/4)} \cdot \big[\cos n \cos(\pi/4) - \operatorname{sen} n \operatorname{sen}(\pi/4)\big] \\ &= \sqrt{2}\cos\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \ge \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1\,,\end{aligned}$$

essendo $-\pi/4 + 2k\pi \le n + \pi/4 \le \pi/4 + 2k\pi$. Allora per infiniti $n \in \mathbb{N}$ è verificata

$$|\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n| \ge C(\cos n - \operatorname{sen} n) \ge C > \varepsilon\,,$$

e quindi $\{\operatorname{sen} n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è una successione di Cauchy.

Sottosuccessioni

- Fai esempio di successione definita per casi e prendi alcune sottosuccessioni.

Definizione 7.2 Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si dice *sottosuccessione* di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o *successione estratta* di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ogni successione $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione strettamente crescente di numeri naturali (cioè $n_k \in \mathbb{N}$ e $n_{k+1} > n_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

- Riprendi esempio precedente costruendo $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Proposizione 7.1 *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale. Allora ha limite ℓ se e solo se ogni sua sottosuccessione ha limite ℓ.*

- Fai vedere che si usa soprattutto per non esistenza del limite. Riprendi $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Fai vedere che la successione definita da
$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+2n^3+1}}\,\mathrm{sen}(n\pi/2)$$
è indeterminata
- Fai vedere che se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e non convergente e $b_{2n} = e^{a^n}$, $b_{2n+1} = \tan(1/n+1)$, allora $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima

Teorema 7.2 (di Bolzano-Weierstrass per successioni) *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale limitata. Allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.*

- Dai un'idea di come funziona.

7.1.2 Limiti di successione e limiti di funzione

Enunciamo ora un teorema che lega limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema 7.3 *Siano f funzione reale e $x_0 \in \overline{R}$ punto di accumulazione per* $\mathrm{dom}\, f$. *Allora f ha limite $\ell \in \overline{R}$ per $x \to x_0$ se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in* $\mathrm{dom}\, f \setminus \{x_0\}$ *e convergente a x_0 si ha*
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell\,. \tag{7.1}$$

Dim. Falla! □

Osservazione 7.4 Il Teorema 7.3 indica un metodo per vedere se una funzione ha o no limite per $x \to x_0$. Fai un esempio usando $h(x) = \mathrm{sen}(1/x)$. Riprendi teorema del cambio di variabile con $g(x\,\mathrm{sen}(1/x))$ e
$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se} \quad y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad y = 0\,. \end{cases}$$

Dal Teorema 7.3 e usando il Criterio di Cauchy 7.1, si ottiene il risultato che segue che è l'analogo del Criterio di Cauchy per le funzioni.

Teorema 7.4 *Siano f funzione reale e $x_0 \in \overline{R}$ punto di accumulazione per* $\mathrm{dom}\, f$. *Allora f ha limite finito per $x \to x_0$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che se $x_1, x_2 \in \mathcal{U} \cap \mathrm{dom}\, f$, $x_1, x_2 \neq x_0$, allora*
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\,.$$

- Esempio con limite di funzione periodica a $+\infty$

7.2 Serie numeriche

1. Paradosso di Zenone: v_A velocità di Achille, v_T velocità della tartaruga, L_0 distanza iniziale percorsa da Achille nel tempo $t_0 = L_0/v_A$, $L_1 = v_T t_0$ distanza percorsa dalla Tartaruga. In generale, se la tartaruga percorre lo spazio $L_n = v_T t_{n-1}$, Achille impiega un tempo
$$t_n = L_n/v_A = (v_T/v_A)t_{n-1} = \cdots = t_0(v_T/v_A)^n$$
per percorrerlo. Allora Achille raggiunge la tartaruga nel tempo
$$\begin{aligned} T &= t_0 + t_1 + \cdots + t_n + \cdots = t_0\big[1 + v_T/v_A + (v_T/v_A)^2 + \cdots (v_T/v_A)^n + \cdots\big] \\ &= \frac{L_0/v_A}{1 - v_T/v_A} \end{aligned}$$

2. Serie come successione delle somme (o ridotte) parziali

3. Somma di una serie; serie convergenti, divergenti, indeterminate; carattere di una serie

4. Serie telescopiche:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{serie di Mengoli}\,, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\,;$$

5. Serie geometrica

6. Somma di serie convergenti

7. Prodotto di una serie per una costante

8. Dipendenza di una serie solo dalla coda della successione dei suoi termini, cioè se $\{\tilde{a}_k\}$ è ottenuta da $\{a_k\}$ modificando un numero finito di termini, le serie ad esse associate hanno lo stesso carattere

9. Resto parziale n-esimo di una serie: $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

Teorema 7.5 *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale. Allora*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Dim. Falla! □

- Se una serie non ha termine generale infinitesimo, allora non converge: o diverge o è indeterminata.

Teorema 7.6 (Criterio di Cauchy per le serie) *La serie* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N > 0$ *tale che se* $n > N$ *e* $p \geq 0$ *allora*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Dim. Falla! □

Esempio 7.2 La serie armonica. Metti in evidenza che è un esempio di serie divergente con termine generale infinitesimo, ergo il teorema 7.5 non si può invertire

7.2.1 Convergenza assoluta e serie a termini positivi

Definizione 7.3 Cosa vuol dire che una serie converge assolutamente (converge la serie dei moduli). Dai nozione di convergenza semplice (converge ma non quella dei moduli).

Teorema 7.7 *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tale che* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge assolutamente. Allora converge anche semplicemente e vale*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, .$$

Dim. Falla, mettendo in evidenza l'uso del Criterio di Cauchy. □

Il teorema non si può invertire: prendi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Allora

$$\begin{aligned} s_{2k} &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j}{j} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2j-1} \right) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j(2j-1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_{2k+1} &= \sum_{j=1}^{2k+1} \frac{(-1)^j}{j} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \\
&= s_{2k} - \frac{1}{2k+1}
\end{aligned}
$$

La convergenza di $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si ottiene dalla seguente proposizione

Proposizione 7.2 *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a termini definitivamente non negativi. Allora la serie associata è regolare.*

Dim. Falla! □

Quella di $\{s_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si ottiene da quella di $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ed il limite è lo stesso, da cui la convergenza della successione delle ridotte.

Teorema 7.8 (Criterio del confronto) *Siano $\big\{a_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\big\{b_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ successioni tali che*

$$0 \le a_k \le b_k \quad \textit{definitivamente per} \quad k \to +\infty\,.$$

Allora se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge, cooverge anche $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, e se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Esempio 7.3 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n\big[n + \operatorname{sen}(n^n)\ln n\big]}{4^n}\,.$$

Si osservi che la serie è a termini definitivamente positivi. Poiché $n + \operatorname{sen}(n^n)\ln n \le n + \ln n$, si ottiene

$$\frac{3^n\big[n + \operatorname{sen}(n^n)\ln n\big]}{4^n} \le \frac{3^n(n + \ln n)}{4^n} \le \left(\frac{9}{10}\right)^n \quad \text{definitivamente per} \quad n \to +\infty\,,$$

essendo

$$n + \ln n \le \left(\frac{6}{5}\right)^n \quad \text{definitivamente per} \quad n \to +\infty\,.$$

Dal fatto che la serie geometrica di ragione $9/10$ converge, usando il criterio del confronto si deduce la convergenza della serie in oggetto.

Teorema 7.9 (criterio di condensazione) *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di termine generale positivo e decrescente. Allora le serie*

$$\sum_n a_n \qquad \sum_n 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

Esempio 7.4 Carattere di $\sum_n nq^n$

Esempio 7.5 Studia la convergenza di

$$\sum_n \frac{\ln n}{n^\alpha}$$

confrontando con la serie armonica generalizzata. Se $\alpha > 1$, poni $\beta = (1-\alpha)/2$ e si ha

$$\frac{\ln n}{n^\beta} \to 0$$

da cui

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^\beta} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-\beta}}$$

definitivamente per $n \to +\infty$, da cui la convergenza essendo $\alpha - \beta > 1$.

7.2.2 Criteri di convergenza

- Serie armonica generalizzata
- Dai convergenza della serie
$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Teorema 7.10 (Criterio asintotico del confronto) *Siano* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *successioni definitivamente positive e tali che*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell\,.$$

Allora

1. *se* $\ell \in \mathbb{R}^{>0}$, *cioè se* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *sono asintotiche, allora* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge se e solo se* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *converge;*
2. *se* $\ell = 0$ *e* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *converge, allora* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge;*
3. *se* $\ell = +\infty$ *e* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *diverge, allora* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *diverge.*

Dim. Falla! □

Esempio 7.6 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[5]{\frac{n^4+n^3}{n^9+1}}$$

Esempio 7.7 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha} \right) .$$

Capitolo 8

Ottava settimana - 8 ore

8.1 Serie numeriche

8.1.1 Criteri di convergenza

Esempio 8.1 Sia $\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Dimostrare che se

$$\sum_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

converge, allora $a_n = 0$ per ogni n.

Teorema 8.1 (Criterio del rapporto) *Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione a termini positivi. Allora*

1. *se esiste $r < 1$ tale che*
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \textit{definitivamente per} \quad k \to +\infty\,,$$
la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge;
2. *se*
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \quad \textit{definitivamente per} \quad k \to +\infty\,,$$
la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.

Dim. Falla! □

Esempio 8.2 Introduci la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
Poiché definitivamente per $n \to +\infty$ si ha
$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{2},$$
la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dimostra che la sua somma è e^x.

Teorema 8.2 (Criterio asintotico del rapporto) *Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione a termini positivi e tale che*
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell\,.$$
Allora

1. *se $\ell < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge;*
2. *se $\ell > 1$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge;*
3. *se $\ell = 1$ nulla si può dire sulla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.*

Dim. Falla! □

Esempio 8.3 Studiamo il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n+1)^n}\,.$$
Con il criterio asintotico del rapporto si ottiene
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+3)^{n+1}} \frac{n!(2n+1)^n}{(2n)!} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^n = \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$
e quindi la serie converge.

Esempio 8.4 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}\,.$$

Con il criterio asintotico del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$$

e quindi la serie diverge.

Esempio 8.5 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!(n+1)^n}{(3n+1)!}\,.$$

Con il criterio del rapporto si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!(n+2)^{n+1}}{(3n+4)!} \frac{(3n+1)!}{(2n)!(n+1)^n} = \frac{4}{27} e < 1\,,$$

e dunque la serie converge.

- Prendi una serie di termine generale che è rapporto di polinomi in n e fai vedere che il limite del rapporto è 1.

Teorema 8.3 (Criterio della radice) *Sia* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *successione a termini non negativi. Allora*

1. *se esiste* $r < 1$ *tale che*

$$\sqrt[k]{a_k} \le r \quad \textit{definitivamente per} \quad k \to +\infty\,,$$

la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge;*

2. *se*

$$\sqrt[k]{a_k} \ge 1 \quad \textit{definitivamente per} \quad k \to +\infty\,,$$

la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *diverge.*

Dim. Falla! □

Esempio 8.6 Introduci la serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\,.$$

Studiane la convergenza assoluta della serie logaritmica per $|x|<1$. Essendo $\sqrt[n]{n}\geq 1$, si ha

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}}\leq |x|\,.$$

La somma è $\ln(1+x)$.

Teorema 8.4 (Criterio asintotico della radice) *Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione a termini non negativi e tale che*

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{a_k}=\ell\,.$$

Allora

1. *se $\ell<1$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$ converge;*

2. *se $\ell>1$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$ diverge;*

3. *se $\ell=1$ nulla si può dire sulla convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$.*

Dim. Falla! □

Esempio 8.7 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2e^{-(n+1)}\,.$$

La serie è a termini positivi. Con il criterio asintotico della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(n+1)^2e^{-(n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{2/n}e^{-(n+1)/n}=\frac{1}{e}<1\,,$$

e dunque la serie converge.

Esempio 8.8 Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{n^2} .$$

La serie è a termini positivi. Con il criterio asintotico della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{3n-1} \right)^n = \sqrt[3]{e} > 1\,,$$

e dunque la serie diverge.

- Digli che se $a_k > 0$ definitivamente per $k \to +\infty$ e

  $$\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell\,,$$

  allora anche

  $$\lim_k \sqrt[k]{a_k} = \ell\,.$$

8.1.2 Serie di Leibniz

Teorema 8.5 (Criterio di Leibniz) *Sia* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *successione a termini non negativi, decrescente e infinitesima. Allora*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

converge. Inoltre, detta S *la sua somma, si ha*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k - S \right| \leq a_{n+1}\,.$$

Esempio 8.9 Fai vedere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge semplicemente. Evidenzia che non si ha convergenza assoluta.

Esempio 8.10 Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}}\,.$$

Evidenzia che non si ha convergenza assoluta.

Esempio 8.11 Studia il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}\,.$$

Evidenzia che non si ha convergenza assoluta.

Esempio 8.12 Fai vedere che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

converge semplicemente. Evidenzia che non si ha convergenza assoluta usando il criterio del confronto asintotico.

8.1.3 Esercizi

Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n^n + n!)\big[n\tan(1/n) - \cos(\sqrt{2}/n) - \alpha/n^2\big]\,, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\,,$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{n^\beta + 1}{n^{\alpha+2}(\ln n)^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]\,, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 - n\,\mathrm{sen}(1/n)}{n^\alpha(2 + \mathrm{sen}\, n)}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \cos n^\alpha)\big[1/n - \mathrm{sen}(1/n^{2\alpha})\big]\,.$$

Svolgimento per la seconda: per $0 < \alpha \leq 1$ considera la serie di termine generale

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - a_n\,,$$

dove $a_n = (-1)^n/(n^\alpha + (-1)^n)$. Allora $\sum b_n$ converge se e solo se $\sum a_n$ converge.

Esercizi per casa

Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(\ln n + n)/n}}{2n + \arctan n^\alpha}\big[1 - n\,\mathrm{sen}(1/n^{2\alpha})\big]\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n^\alpha + n + 7}{n^\alpha - n + 1}\right)^{2n} - 1\right]\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^\alpha + |\alpha|^n)\big[1/n^\alpha - \mathrm{sen}(1/n^\alpha)\big]\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(2^{1/n^\alpha} - 1)\,.$$

8.2 Le funzioni continue

Che differenza sostanziale c'è tra la funzione segno introdotta in (3.1) e la funzione $x \mapsto |x|$, il cui grafico è ripotato in figura 2.3? La funzione segno in $x_0 = 0$ presenta un "salto", cioè un punto dove i limiti sinistro e destro esistono finiti, ma sono diversi tra loro, ed in questo caso anche diversi dal valore che la funzione assume in 0. Un punto con queste proprietà non esiste per la funzione $y = |x|$. Essa verifica sempre

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \,, \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\,,$$

cioè fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, quando x "si avvicina" ad x_0, $|x|$ tende ad assumere valori "vicini" a $|x_0|$. Diamo una definizione che descriva questa situazione.

Definizione 8.1 Siano f funzione reale di variabile reale e $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Allora f si dice *continua* in x_0 se si verifica una delle due

1. x_0 è punto isolato di $\operatorname{dom} f$;
2. x_0 è punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$ e vale
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{8.1}$$

Se f è continua in ogni punto di $\operatorname{dom} f$, allora si dice continua. Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, si indica con $\mathcal{C}^0(X)$ l'insieme delle funzioni continue in X, in simboli

$$\mathcal{C}^0(X) = \big\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ è continua in } x_0 \text{ per ogni } x_0 \in X \big\}\,. \tag{8.2}$$

Una funzione non continua si dice anche *discontinua*. In particolare, la funzione segno è discontinua in $x_0 = 0$, mentre la funzione $y = |x|$ è continua su tutta la retta reale.

Osservazione 8.1 Se consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ definita nell'insieme

$$X = \big\{0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 1\big\}\,,$$

essa risulta continua in $x_0 = 0$. La funzione $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, è continua nel suo dominio.

- Continuità delle funzioni elementari.

Si noti che, specificando gli intorni di $f(x_0)$ e x_0, una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ risulta continua in $x_0 \in X$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ : \ |x - x_0| < \delta,\ x \in X, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \tag{8.3}$$

e questo tiene conto anche del caso in cui x_0 è punto isolato di $\operatorname{dom} f$.

Esempio 8.13 Racconta che la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{se} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \, p \text{ e } q \text{ primi tra loro, } q > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è continua in 0 e in tutti i punti irrazionali, mentre è discontinua in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Esempio 8.14 Fai vedere che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \tanh(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ \alpha & \text{se} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

non è continua in 0 qualunque sia la scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Locale limitatezza di una funzione continua
- Teorema della permanenza del segno
- Continuità del valore assoluto di una funzione continua

In tutti questi risultati metti in evidenza che non occorre chiedere che x_0 sia punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Teorema 8.6 *Siano f e g funzioni reali definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in X$. Allora $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ e $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ sono continue in x_0, mentre $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ lo è a patto che $g(x_0) \neq 0$.*

Dal teorema 8.6 appena enunciato e dal fatto che l'elevamento a potenza e le funzioni costanti sono continue, discende che i polinomi e le funzioni razionali fratte sono funzioni continue.

Teorema 8.7 *Siano f e g funzioni reali di variabile reale con $g \circ f$ definita in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$, e sia $x_0 \in X$. Se*

a) g è continua in $f(x_0)$ e

b) f è continua in x_0,

allora $g \circ f$ è continua in x_0.

Dim. Fai la dimostrazione con ε-δ. □

- Fai esempi, metti in evidenza che $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ è continua.

- Metti in evidenza che il teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per la continuità di una funzione composta. Riprendi la funzione dell'esempio 8.14 e fai vedere che
$$h(x) = \begin{cases} |\tanh(1/x)| & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ 1 & \text{se} \quad x = 0\,, \end{cases}$$
è continua. h è la composizione di f (con $\alpha = 1$) con la funzione valore assoluto.

Proposizione 8.1 (teorema del cambio di variabile nei limiti) *Siano f e g funzioni reali di variabile reale con $g \circ f$ definita in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$ che ammetta $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione. Sia inoltre $y_0 \in \operatorname{dom} g$ di accumulazione per $\operatorname{dom} g$. Se*

a) g è continua in y_0 e

b) $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$,

allora
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)\,.$$

- Fai un esempio.

Proposizione 8.2 *Siano f, φ e φ_1 funzioni reali di variabile reale con $\varphi \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ definite in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$ che ammetta $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione. Supponiamo che*

a) φ e φ_1 siano continue in $y_0 \in \operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \varphi_1$;

b) $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ per $y \to y_0$;

c) $f(x) \to y_0$ per $x \to x_0$.

Allora
$$\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o[\varphi_1(f(x))] \qquad \text{per } x \to x_0\,.$$

- Scrivi lo sviluppo di $\tan(x \cos(1/x))$ per $x \to 0$.

8.2.1 Analisi dei punti di discontinuità

Ci sono diversi modi in cui una funzione può essere discontinua in un punto x_0. Analizziamo le varie situazioni che possono capitare.

1. Come osservato all'inizio della sezione, la funzione $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, definita in (3.1) e il cui grafico è riportato in figura 3.1, non è continua in $x_0 = 0$. Infatti i limiti sinistro e destro sono *finiti*, ma assumono rispettivamente valore -1 e 1, come osservato all'esempio 4.3, ed inoltre vale sgn $0 = 0$. In tal caso, cioè quando la funzione ha in x_0 limiti destro e sinistro diversi ma finiti si dice che la funzione ha in $x_0 = 0$ un *punto di salto* o *discontinuità di prima specie*.

2. Consideriamo la funzione g definita da (4.8). Anch'essa non è continua in $x_0 = 0$ ed ha limiti destro e sinistro diversi, ma quello destro non assume un valore finito: esso vale $+\infty$. In tal caso, cioè se la funzione ha in un punto x_0 uno dei due limiti destro o sinistro infinito, si dice che la funzione ha in x_0 un *punto di infinito*. Si consideri ora la funzione h definita da
$$h(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$
Non solo h non ha limite per $x \to 0$, ma si può dimostrare che non ammette neanche limite destro in $x_0 = 0$ (e di conseguenza neanche limite sinistro, essendo h pari). In questi due casi, cioè se una funzione ha un punto di infinito o almeno uno dei limiti destro e sinistro non esiste, si parla anche di *discontinuità di seconda specie*.

3. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{se} \quad x = 0, \end{cases} \tag{8.4}$$
il cui grafico è osservabile in figura 8.1, ammette limite finito ed uguale a $0 \neq f(0)$ per $x \to 0$. Essa non è continua, però possiamo *ridefinire* f in $x_0 = 0$ in modo che risulti continua, cioè introdurre una funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$
In tal caso, cioè quando siamo in presenza di una funzione φ definita in un intervallo $\mathcal{I}$ per cui in $x_0 \in \mathcal{I}$ esiste il limite di φ, ma risulta
$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \ell \neq \varphi(x_0)\,.$$
si dice che φ presenta in x_0 una *discontinuità eliminabile*. La funzione $\tilde{\varphi} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \neq x_0, \\ \ell & \text{se} \quad x = x_0, \end{cases}$$
risulta allora continua in x_0.

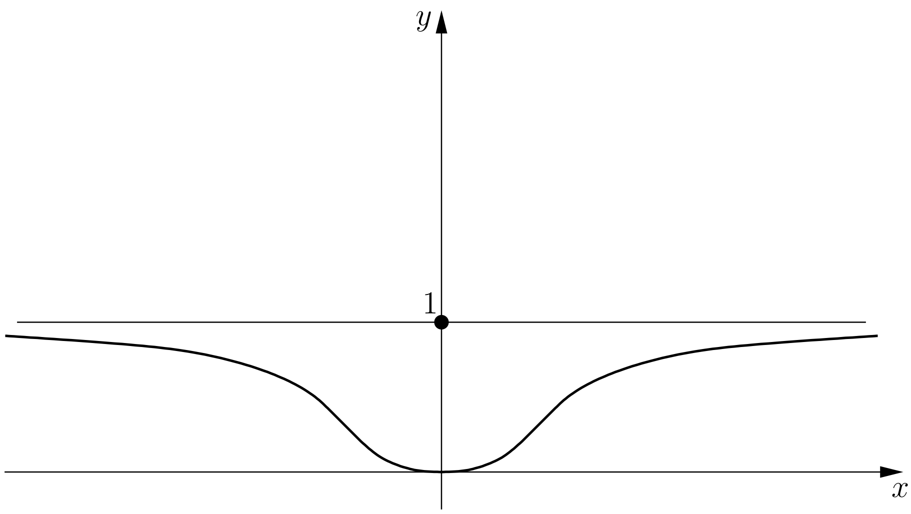


Figura 8.1: La funzione in (8.4)

C'è un altro caso, in cui una funzione non sia definita in x_0 ma abbia limite finito per $x \to x_0$. Consideriamo, ad esempio, la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \tag{8.5}$$

Essa non è definita in $x - 0 = 0$ (e quindi non si può neanche parlare di continuità in 0 per f), ma ammette limite finito ed uguale a 1 per $x \to 0$, come osservato in (4.9). Possiamo allora *prolungare per continuità* f in 0 definendo una *nuova* funzione $\tilde{f}$ data da

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0, \\ 1 & \text{se} \quad x = x_0, \end{cases}$$

che risulta continua in 0. La funzione $\tilde{f}$ così definita si dice *prolungamento per continuità di* f. Insistiamo sul fatto che quella definita è una funzione *diversa* da f, anche se ad essa legata.

8.2.2 Esercizi

Esercizio 1

Stabilire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono definite continue su tutto $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{se} \quad x \leq -1 \\ e^{x+\beta} & \text{se} \quad -1 < x < 2 \\ 2x + \alpha & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln|x - \alpha| & \text{se} \quad x \leq -1 \\ \ln(x^2 + \beta) & \text{se} \quad -1 < x \leq 3 \\ x + 2 & \text{se} \quad x > 3\,, \end{cases}$$

dove per g è da intendersi $\alpha, \beta > 0$.

Esercizio 2

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che allora $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La cosa rimane vera se f e g non sono continue?

8.2.3 Proprietà delle funzioni continue

In molti problemi è utile sapere se una funzione ammette punti di massimo o di minimo. Il Teorema di Weierstrass, che è di seguito enunciato, va incontro a questa esigenza dando una condizione sufficiente affinché una funzione abbia punti di massimo e minimo.

Teorema 8.8 (di Weierstrass) *Sia f funzione definita in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato e ivi continua. Allora f ha massimo e minimo assoluti in $[a, b]$, cioè esistono x_m e x_M in $[a, b]$ tali che*

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f(x)\,, \qquad\qquad f(x_M) = \max_{[a,b]} f(x)$$

Dim. Falla! □

- Fai controesempi con funzioni non continue o intervalli non chiusi e limitati
- Riprendi esempio dei barattoli di vernice

Consideriamo il seguente problema: supponiamo di depositare in banca un euro e di ritirare i soldi dopo tre anni: in quel momento la banca ci restituisce due euro. Ci chiediamo qual è l'interesse medio che ci è stato pagato. Riprendendo quanto fatto per ricavare la (2.12), supponendo che l'interesse pagato annualmente sia t, il capitale restituito è $\kappa(t) = (1 + t)^3$. Vogliamo trovare t per cui $\kappa(t) = 2$, cioè, posto $f(t) = \kappa(t) - 2$, vogliamo trovare $\xi \in [0, 1]$ tale che $f(\xi) = 0$. La prima domanda a cui dobbiamo rispondere è se un tale ξ esiste. Osserviamo che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 6 > 0$, cioè f assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$. Inoltre f è continua, non fa salti, e quindi è lecito supporre che se passa con continuità da un valore negativo, $f(0)$, ad uno positivo, $f(1)$, dovrà essere nulla in qualche punto. Questo è affermato dal teorema che segue.

Teorema 8.9 (di Bolzano o degli zeri) *Sia f funzione continua in un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dim. Supponiamo per semplicità che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$: l'altro caso è perfettamente analogo. La dimostrazione fa uso del metodo di bisezione. Costruiremo due successioni, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di $[a, b]$ con le seguenti proprietà:

1. $a_n \le b_n \qquad \forall\, n\,;$

2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente;
3. $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
4. $f(a_n) \le 0 \qquad \text{e} \qquad f(b_n) \ge 0 \qquad \forall\, n\,.$

Con queste proprietà risulterà che:

- essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotone e limitate esse avranno limite finito rispettivamente ℓ_a e ℓ_b;
- dalla proprietà 3 risulta $b_n - a_n \to 0$, da cui si deduce che $\ell_a = \ell_b$: chiamiamo ξ questo valore;
- dalla proprietà 4, passando al limite per $n \to +\infty$, grazie alla continuità di f e utilizzando il corollario 4.1 si deduce che devono valere contemporaneamente $f(\xi) \le 0$ e $f(\xi) \ge 0$. Quindi $f(\xi) = 0$, e il teorema è dimostrato.

Ora non resta che costruire $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con le proprietà 1-4. Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Consideriamo il punto di mezzo dell'intervallo $[a_0, b_0]$, cioè il punto $(a_0 + b_0)/2$. Valutiamo in questo punto f e cerchiamo di ricondurci ad un intervallo $[a_1, b_1]$ più piccolo di $[a_0, b_0]$ ed in esso contenuto, ma dove f goda delle stesse proprietà, cioè in sostanza verifichi che agli estremi assume valori di segno opposto, visto che se è continua in $[a_0, b_0]$ lo è anche in ogni suo sottoinsieme. Procediamo così:

i) se $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) < 0$, poniamo $a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ e $b_1 = b_0$;

ii) se $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) > 0$, poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$;

iii) se $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) = 0$, ci fermiamo perché abbiamo trovato un punto dove si annulla f.

tranne che nell'ultima ipotesi, l'intervallo i punti a_1 e b_1 soddisfano le proprietà 1-4. Ora ripartiamo dall'intervallo $[a_1, b_1]$, e ne costruiamo un altro $[a_2, b_2]$ in esso contenuto, ripetendo la costruzione ai punti *i)-iii)*. Quindi:

i) se $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, poniamo $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$;

ii) se $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$;

iii) se $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, ci fermiamo perché abbiamo trovato un punto dove si annulla f.

Di nuovo, i punti a_1 e b_1 soddisfano le proprietà 1-4. In generale, supposto di aver costruito l'intervallo $[a_n, b_n]$, con a_n e b_n che soddisfano le proprietà 1-4, l'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ si costruisce in questo modo:

i) se $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<0$, poniamo $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1}=b_n$;

ii) se $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)>0$, poniamo $a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$;

iii) se $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, ci fermiamo perché abbiamo trovato un punto dove si annulla f.

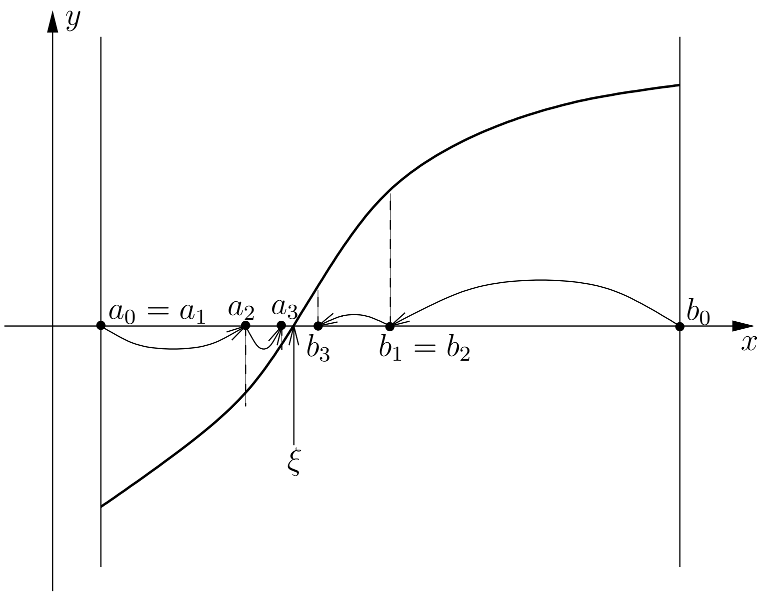


Figura 8.2: Il metodo di bisezione

Andando avanti con la costruzione (vedi figura 8.2), possono accadere due cose

- o troviamo un punto dove la funzione si annulla, e allora ci fermiamo;
- oppure costruiamo due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con le proprietà 1-4: in questo caso sappiamo come arrivare alla tesi del teorema.

Questo conclude la dimostrazione. □

Riprendiamo il problema considerato all'inizio del paragrafo. Sappiamo che $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$, con $f(t) = \kappa(t) - 2$. Allora il teorema di Bolzano ci consente di concludere che, essendo f continua in $[0, 1]$, esiste $\xi \in]0, 1[$ tale che $f(\xi) = 0$. Inoltre, tale ξ è unico perché f è strettamente crescente. Cerchiamo di calcolare un valore approssimato di ξ procedendo come nella dimostrazione del Torema di Bolzano con $[a, b] = [0, 1]$. Si ottiene

	a_n	b_n	$\dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$
$n = 0$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{8}$
$n = 1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{64}$
$n = 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{307}{512}$
$n = 3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1069}{16^3}$
$n = 4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{3385}{32^3}$
$n = 5$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{7153}{64^3}$
$n = 6$	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{33}{128}$	$-\frac{21023}{128^3}$
$n = 7$	$\frac{33}{128}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{67}{256}$	$\frac{143835}{256^3}$,

al che possiamo fermarci. Allora $a_8 = 33/128$ e $b_8 = 67/256$ forniscono un'approssimazione del tasso t a meno di $|b_8 - a_8| = 1/256$, che corrisponde ad un tasso medio intorno al 26%.

Cosa succede se f non è continua? Evidentemente un analogo del teorema 8.9 non si può enunciare. Si consideri, ad esempio, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ x + 1 & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

che non è continua in $x_0 = 0$. Non troviamo alcun numero reale ξ per cui $f(\xi) = 0$, sebbene $f(-1) = -2 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$.

Capitolo 9

Nona settimana - 8 ore

9.1 Le funzioni continue

9.1.1 Proprietà delle funzioni continue

Teorema 9.1 (dei valori intermedi) *Sia $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Allora $f(\mathcal{I})$ è un intervallo.*

Dim. Siano $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, con $x_1 < x_2$. Preso y fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$, dobbiamo dimostrare che esiste $\xi \in \mathcal{I}$ tale che $f(\xi) = y$. Per fissare le idee supponiamo che $f(x_1) < f(x_2)$: l'altro caso si tratta in modo simile. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - y$, definita sull'intervallo $[x_1, x_2]$. g è continua perché differenza di funzioni continue (f e la funzione che vale costantemente y) ed è tale che

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &= f(x_1) - y < 0\,,\\
g(x_2) &= f(x_2) - y > 0\,.
\end{aligned}
$$

Per il teorema 8.9 di Bolzano esiste $\xi \in [x_1, x_2] \subseteq \mathcal{I}$ tale che $g(\xi) = 0$. Ma allora $f(\xi) = \lambda$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Il teorema 9.1 dei valori intermedi afferma che data una funzione f continua su un intervallo, e dati due valori $f(x_1)$ e $f(x_2)$ da lei assunti, essa assume anche tutti i valori compresi fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Come per il teorema 8.9, non si può enunciare un analogo risultato per funzioni discontinue. Si consideri, ad esempio, la funzione f definita da

$$
f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - x & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}
$$

Essa in $x_0 = 0$ non è continua e non assume mai il valore $3/2$, che è compreso tra 0 e 3, valori che la funzione assume rispettivamente in $x = 1$ e $x = -1$.

Dal teorema 9.1 dei valori intermedi e usando il teorema di Weierstrass si deduce il risultato che segue.

Corollario 9.1 *Sia f funzione continua in $[a, b]$ e siano m e M rispettivamente il suo minimo ed il suo massimo. Allora per ogni $\lambda \in [m, M]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = \lambda$. In altre parole, $f([a, b]) = [m, M]$.*

Continuità delle funzioni inverse

Il risultato che segue ci permetterà di dedurre la continuità delle funzioni arcsen e arccos direttamente dalla continuità delle funzioni seno e coseno, senza passare per la definizione 8.1.

Teorema 9.2 *Siano $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ funzione continua invertibile. Allora*

1. *f è (strettamente) monotona;*
2. *la funzione inversa di f, $f^{-1} : f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$, è continua.*

- Fai esempio di funzione continua su intervalli disgiunti. Fai notare che l'inversa è discontinua, mentre la funzione diretta, che è l'inversa dell'inversa, è continua.

9.1.2 Esercizi

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\exists\, k > 0 \,:\, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \geq k|x - y|\,.$$

Stabilire quali sono vere tra le seguenti affermazioni

1. f è iniettiva
2. f è strettamente monotona
3. f è limitata
4. $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$
5. f è iniettiva ma non monotona

Esercizio 2

Si calcoli, se esiste, il limite della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$a_0 = 1\,, \qquad a_n = e^{-a_{n-1}} a_{n-1}^2 \quad n \geq 1\,.$$

Esercizio 3

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ la successione definita da

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_n = \frac{2a_{n-1}^2}{a_{n-1}+1} \quad n \geq 1\,.$$

9.2 Calcolo differenziale

9.2.1 Introduzione

Partiamo con il porre alcuni problemi, che suggeriranno un metodo per introdurre la nozione di *derivata* di una funzione.

Il problema della velocità

Consideriamo un automobilista che si muove su una strada rettilinea con legge oraria data da $s = s(t)$. Vogliamo calcolare la sua velocità $v(t_0)$ ad un istante t_0 fissato. Fissato $h \in \mathbb{R}$, possiamo calcolare una velocità media tra t_0 e $t_0 + h$ come

$$v_m[t_0](h) = \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}\,.$$

Allora

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} v_m[t_0](h) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}\,. \tag{9.1}$$

Il problema dell'approssimazione lineare

Data la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ definita da ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si vuole trovare la miglior approssimazione affine di f in x_0, cioè una funzione del tipo $a(x) = m(x - x_0) + q$ che "meglio" approssima f in x_0. Per meglio intendiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x)}{x - x_0} = 0\,, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) - a(x) = o(x - x_0)\,. \tag{9.2}$$

Deve essere $a(x_0) = f(x_0)$ e quindi m deve soddisfare

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2x_0)}{x - x_0} &\underset{h = x - x_0}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2(x_0+h)) - \operatorname{sen}(2x_0)}{h} \\ &= 2\cos(2x_0) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Dunque

$$a(x) = 2\cos(2x_0)(x - x_0) + \operatorname{sen}(2x_0)\,.$$

Il problema del calcolo della retta tangente

Vogliamo calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2$ in un punto x_0. La generica retta seccante passante per $(x_0, f(x_0))$ ha equazione (vedi figura 9.1)

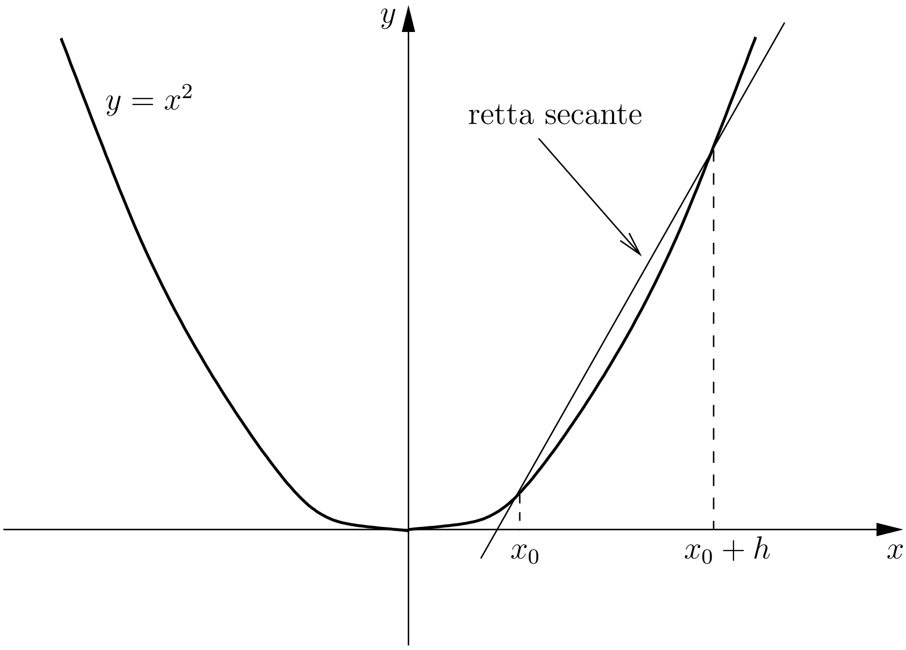


Figura 9.1: La retta in (9.4)

$$y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)\,. \tag{9.4}$$

Per trovare l'equazione della retta tangente facciamo tendere h a zero, in modo che i punti $(x_0+h, f(x_0+h))$ e $(x_0, f(x_0))$ attraverso cui passa la retta secante siano sempre più vicini. Il coefficiente angolare della retta tangente allora è dato da

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0\,, \tag{9.5}$$

e quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 è

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2\,. \tag{9.6}$$

9.2.2 La definizione di derivata

Si osservi che le formule (9.1), (9.3) e (9.5) fanno tutte intervenire le quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,, \tag{9.7}$$

che si dicono entrambe *rapporto incrementale* di f in x_0. Successivamente, sia per calcolare la velocità $v(t_0)$ in (9.1), che per calcolare la miglior approssimazione affine in (9.3) o il coefficiente angolare della retta tangente in (9.5), si passa al limite per $x \to x_0$ nella prima delle (9.7) o per $h \to 0$ nella seconda. Diamo un nome a queste quantità.

Definizione 9.1 Siano $\mathcal{I}$ intervallo di $\mathbb{R}$, x_0 un punto di $\mathcal{I}$ e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione. Se esiste, il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dice *derivata* o *derivata prima* di f in x_0 ed è indicato con una delle seguenti notazioni

$$f'(x_0)\,, \qquad Df(x_0)\,, \qquad \frac{d}{dx} f(x_0)\,, \qquad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}\,, \qquad Df(x)\Big|_{x=x_0}\,.$$

Inoltre, se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice derivabile in x_0. Se f è derivabile in ogni punto di $\mathcal{I}$, f si dice semplicemente derivabile in $\mathcal{I}$.

Dalla definizione di derivata e dalla definizione 5.1 segue che se f è derivabile in x_0 allora vale

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\,. \tag{9.8}$$

Inoltre, generalizzando il procedimento introdotto in (9.4)-(9.6) per la funzione $f(x) = x^2$ si ottiene che se $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,, \tag{9.9}$$

cioè $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Esempio 9.1 Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \end{cases} \tag{9.10}$$

e il cui grafico è riportato in figura 9.2. φ risulta essere derivabile in $x_0 = 0$ con derivata nulla. Quindi la retta tangente al grafico di φ nell'origine del sistema di riferimento cartesiano è l'asse delle ascisse.

Ora diamo alcuni esempi di calcolo di derivate.

Esempio 9.2 La derivata di una funzione costante è ovunque nulla ed è un calcolo banale. Calcoliamo invece la derivata della funzione potenza n-esima definita da $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo $n \geq 2$: se $n = 1$ si vede facilmente che $F'(x) = 1$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ dobbiamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}\,.$$

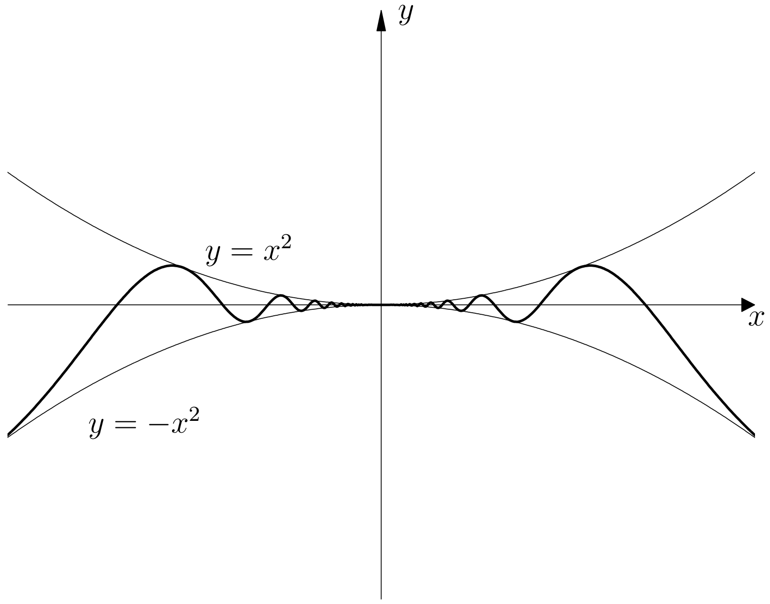


Figura 9.2: La funzione in (9.10)

Utilizziamo la formula del binomio di Newton per calcolare $(x_0+h)^n$. Si ha

$$(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} \,,$$

e ricordiamo che

$$\binom{n}{0} \doteq 1 \,, \qquad \binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!(n-k)!} \,, \quad k \le n \,.$$

Ora procediamo in questo modo:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[x_0^n + nhx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} \right] = nx_0^{n-1} \,, \end{aligned}$$

essendo, all'interno del simbolo di sommatoria, $k-1 \ge 1$, poiché l'indice k parte da 2. La formula ottenuta può essere generalizzata a qualsiasi esponente α. Si ottiene

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \,, \quad x > 0 \,. \tag{9.11}$$

Esempio 9.3 Calcoliamo la derivata della funzione coseno in un punto x_0. Otteniamo

$$\begin{aligned} D\cos(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x_0\cos h - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} h - \cos x_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\cos x_0 \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x_0 \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right] \\ &= -\operatorname{sen} x_0\,. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Si noti che vale anche

$$D\operatorname{sen} x = \cos x\,, \tag{9.13}$$

che si ricava in modo del tutto analogo alla derivata di $\cos x$.

Esempio 9.4 Calcoliamo la derivata della funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Si ottiene

$$D\exp(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}\,. \tag{9.14}$$

Inoltre si ha

$$Da^x = (\ln a)a^x\,.$$

In modo del tutto analogo si calcolano le derivate del seno e del coseno iperbolici, ottenendo

$$D\operatorname{senh} x = \cosh x\,, \qquad D\cosh x = \operatorname{senh} x\,. \tag{9.15}$$

Esempio 9.5 Dimostriamo che

$$D\ln|x| = \frac{1}{x}\,, \qquad x \neq 0\,. \tag{9.16}$$

Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln|x+h|-\ln|x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h/x)}{h} \overset{t=h/x}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}\,,$$

dove si è sfruttato il fatto che $1+h/x>0$ definitivamente per $h\to 0$.

- Fai vedere che

  $$D\log_a|x| = \frac{\log_a e}{x}$$

  sfruttando che $\log_a x = \log_a e \ln x$.

9.2.3 Prime proprietà

Il prossimo teorema stabilisce una relazione tra derivabilità e continuità.

Teorema 9.3 *Siano $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in $x_0 \in \mathcal{I}$. Allora f è continua in x_0.*

Dim. Dalla (9.8) segue che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$
e dunque f è continua in x_0. □

Il teorema appena enunciato non si può invertire, cioè non è vero che se una funzione f definita in un intervallo $\mathcal{I}$ è continua in $x_0 \in \mathcal{I}$, allora in x_0 è anche derivabile. Si consideri ad esempio la funzione $x \mapsto |x|$. Essa è continua in $x_0 = 0$, ma soddisfa
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1\,, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1\,, \tag{9.17}$$
e dunque in $x_0 = 0$ non è derivabile, poiché il limite del rapporto incrementale in $x_0 = 0$ non esiste. In generale una funzione continua su tutto l'asse reale non è detto sia derivabile in qualche punto: esistono funzioni continue su $\mathbb{R}$ ma non derivabili in alcun punto.

- Metti in evidenza che il teorema dice qualcosa sulla continuità della funzione nel punto di derivabilità, non in altri punti. Fai esempio con
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Derivate destra e sinistra

Consideriamo la funzione $x \mapsto |x|$. Essa soddisfa (9.17).

Definizione 9.2 Siano $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione e $x_0 \in \mathcal{I}$. Se esiste finito, il limite
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
si dice *derivata destra* di f in x_0 ed è indicato con $f'_+(x_0)$ o $D^+f(x_0)$. Inoltre f si dice *derivabile da destra* in x_0.
Se esiste finito, il limite
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
si dice *derivata sinistra* di f in x_0 ed è indicato con $f'_-(x_0)$ o $D^-f(x_0)$. Inoltre f si dice *derivabile da sinistra* in x_0.

- Metti in evidenza che se f è derivabil ein x_0 da destra (risp. da sinistra) allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad (\text{risp.} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

Dalle definizioni di derivata destra e sinistra, usando il teorema 4.2, si dimostra la seguente proposizione.

Teorema 9.4 *Una funzione $f\ :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0\in]a,b[$ se e solo se in x_0 è derivabile da destra e da sinistra e $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. In tal caso $f'(x_0)$ coincide con il valore assunto dalle derivate destra e sinistra.*

- Fai esempio prendendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se} \quad x \geq 0\,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

9.2.4 Teoremi sul calcolo delle derivate

Teorema 9.5 *Siano $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{R}$ intervallo e $f,g:\mathcal{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ funzioni derivabili in $x_0\in\mathcal{I}$. Allora sono derivabili anche $f+g$, $f\cdot g$ e, se $g(x_0)\neq 0$, f/g e valgono*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \tag{9.18}$$

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)\,, \tag{9.19}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}\,. \tag{9.20}$$

Dim. La (9.18) discende subito dalla (5.2) una volta osservato che

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\,.$$

Passiamo a dimostrare la (9.19), calcolando il limite del rapporto incrementale di $f\cdot g$ in x_0. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0}\left[g(x_0+h)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] \\
&\quad = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)\,,
\end{aligned}$$

essendo f e g derivabili (e quindi anche continue) in x_0. Dimostriamo ora la (9.20). Osserviamo che poiché g è derivabile in x_0, ivi è anche continua, ed essendo $g(x_0) \neq 0$, per il teorema 4.3 si ha che $g(x_0+h) \neq 0$ per $|h|$ sufficientemente piccolo. Siamo così in grado di calcolare il limite del rapporto incrementale di f/g. Si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(f/g)(x_0+h) - (f/g)(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h)g(x_0) - g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}\right] \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - g(x_0+h)f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}\right] \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left[g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] \\
&\quad = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)},
\end{aligned}
$$

essendo, come sopra, f e g derivabili (e quindi anche continue) in x_0. □

Osservazione 9.1 Fai notare che $D(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g'$.

Corollario 9.2 *Siano $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in $x_0 \in \mathcal{I}$ con $g(x_0) \neq 0$. Allora la funzione $1/g$ è derivabile in x_0 e vale*

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{9.21}$$

Dim. La (9.21) segue subito dalla (9.20) con f funzione che vale identicamente 1. □

Esempio 9.6 Usando il teorema 9.5, calcoliamo le derivate di $x \mapsto \operatorname{sen} x + \ln(1+x)$ e $x \mapsto (\operatorname{sen} x)\cdot \ln(1+x)$. Si ottiene

$$
\begin{aligned}
D\big(\operatorname{sen} x + \ln(1+x)\big) &= D\operatorname{sen} x + D\ln(1+x) = \cos x + \frac{1}{1+x}, \\
D\big[(\operatorname{sen} x)\cdot \ln(1+x)\big] &= \ln(1+x)\cdot D\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)\cdot D\ln(1+x) \\
&= \ln(1+x)\cdot \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{1+x}.
\end{aligned}
$$

Esempio 9.7 Utilizzando (9.20) calcoliamo la derivata delle funzioni tangente e cotangente. Per la tangente, per $x \neq (\pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ottiene

$$\begin{aligned} D\tan x = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x \cdot D\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Per la cotangente, per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, otteniamo

$$\begin{aligned} D\cot x = D\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) &= \frac{\operatorname{sen} x \cdot D\cos x - \cos x \cdot D\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \cot^2 x\,. \end{aligned} \tag{9.23}$$

- Derivate di tanh e coth

Teorema 9.6 *Sia f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$ continua, invertibile e derivabile in $x_0 \in \mathcal{I}$, con $f'(x_0) \neq 0$. Allora $f^{-1} : \operatorname{im} f \to \mathbb{R}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale*

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}\,. \tag{9.24}$$

Esempio 9.8 Utilizzando la (9.24), calcoliamo la derivata della funzione arcoseno. Il teorema 9.6 dice che per calcolare la derivata dell'arcoseno in un punto $y \in [-1, 1]$, se $\operatorname{sen} x = y$, deve essere $D\operatorname{sen} x = \cos x \neq 0$, da cui $x \neq \pm\pi/2$ e dunque $y \neq \pm 1$. A questo punto procediamo, tenendo conto che $\operatorname{arcsen} y \in [-\pi/2, \pi/2]$, e quindi $\cos(\operatorname{arcsen} y) \geq 0$.

$$\begin{aligned} D\operatorname{arcsen} y &= \frac{1}{D\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Utilizzando la (9.24), calcoliamo le derivate delle funzioni arcocoseno e arcotangente. Per calcolare la derivata della funzione arcocoseno in un punto $y \in [-1, 1]$, se $\cos x = y$, deve essere $D\cos x = -\operatorname{sen} x \neq 0$, da cui $x \neq 0, \pi$ e dunque $y \neq \pm 1$. Tenendo conto che $\arccos y \in [0, \pi]$ e quindi $\operatorname{sen}(\arccos y) \geq 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} D\arccos y &= \frac{1}{D\cos(\arccos y)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Per quanto riguarda la derivata della funzione arcotangente, osserviamo che $D\tan x = 1 + \tan^2 x \neq 0$ per ogni $x \neq (\pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e dunque grazie al teorema 9.6 la funzione arcotangente è derivabile in ogni punto del suo dominio. Si ottiene

$$D\arctan y = \frac{1}{D\tan(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}\,. \tag{9.27}$$

- Lascia da verificare che
$$D\,\mathrm{arccot}\, y = -\frac{1}{1+y^2}\,.$$

Come calcolare $D\big[\operatorname{sen}(\cos x)\big]$?

Teorema 9.7 *Siano f e g funzioni reali di variabile reale, con $g \circ f$ definita in un intervallo $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathcal{I}$ tale che f è derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale*
$$D(g\circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,. \tag{9.28}$$

Esempio 9.9 Per calcolare $D\big[\operatorname{sen}(\cos x)\big]$ utilizziamo (9.28) ottenendo

$$D\big[\operatorname{sen}(\cos x)\big] = D\operatorname{sen}(\cos x)\cdot D\cos x = \cos(\cos x)\cdot(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x\cdot\cos(\cos x)\,.$$

Calcoliamo ora $Da^x = De^{x\ln a}$. Si ottiene

$$Da^x = De^{x\ln a} = D\exp(x\ln a)\cdot Dx\ln a = e^{x\ln a}\cdot\ln a = \ln a\cdot a^x\,.$$

Esempio 9.10 RIprendi la derivata di $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$

Osservazione 9.2 La (9.28) si può estendere al caso di tre o più funzioni. Ad esempio nel caso di tre funzioni si ottiene

$$D\big[h\big(f(g(x))\big)\big] = h'\big(f(g(x))\big)\cdot f'(g(x))\cdot g'(x)\,.$$

Quindi per calcolare $De^{\cos x^2}$ si procede in questo modo:

$$De^{\cos x^2} = D\exp(\cos x^2)\cdot D\cos x^2 = D\exp(\cos x^2)\cdot D\cos(x^2)\cdot D(x^2) = e^{\cos x^2}(-\operatorname{sen} x^2)2x\,.$$

- Fai derivata di f^g, facendo anche un esempio, tipo $D(\ln x)^{\operatorname{sen} x}$.

- Fai esempi di calcolo di derivate

$$D\cos(x^3+x^2)\,,\quad D\big[\operatorname{sen}\ln(x^4+e^x)\big]\tan x$$

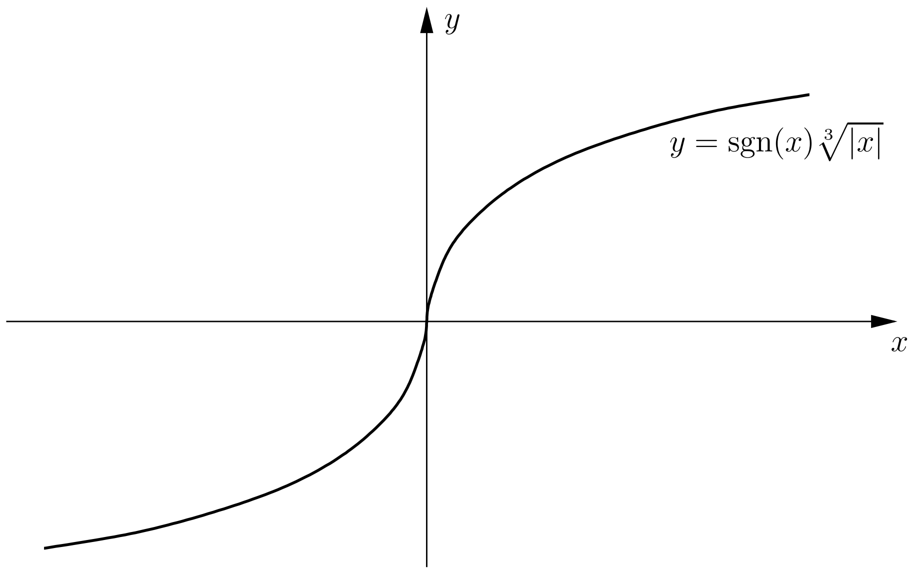


Figura 9.3: Flesso a tangente verticale

9.2.5 Punti di non derivabilità

Definizione 9.3 Se in un punto x_0 f è continua ed ammette derivate destra e sinistra di cui almeno una finita con $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, allora x_0 si dice punto angoloso per f.

- Fai esempio con $f(x) = |x|$ e $g(x) = e^{|x-1|}$.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt[3]{|x|}$, il cui grafico si può osservare in figura 9.3. Per f vale

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)\sqrt[3]{|h|}}{h} = +\infty\,.$$

Definizione 9.4 Sia $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funzione e $x_0 \in]a,b[$. x_0 si dice *flesso a tangente verticale* se f è continua in x_0 e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad -\infty\,.$$

Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sqrt{|x|}$, il cui grafico è riportato in figura 9.4. Allora g soddisfa

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty\,, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = +\infty\,.$$

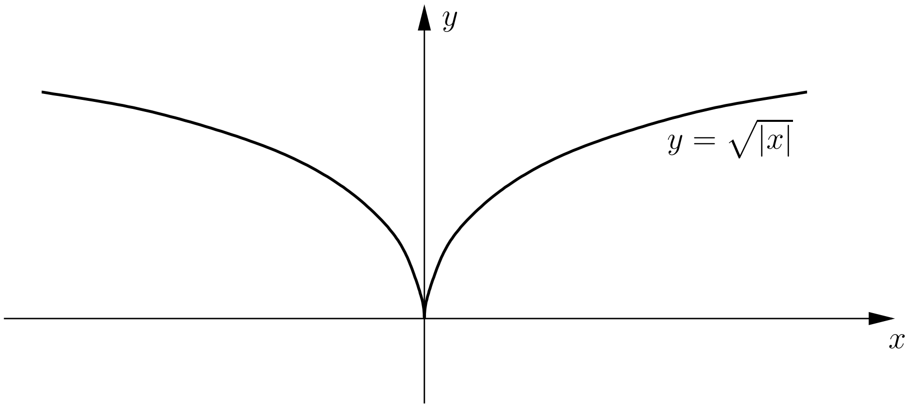


Figura 9.4: Punto di cuspide

Definizione 9.5 Sia $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funzione e $x_0 \in]a, b[$. x_0 si dice *punto di cuspide* se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$.

Altro caso. $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il cui grafico è riportato in figura 9.5

$$\psi(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases} \tag{9.29}$$

il cui grafico è riportato in figura 9.2. ψ è continua, ma non è derivabile in zero e non ammette derivata destra né sinistra. Infatti

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \cos\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x},$$

e questi limiti non esistono, come osservato al paragrafo 8.2.1. Si confronti il comportamento di questa funzione con quella in (9.10).

9.2.6 La funzione derivata e le derivate successive

Data una funzione f definita su un intervallo $\mathcal{I}$, sia $\mathcal{D}$ l'insieme dei suoi punti di derivabilità. Ha senso allora considerare la *funzione derivata di* f, f', definita da

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)\,. \end{aligned}$$

Essa è la funzione che ad ogni punto x di $\mathcal{D}$ associa il valore $f'(x)$ della derivata di f in tale punto. Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

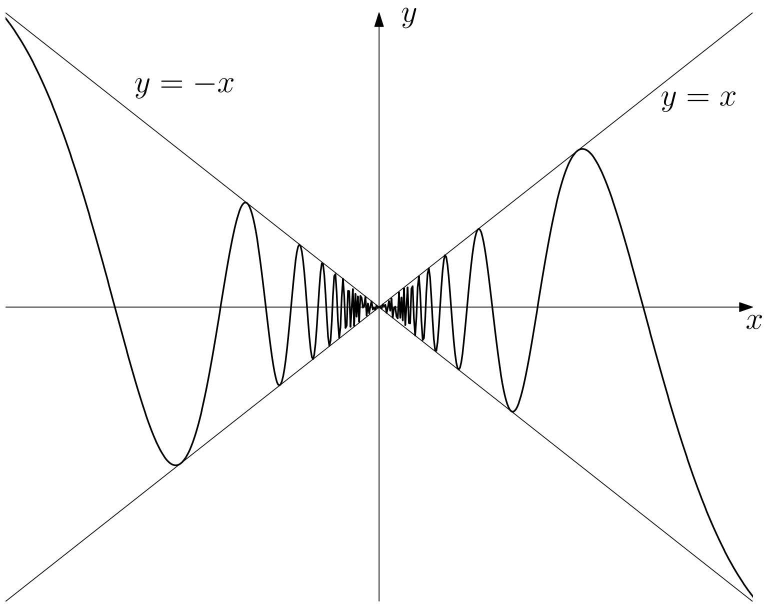


Figura 9.5: La funzione in (9.29)

Teorema 9.8 (del limite della derivata) *Siano f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$. Supponiamo che f sia continua in x_0 e derivabile nell'intervallo $\mathcal{I}$ privato al più del punto x_0. Se esiste il limite di $f'(x)$ per $x \to x_0$, allora esiste la derivata di f in x_0 e vale*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)\,.$$

In particolare, se il limite esiste finito f è derivabile in x_0.

- Fai vedere cosa succede con derivate destra e sinistra

Osservazione 9.3 Le ipotesi del teorema 9.8 affermano l'insieme $\mathcal{D}$ dei punti di derivabilità della funzione f è $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$. Dunque f' è funzione di dominio $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$ ed ha senso considerare il suo limite per $x \to x_0$.

A titolo di esempio, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) \doteq \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x > 0, \\ x+1 & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Studiamone la derivabilità in $x_0 = 0$. Si vede facilmente che f è continua in 0, e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata che vale

$$f'(x) \doteq \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x > 0, \\ 1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Inoltre risulta

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1\,.$$

Dunque il teorema 9.8 ci permette di concludere che f è derivabile in $x_0 = 0$ e che vale $f'(0) = 1$.

Osservazione 9.4 Facciamo un paio di osservazioni sul teorema 9.8 che saranno utili per non commettere grossolani errori. La prima osservazione riguarda l'ipotesi che f sia continua in $\mathcal{I}$, e dunque anche in x_0. Si noti che può esistere il limite della derivata in x_0 senza che ivi la funzione sia derivabile. Si consideri, ad esempio, la funzione segno introdotta in (3.1). Risulta $(\mathrm{sgn})'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} (\mathrm{sgn})'(x) = 0\,.$$

Cionostante la funzione segno non è continua in $x_0 = 0$ e quindi neanche derivabile. La seconda osservazione riguarda ciò che il teorema dice. Esso afferma che, nel caso f sia continua in x_0, *se* esiste finito il limite della funzione derivata di f per $x \to x_0$, *allora* f è derivabile in x_0. Quindi il teorema non dice *nulla* se il limite della derivata non esiste. Una funzione può essere derivabile in un punto del suo dominio senza che per questo esista il limite della sua derivata in tal punto. Si consideri, ad esempio, la funzione φ definita in (9.10). Abbiamo già osservato che essa è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata nulla. Se però consideriamo il

$$\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \lim_{x\to 0} \left[2x\cos(1/x) + \mathrm{sen}(1/x)\right],$$

si vede facilmente che esso non esiste.

Data una funzione f definita in un intervallo $\mathcal{I}$ e qui derivabile, ha senso chiedersi se la funzione derivata f' sia a sua volta derivabile in qualche punto.

Definizione 9.6 Sia $\mathcal{I}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile. Se f' è derivabile in x_0, cioè se esiste finito il

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}\,, \tag{9.30}$$

allora f si dice *derivabile due volte in* x_0 ed il valore del limite in (9.30) è detto *derivata seconda di* f *in* x_0 ed indicato con uno dei simboli

$$f''(x_0)\,, \qquad f^{(2)}(x_0)\,, \qquad D^2 f(x_0)\,, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\,.$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $x \mapsto \mathrm{sen}\, x$, che abbiamo osservato essere derivabile su tutta la retta reale. La sua funzione derivata $x \mapsto \cos x$ è a sua volta derivabile in ogni punto reale x_0 con derivata che vale $-\mathrm{sen}\, x_0$. Dunque, la funzione seno è derivabile due volte in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e vale

$$D^2 \,\mathrm{sen}\, x_0 = -\mathrm{sen}\, x_0\,.$$

Il procedimento appena illustrato può essere iterato. Se una funzione f definita in un intervallo $\mathcal{I}$ è qui derivabile due volte, è possibile considerare la sua funzione derivata seconda, f'' e chiedersi se questa è a sua volta derivabile in qualche punto. Se lo è, la sua derivata si dirà *derivata terza di* f. In generale si può dare la seguente definizione.

Definizione 9.7 Sia $\mathcal{I}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile $n-1$ volte in $\mathcal{I}$. Se la sua funzione derivata $n-1$-esima, $f^{(n-1)}$ è a sua volta derivabile in $x_0 \in \mathcal{I}$, la sua derivata in tale punto si dice *derivata* n*-esima di* f *in* x_0 ed è indicata con uno dei simboli

$$f^{(n)}(x_0)\,, \qquad D^n f(x_0)\,, \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\,.$$

Se consideriamo ad esempio la funzione $x \mapsto \exp x = e^x$, dalla formula (9.14) otteniamo facilmente che

$$D^n \exp(x_0) = e^{x_0} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

L'importanza e l'uso delle derivate successive di una funzione saranno chiarite quando si parlerà di formula di Taylor.

- Derivate ennesime di seno e coseno

Proposizione 9.1 (Formula di Leibniz) *Siano* f *e* g *funzioni derivabili* n *volte in* x_0*. Allora*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}(x_0). \tag{9.31}$$

- Funzioni di classe $\mathcal{C}^n$

$$\mathcal{C}^n(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } X \text{ e } f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(X) \right\}.$$

- Funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathcal{C}^\infty(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } X \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- Fai esempi

9.2.7 Esercizi

Esercizio 1

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e f funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 0\,, \\ ax^2 + bx + c & \text{se} \quad 0 \le x < 1\,, \\ x + 1 & \text{se} \quad x > 1\,. \end{cases}$$

Dire se esistono a, b, c tali che f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Nel caso tali valori esistano, dire se la funzione f corrispondente è tale che anche f' è continua.

Esercizio 2

Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (3b-1)\operatorname{senh} x - 2(a+1)\cos 3x & \text{se} \quad -1 \le x \le 0, \\ b(x^2+x) - (a+1)\operatorname{sen}(1/x) & \text{se} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

sia derivabile. La funzione trovata è di classe $\mathcal{C}^2$?

Esercizio 3

Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha \arctan(x-1) + \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{2}}{|\beta x| + 2} & \text{se} \quad x < 1; \\ \alpha(x-1) + \arccos \dfrac{1}{x+1} & \text{se} \quad x \ge 1\,, \end{cases}$$

sia derivabile.

9.3 Proprietà delle funzioni derivabili

9.3.1 Il teorema di De L'Hôspital

Enunciamo senza dimostrare il seguente teorema.

Teorema 9.9 *Siano f e g funzioni definite su un intervallo $]a, b[$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, e ivi derivabili. Supponiamo che valgano*

a) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$;

b) $f(x), g(x) \to 0$ per $x \to a^+$, oppure $|f(x)|, |g(x)| \to +\infty$ per $x \to a^+$.

Se $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, allora $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Un analogo risultato vale nel caso si consideri il limite per $x \to b^-$.

Esempio 9.11 Calcoliamo di seguito alcuni limiti applicando il teorema 9.9 di De L'Hôspital. Ogni volta che applicheremo il teorema, lo evidenzieremo con il simbolo (H) sopra quello di uguaglianza.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\,, \tag{9.32}$$

che afferma che e^x per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine superiore a x. Possiamo fare di più.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \stackrel{(H)}{=} \cdots \stackrel{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty\,, \tag{9.33}$$

che dice che per $x \to +\infty$ e^x è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di x. Confrontiamo ora x e $\ln x$ vicino a zero. Si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = 0\,, \tag{9.34}$$

e dunque vicino a zero x tende a zero più velocemente di quanto $\ln x$ tenda a $-\infty$.

Controindicazioni

Esempio 9.12 Si supponga di dover calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(\cos x/x)}{1+(\cos x/x)}\,.$$

Cerchiamo di applicare il teorema di De L'Hôspital. Otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,,$$

che non esiste.

Esempio 9.13 Se cerchiamo di calcolare

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x^4}{x^7\ln(1+x)} \tag{9.35}$$

usando il teorema di De L'Hôspital, saremo costretti a derivare 8 volte numeratore e denominatore. Utilizzando gli sviluppi asintotici introdotti a pagina 67 si ottiene

$$1-\cos y = \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad \text{per} \quad y \to 0\,,$$

e quindi, poiché $x^4 \to 0$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} 1-\cos x^4 &= \frac{x^8}{2} + o(x^8) \\ x^7\ln(1+x) &= x^7(x+o(x)) = x^8 + o(x^8)\,, \end{aligned}$$

ed il limite in (9.35) si calcola subito

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x^4}{x^7\ln(1+x)} = \lim_{x\to0} \frac{(x^8/2)+o(x^8)}{x^8+o(x^8)} = \frac{1}{2}\,.$$

9.3.2 Massimi e minimi relativi: il teorema di Fermat

Riprendi problema di minimizzare

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad r > 0\,.$$

- Introduci teorema con un disegno facendo vedere che in un punto di massimo o di minimo il grafico di una funzione ha una tangente orizzontale. Fai vedere che questo non succede solo nei punti di massimo o minimo (assoluti).
- Definizione di estremo relativo, punto di minimo e massimo relativo o locale.
- Punti di massimo e minimo assoluti o globali.

Per risolvere questo problema, ci serviremo del teorema 9.10 di Fermat.

Teorema 9.10 (di Fermat) *Sia $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in $x_0 \in]a, b[$ e tale che abbia in x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Allora x_0 è punto stazionario per f.*

Dim. Per fissare le idee supponiamo che x_0 sia punto di massimo relativo; il caso in cui sia di minimo relativo si tratta in modo del tutto analogo. Per dimostrare il teorema, cerchiamo di ricavare delle informazioni su $f'(x_0)$ vedendo come si comportano le derivate sinistra e destra di f in x_0. Dalla definizione di punto di estremo relativo, segue che esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per $|x - x_0| < \delta$. Segue che, fissato $h \in]-\delta, 0[$, si ha

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0\,,$$

e dunque, per il teorema 4.3 della permanenza del segno si ottiene

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0\,.$$

Se invece $h \in]0, \delta[$, si ha

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0\,,$$

e dunque, ancora per il teorema 4.3 della permanenza del segno, si ottiene

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0\,.$$

Poiché f è derivabile in x_0, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Dunque x_0 non può che essere punto stazionario. $\square$

Capitolo 10

Decima settimana - 8 ore

10.1 Proprietà delle funzioni derivabili

10.1.1 Massimi e minimi relativi: il teorema di Fermat

Definizione 10.1 Sia $\mathcal{I}$ intervallo reale e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile in x_0. Se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice punto stazionario o critico per f.

Esempio 10.1 Il punto $x_0 = 1$ è stazionario per la funzione $x \mapsto (x-1)^2$, ed è l'unico punto stazionario per essa. Tutti i punti del tipo $x_k = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti stazionari per la funzione seno, che quindi ha infiniti punti stazionari.

Osservazione 10.1 Cosa succede se x_0 non è interno all'intervallo. Punti di massimo e minimo che non sono punti di derivabilità.

Osservazione 10.2 Il teorema di Fermat non si può invertire, cioè non è detto che se $f'(x_0) = 0$, allora necessariamente x_0 è punto di massimo o di minimo relativo. Si consideri ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, ma il punto $x_0 = 0$ non è di massimo né di minimo relativo per f.

- I punti di estremo cadono
  1. negli estremi dell'intervallo dove la funzione è definita
  2. nei punti stazionari interni all'intervallo di definizione
  3. punti di non derivabilità della funzione
- Risolvi il problema dei barattoli

Teorema 10.1 (di Rolle) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, con $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dim. Se f è una funzione costante, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora f non costante. Essendo continua in $[a, b]$, per il teorema 8.8 essa ha massimo e minimo e dunque esistono x_m e x_M in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f(x)\,, \qquad f(x_M) = \max_{[a,b]} f(x)\,.$$

Poiché f non è costante si ha $f(x_m) \neq f(x_M)$ e dunque $x_m \neq x_M$. Se dimostriamo che almeno uno tra x_m e x_M non cade agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, allora possiamo concludere con il teorema 9.10 di Fermat che uno dei due è un punto stazionario, come vuole la tesi del teorema, essendo f derivabile in $]a, b[$. Se sia x_m che x_M cadono agli estremi dell'intervallo, essendo $f(a) = f(b)$, e quindi $f(x_m) = f(x_M)$, contro l'ipotesi che f non è costante. □

Osservazione 10.3 Togli una per volta le ipotesi del teorema di Rolle e guarda quello che succede.

10.1.2 Teorema di Lagrange e sue conseguenze

Teorema 10.2 (di Lagrange o del valor medio) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)\,. \tag{10.1}$$

Dim. La funzione h definita da

$$h(x) = \big[f(b) - f(a)\big](x - a) - \big[f(x) - f(a)\big](b - a)$$

è continua su $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e soddisfa $h(a) = h(b) = 0$. Per il Teorema di Rolle esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$. Da questa segue (10.1). □

- Dai interpretazione geometrica.

Proposizione 10.1 *Siano $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ funzione derivabile con derivata nulla. Allora f è costante, cioè esiste $\kappa \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \kappa$ per ogni $x \in \mathcal{I}$.*

Dim. Falla! □

- Fai vedere che l'ipotesi che f sia definita in un intervallo è necessaria.

Teorema 10.3 (di Cauchy) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$g'(\xi)\big[f(b) - f(a)\big] - f'(\xi)\big[g(b) - g(a)\big] = 0\,. \tag{10.2}$$

In particolare, se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ vale

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{10.3}$$

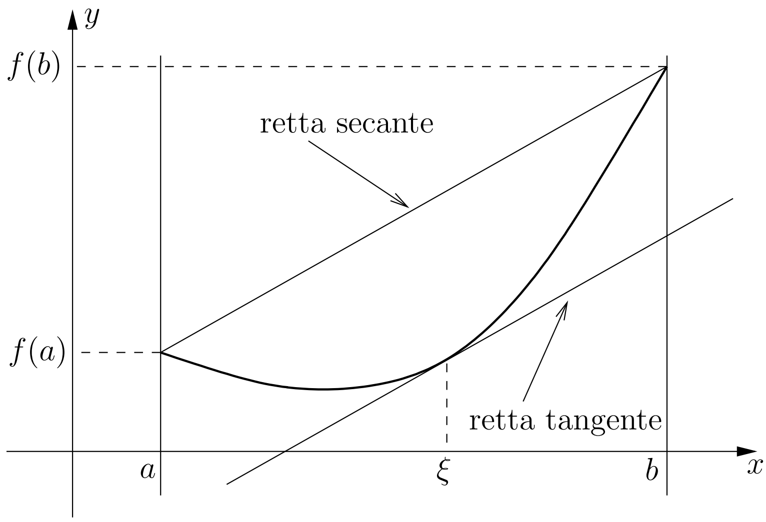


Figura 10.1: Il teorema di Lagrange

Monotonia e derivata prima

Teorema 10.4 *Siano $\mathcal{I}$ intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile. Allora f è monotona crescente (risp. decrescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) per ogni $x \in \mathcal{I}$.*

Dim. Falla! □

Teorema 10.5 *Siano $\mathcal{I}$ intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile. Se $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in \mathcal{I}$, allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

Dim. Falla, riprendendo quella del teorema precedente. □

- Metti in luce che il teorema 10.5 non si può invertire, prendendo $f(x) = x^3$.
- Metti in luce la necessità che f sia definita in un intervallo: $f(x) = 1/x$ verifica $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, ma f non è decrescente.

Esercizio

Trovare gli intervalli di monotonia della funzione f definita da

$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{x - 1}\,.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x \operatorname{sgn}(e^x-2) - |e^x-2|}{(x-1)^2} = \begin{cases} \dfrac{(x-2)e^x+2}{(x-1)^2} & \text{se} \quad x > \ln 2\,, \\ -\dfrac{(x-2)e^x+2}{(x-1)^2} & \text{se} \quad x < \ln 2\,. \end{cases}$$

Per studiare il segno di f' considera i due casi $x < \ln 2$ e $x > \ln 2$ e studia il segno di $\varphi(x) = (x-2)e^x + 2$, considerando anche la derivata $\varphi'(x) = e^x(x-1)$.

Esercizio

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2} - \ln n}$$

La serie non converge assolutamente (confronta con serie armonica). Vediamo la convergenza semplice con il criterio di Leibniz. Definiamo

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^4+2} - \ln x}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^4+2} - \ln x - (x+1)\big[2x^3/\sqrt{x^4+2} - 1/x\big]}{\big(\sqrt{x^4+2} - \ln x\big)^2} \\ &= \frac{x\sqrt{x^4+2}\big(\sqrt{x^4+2} - \ln x\big) - (x+1)\big[2x^4 - \sqrt{x^4+2}\big]}{x\sqrt{x^4+2}\big(\sqrt{x^4+2} - \ln x\big)^2} \end{aligned}$$

da cui si ottiene che per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{-x^5 + o(x^5)}{x\sqrt{x^4+2}\big(\sqrt{x^4+2} - \ln x\big)^2}$$

e quindi $f'(x) < 0$ definitivamente per $x \to +\infty$.

Proposizione 10.2 *Siano f e g funzioni reali di variabile reale, derivabili in un intervallo $[a,b]$ e tali che valga una delle due*

1. *$f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$;*

2. *oppure $f(b) \geq g(b)$ e $f'(x) \leq g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.*

Allora $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dim. Dimostriamo la proposizione nel primo caso, e quindi assumendo $f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$; la dimostrazione nel secondo caso è del tutto analoga. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a,b]$. Allora $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, e quindi h è funzione monotona crescente. Questo implica che $f(x) - g(x) = h(x) \geq h(a) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, come si voleva □

Esercizio

Dimostrare che valgono

$$\begin{aligned} e^x &\geq x+1 \qquad &\forall x \in \mathbb{R}\,, \\ e^x &\geq x^2+1 \qquad &\forall x > 0\,. \end{aligned}$$

Digli che vale

$$\ln x \leq x - 1 \quad \forall\, x > 0\,.$$

10.1.3 Convessità, concavità e derivata seconda

- Introduzione a proprietà di convessità e concavità con esempi. Prendi $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.

Definizione 10.2 f è convessa in un intervallo $\mathcal{I}$ se per ogni $\lambda \in [0,1]$ e $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ vale

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,.$$

f si dice concava se $-f$ è convessa

Il significato geometrico della definizione 10.2 è rappresentato in figura 10.2. Fissati $x_1 < x_2$, il punto

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\,, \qquad \lambda \in [0,1]\,,$$

sta nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Il punto

$$y_\lambda = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,, \qquad \lambda \in [0,1]\,,$$

è il corrispondente di x_λ sulla corda che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. La definizione 10.2 afferma che f è convessa se $y_\lambda \geq f(x_\lambda)$, cioè se la corda che unisce $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova sempre al di sopra del grafico di f, qualsiasi siano i punti x_1 e x_2.

Esempio 10.2 Funzioni convesse $f(x) = x^2$ e $f(x) = e^x$ e concave $g(x) = \ln x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

- Ci sono funzioni che sono sia convesse che concave, le rette.

Lemma 10.1 *Siano $\mathcal{I}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa se e solo se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,, \qquad \forall\, x_0, x \in \mathcal{I}\,. \tag{10.4}$$

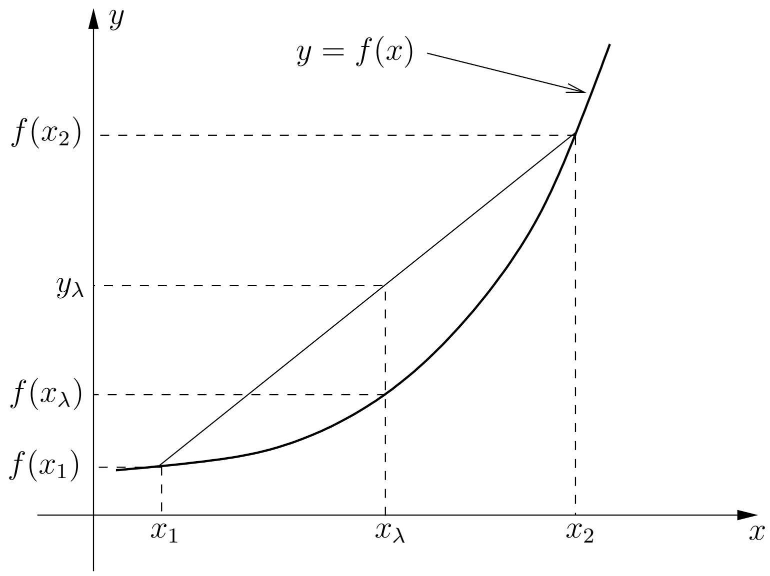


Figura 10.2: La definizione 10.2

Niente dimostrazione. Dai significato geometrico.

Lemma 10.2 *Siano $\mathcal{I}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa se e solo se f' è monotona crescente.*

Dim. Supponiamo che f sia convessa e dimostriamo che allora f' è crescente. Siano $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 < x_2$. Da (10.4) si deduce che valgono

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)\,,$$
$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)\,,$$

da cui, sommando membro a membro

$$\big[f'(x_2) - f'(x_1)\big](x_2 - x_1) \geq 0\,.$$

Allora $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, essendo $x_2 - x_1 > 0$, e quindi f' è monotona crescente
Supponiamo ora che f' sia crescente: dimostriamo che f è convessa sfruttando il lemma 10.1. Siano $x, x_0 \in \mathcal{I}$ con $x \neq x_0$. Per il teorema 10.2 di Lagrange, esiste ξ tra x e x_0 tale che

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)\,.$$

Se $x < \xi < x_0$, per la monotonia di f' si ha $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ e quindi si deduce (10.4) essendo $x - x_0 < 0$. Se $x_0 < \xi < x$, sempre per la monotonia di f' si ha $f'(x_0) \leq f'(\xi)$, e quindi ancora si deduce (10.4) perché in questo caso $x - x_0 > 0$. Dunque f è convessa. $\square$

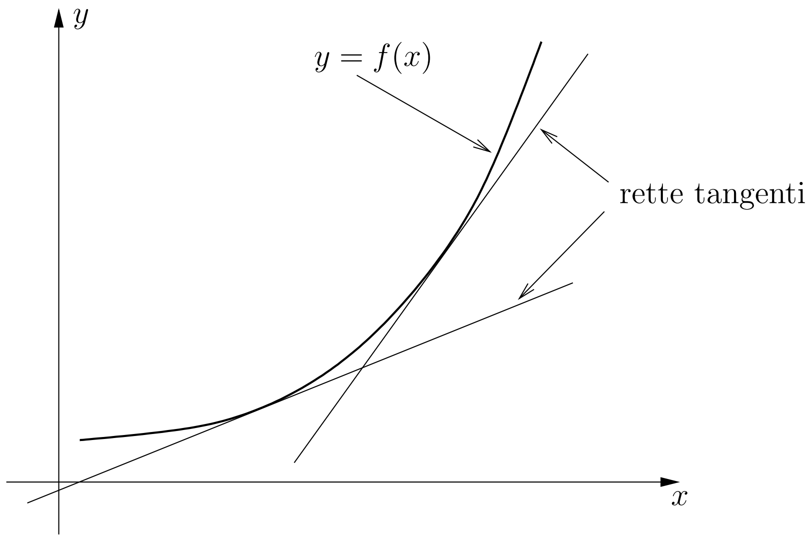


Figura 10.3: Il teorema 10.1

Teorema 10.6 *Siano $\mathcal{I}$ intervallo e $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{I}$.*

Dim. Discende dal Lemma 10.2 □

- Riprendi le disuguaglianze $e^x \geq x + 1$ e $\ln x \leq x - 1$ sfruttando convessità e concavità di exp e ln.

- Introduci i punti di flesso con qualche esempio, tipo $f(x) = x^3$ e/o la funzione coseno.

Definizione 10.3 Sia f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$ e ivi continua. Sia x_0 punto interno ad $\mathcal{I}$ tale che f è convessa (risp. concava) in un intorno sinistro di x_0 e concava (risp. convessa) in un intorno destro. Allora x_0 si dice *punto di flesso* per f. Se esiste la derivata di f in x_0 e $f'(x_0) = 0$, x_0 si dice punto di flesso *a tangente orizzontale*, mentre se $f'(x_0) = \pm\infty$, x_0 si dice punto di flesso *a tangente verticale*.

Esempio 10.3 Punti di flesso di $f(x) = x^3$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Teorema 10.7 *Sia $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua e derivabile una volta in $]a, b[$ e due volte in $x_0 \in]a, b[$. Se x_0 è punto di flesso per f, allora $f''(x_0) = 0$.*

Dim. Falla! □

Osservazione 10.4 Un punto può essere di flesso senza che lì la derivata seconda esista. Si prenda la funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x \sqrt[3]{|x|}$ considerata in figura 9.3. In $x_0 = 0$ ha un punto di flesso, ma la funzione in zero non è derivabile neanche una volta.

Osservazione 10.5 Come per il teorema 9.10 di Fermat, anche il teorema 10.7 non si può invertire, non è detto cioè che se in un punto la derivata seconda si annulla, allora necessariamente quello è un punto di flesso. Si consideri, ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4$. La funzione è convessa, eppure $f''(0) = 0$.

- Introduci studio della natura dei punti critici con la derivata seconda tramite un disegno.

Lemma 10.3 *Siano f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$ punto stazionario per f. Assumiamo che f sia derivabile due volte in x_0. Se $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$), allora x_0 è di minimo (risp. massimo) relativo per f.*

Dim. Niente dimostrazione □

10.1.4 Come studiare una funzione

Asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

10.1.5 Esercizi

Esercizio 1

Studiare la seguente funzione (trovare dominio, eventuali simmetrie e periodicità, segno, eventuali asintoti; studio di f', punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, punti di estremo relativo; studio di f'', intervalli di convessità e concavità, punti di flesso):

$$f(x) = \ln \left| e^{2x} - 4e^x \right| . \tag{10.5}$$

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{\ln 4\}$ e la funzione non presenta simmetrie. Si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\left| e^{2x} - 4e^x \right| \geq 1$, cioè se e solo se

$$e^{2x} - 4e^x \geq 1 \qquad \text{oppure} \qquad e^{2x} - 4e^x \leq -1 .$$

La prima disequazione ha per soluzioni $x \geq \ln(2 + \sqrt{5})$, la seconda $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq x \leq \ln(2 + \sqrt{3})$. Tenendo conto che f non è definita in $x = \ln 4$, se ne deduce che la funzione è

- positiva in $]\ln(2 + \sqrt{5}), +\infty[$ e in $]\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})[$;
- negativa in $]-\infty, \ln(2 - \sqrt{3})[$, in $]\ln(2 + \sqrt{3}), \ln 4[$ e in $]\ln 4, \ln(2 + \sqrt{5}[$;

- nulla in $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$ e in $x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

Riguardo agli asintoti si ha

$$\lim_{x \to \ln 4} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,,$$

da cui si deduce che la retta di equazione $x = \ln 4$ è asintoto verticale completo e che la funzione non ha asintoti orizzontali. Cerchiamo asintoti obliqui: si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2\,, && \lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0\,, \\ &\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\,, && \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \ln 4\,, \end{aligned}$$

da cui si deduce che la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ e che la retta di equazione $y = x + \ln 4$ è asintoto obliquo a $-\infty$. La derivata è

$$f'(x) = 2\frac{e^x - 2}{e^x - 4}\,,$$

che è positiva per $x < \ln 2$ o $x > \ln 4$, e quindi f è

- crescente in $]-\infty, \ln 2]$ e in $]\ln 4, +\infty[$;
- decrescente in $[\ln 2, \ln 4[$.

Se ne deduce che $x = \ln 2$ è punto di massimo relativo per f. La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{4e^x}{(e^x - 4)^2}\,,$$

che è negativa in ogni punto del dominio di f. Allora la funzione è concava in $]-\infty, \ln 4[$ e in $]\ln 4, +\infty[$. Il grafico è riportato in figura 10.4.

Esercizio 2

Studiare la seguente funzione (trovare dominio, eventuali simmetrie e periodicità, segno, eventuali asintoti; studio di f', punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, punti di estremo relativo; studio di f'', intervalli di convessità e concavità, punti di flesso):

$$f(x) = \left| \frac{x - 2}{1 + x^2} + \arctan x \right|\,. \tag{10.6}$$

Il dominio è $\mathbb{R}$ e la funzione non ha simmetrie. Posto

$$\varphi(x) = \frac{x - 2}{1 + x^2} + \arctan x\,,$$

si trova che φ ha un'unico zero $\xi \in]0, 2[$, che è l'unico zero di f. La funzione

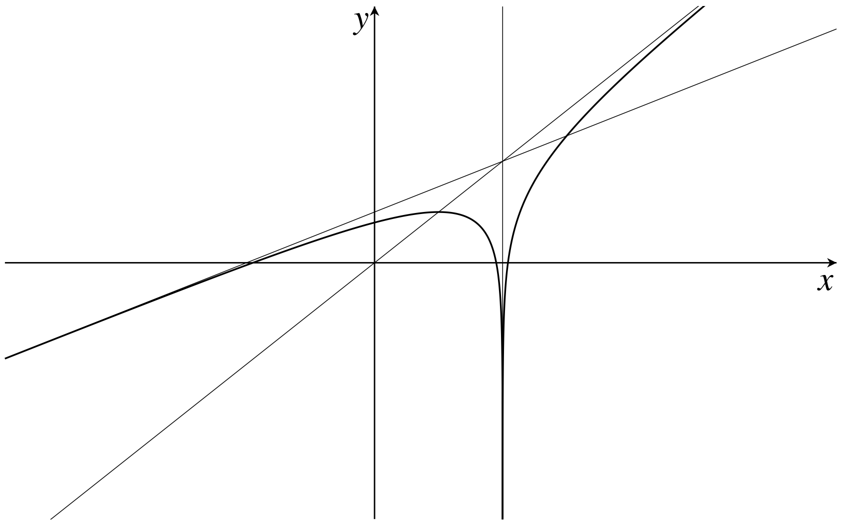


Figura 10.4: La funzione in (10.5)

- ha la retta di equazione $y = \pi/2$ come asintoto orizzontale completo;
- non ha asintoti verticali o obliqui.

La derivata è

$$f'(x) = 2 \operatorname{sgn} \varphi(x) \frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$$

e quindi f è

- crescente in $]-\infty, -1/2]$ e in $[\xi, +\infty[$;
- decrescente in $[-1/2, \xi]$.

Quindi f ha un massimo assoluto in $x = -1/2$ e un minimo assoluto in $x = \xi$. In $x = \xi$ la funzione ha un punto angoloso. La derivata seconda è

$$f''(x) = -4 \operatorname{sgn} \varphi(x) \frac{3x^2+2x-1}{(1+x^2)^3}$$

e quindi f è

- convessa in $]-\infty, -1]$ e in $[1/3, \xi]$;
- concava in $[-1, 1/3]$ e in $[\xi, +\infty[$.

Se ne deduce che f ha punti di flesso in $x = -1$, $x = 1/3$ e $x = \xi$. Il problema è stabilire che $\varphi(1/3) < 0$. Questo si fa calcolando

$$\varphi(1/3) = -\frac{3}{2} + \arctan\frac{1}{3}\,.$$

Poiché $1/3 < \sqrt{3}/3$, si ha

$$\arctan\frac{1}{3} < \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\,.$$

Il grafico è in figura 10.5.

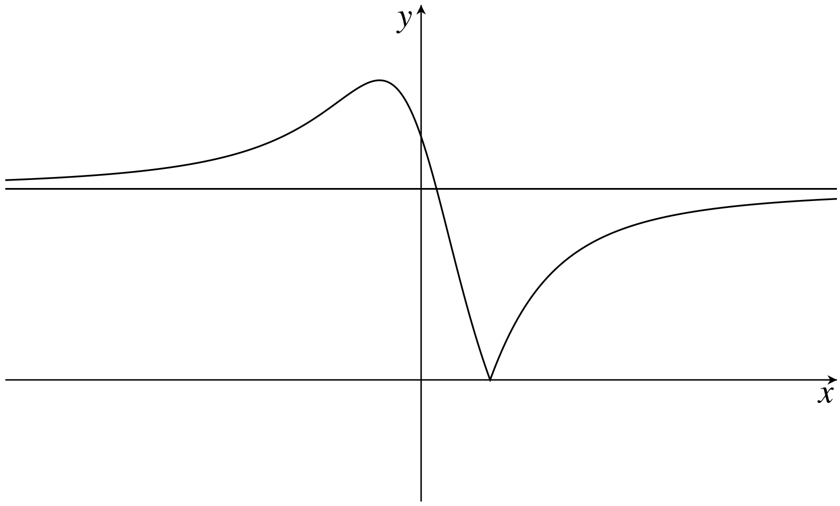


Figura 10.5: La funzione in (10.6)

Esercizi per casa

Studiare le seguenti funzioni definite da

$$f(x) = x\ln|x|\,,\qquad f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}} & \text{se} \quad x \le 1\,, \\ (x-1)^2\ln(x-1) & \text{se} \quad x > 1\,, \end{cases}\qquad f(x) = \arctan x - \arctan(1/x) - x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-4x+1}\,,\qquad f(x) = \begin{cases} xe^{\arctan(1/x)} & \text{se} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} \sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}.$$

10.2 La formula di Taylor

La formula di Taylor si inserisce nel problema più generale dell'approssimazione di funzioni con polinomi, che sono le funzioni che conosciamo con struttura più semplice. Per calcolare, ad esempio, un valore approssimato di e oppure di $\operatorname{sen} 1$ con un numero esatto di cifre decimali dopo la virgola fissato, si può cercare di approssimare le funzioni esponenziale $x \mapsto e^x$ e seno $x \mapsto \operatorname{sen} x$ tramite polinomi. Abbiamo già visto all'inizio del capitolo come trovare la miglior approssimazione affine di queste funzioni: sfruttando quanto mostrato alle (9.2) e (9.8) si trova

$$e^x = 1 + x + o(x)\,, \qquad \operatorname{sen} x = x + o(x)\,, \tag{10.7}$$

che però sono poco utili per il calcolo di e e $\operatorname{sen} 1$, per diversi motivi:

1. l'approssimazione affine potrebbe essere troppo grossolana per i nostri scopi: vogliamo un polinomio che approssimi meglio le funzioni esponenziale e seno.
2. il fatto che compaia $o(x)$, dice che le formule in (10.7) forniscono buone approssimazioni solo "vicino" a zero;
3. non sappiamo stimare l'errore non conoscendo la forma della scrittura $o(x)$ che compare in entrambe le formule;

Vediamo di affrontare il primo problema, cercando un polinomio che approssimi meglio di una funzione affine una data funzione f vicino ad un punto x_0.

10.2.1 Il polinomio di Taylor e il resto di Peano

Sia f una funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$, derivabile due volte. Poiché la funzione

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

rappresenta il polinomio di primo grado che meglio approssima f vicino a x_0, per avere una approssimazione migliore dobbiamo necessariamente ricorrere a polinomi di secondo grado. Quindi cerchiamo un polinomio T del tipo

$$T(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2$$

che approssimi bene f vicino ad x_0 in un senso che di seguito definiremo. Per determinare le costanti reale a e b che compaiono in T, consideriamo l'errore commesso nell'approssimare f con P

$$E_{a,b}(x) = f(x) - T(x) = f(x) - \left[f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2\right].$$

Cerchiamo di scegliere a e b in modo da rendere $E_{a,b}(x)$ molto piccolo quando $x \to x_0$. Affinchè almeno risulti $E_{a,b}(x) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$ deve essere

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{a,b}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a - b(x - x_0) \right],$$

che, essendo f derivabile, implica $a = f'(x_0)$. In questo modo, *indipendentemenete dalla scelta di* b, $E_{a,b}(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$. Resta ora da scegliere in modo ottimale b. Quello che possiamo cercare di chiedere è che $E_{a,b}(x) = o\big((x - x_0)^2\big)$ per $x \to x_0$, dove a questo punto a è fissato e vale $f'(x_0)$. Quindi deve essere

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{E_{a,b}(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - b \right].$$

Applicando il teorema 9.9 di De l'Hôspital alla forma indeterminata

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

si ottiene

$$b = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Si ottiene quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big), \tag{10.8}$$

che si chiama *formula di Taylor di grado o ordine* 2 *in* x_0 *con il resto di Peano.* La formula può anche essere riscritta in questo modo:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2).$$

La formula si può generalizzare nel caso in cui f sia derivabile n volte in x_0. Questo è il contenuto del teorema che segue e che non dimostriamo.

Teorema 10.8 *Sia f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$ contenente il punto x_0, derivabile $n-1$ volte in $\mathcal{I}$ e con derivata n-esima in x_0. Allora risulta*

$$f(x) = T_f^{n,x_0}(x) + o\big((x - x_0)^n\big), \qquad x \to x_0, \tag{10.9}$$

dove

$$T_f^{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{10.10}$$

è detto polinomio di Taylor (o di Mac Laurin se $x_0 = 0$) di grado o ordine n in x_0*, e la formula (10.9) è detta* formula di Taylor (o di Mac Laurin se $x_0 = 0$) di grado o ordine n in x_0 con il resto di Peano.

Osservazione 10.6 Si noti che il polinomio di Taylor T_f^{n,x_0} soddisfa

$$T_f^{n,x_0}(x_0) = f(x_0)\,, \qquad D^k T_f^{n,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,, \quad 1 \le k \le n\,, \tag{10.11}$$

ed è *l'unico* polinomio di grado n che soddisfa (10.11).

Osservazione 10.7 Di seguito forniamo gli *sviluppi di Mac Laurin* per $x \to 0$ di alcune funzioni. La loro giustificazione si ottiene dal Teorema 10.8.

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned} \tag{10.12}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned} \tag{10.13}$$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{senh}x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned} \tag{10.15}$$

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned} \tag{10.16}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned} \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned}\arctan x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned} \tag{10.18}$$

10.2.2 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x) + 1 - \cosh x}{x[\ln(1+x) + 1 - \cos x] - \operatorname{sen}^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\arctan x} + \ln((1+x)/e)}{x[1-\cos(2x)]^\alpha},$$

Esercizio 2

Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = e^{\operatorname{sen}(2x)} + \ln(1+\alpha x) - \cos(\beta x)$$

sia infinitesima del massimo ordine possibile per $x \to 0$.

Esercizio 3

Sia f funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \operatorname{senh} x + 2e^x}{x^3} = 3\,.$$

Determinare il polinomio di MacLaurin di f di ordine 3.

10.2.3 Il resto di Lagrange e la stima dell'errore

Cerchiamo ora un'espressione dell'errore commesso nel valutare f con il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 che ci permetta poi di stimare l'errore stesso, e quindi rispondere alle obiezioni 2 e 3 all'inizio della sezione. Ripartiamo dal polinomio di Taylor di ordine 2 in (10.8) e supponiamo f derivabile tre volte in $\mathcal{I}$. L'errore è dato da

$$E(x) = f(x) - T_{2,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\,. \tag{10.19}$$

Per le ipotesi fatte su f, E è derivabile tre volte in $\mathcal{I}$. Osserviamo inoltre che, grazie a (10.11), $E(x_0) = 0$. Possiamo allora valutare la quantità

$$\frac{E(x)}{(x - x_0)^3}$$

applicando il teorema 10.3 di Cauchy: troviamo un punto η_1 compreso tra x_0 e x tale che

$$\frac{E(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{1}{3} \frac{E'(\eta_1)}{(\eta_1 - x_0)^2}\,. \tag{10.20}$$

Poiché per (10.11) anche $E'(x_0) = 0$, riapplicando il teorema 10.3 di Cauchy, si trova un punto η_2 compreso tra x_0 e η_1 (e quindi anche tra x_0 e x) tale che

$$\frac{1}{3} \frac{E'(\eta_1)}{(\eta_1 - x_0)^2} = \frac{1}{3!} \frac{E''(\eta_2)}{(\eta_2 - x_0)}\,. \tag{10.21}$$

Essendo E derivabile tre volte in $\mathcal{I}$, E'' è funzione derivabile, ed inoltre $E''(x_0) = 0$, sempre grazie a (10.11). Allora, applicando il teorema 10.2 di Lagrange a E'', troviamo un punto ξ tra x_0 e η_2 (e quindi compreso anche tra x_0 e x) tale che

$$\frac{1}{3!} \frac{E''(\eta_2)}{(\eta_2 - x_0)} = \frac{E^{(3)}(\xi)}{3!}\,. \tag{10.22}$$

Mettendo assieme (10.19)-(10.22), si ottiene che esiste un punto ξ tra x_0 e x per cui vale

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3\,. \tag{10.23}$$

La formula (10.23) si dice *formula di Taylor di grado o ordine* 2 *in* x_0 *con il resto di Lagrange*, ed è generalizzata a funzioni derivabili $n + 1$ volte nel teorema che segue e che non dimostriamo

Teorema 10.9 *Sia f funzione reale definita in un intervallo $\mathcal{I}$, derivabile $n+1$ volte in $\mathcal{I}$. Allora presi due punti x_0 e x in $\mathcal{I}$ esiste un punto ξ compreso tra essi tale che*

$$f(x) = T_f^{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,, \tag{10.24}$$

dove $T_f^{n,x_0}(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n in x_0 introdotto alla (10.10). La formula (10.24) si dice formula di Taylor (o di Mac Laurin se $x = x_0$) di grado o ordine n in x_0 con il resto di Lagrange.

Il resto di Lagrange nella formula di Taylor (10.24) permette di dare un stima dell'errore che si commette nel valutare f con T_f^{n,x_0}, una volta che si conosce una stima della derivata $(n+1)$-esima di f. Torniamo ai nostri problemi di inizio capitolo che erano quelli di valutare e e $\operatorname{sen} 1$ con un numero di cifre decimali esatte dopo la virgola fissato. Partiamo con e. Fissati i punti $x_0 = 0$ e $x = 1$, il teorema 10.9 dice che troviamo $\xi \in]0, 1[$ tale che

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}.$$

Essendo $\xi \in]0, 1[$, si ha $|e^\xi| \leq e < 3$. Quindi, per ottenere un'approssimazione di e con ad esempio 6 cifre decimali esatte devo prendere n in modo che

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}.$$

Prendendo $n = 9$, si ottiene che il numero razionale

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!}$$

dá un'approssimazione di e con 6 cifre decimali esatte.

Proviamo ora a fare la stessa cosa per calcolare $\operatorname{sen} 1$ con 6 cifre decimali esatte. La formula (10.24) per la funzione seno con $x_0 = 0$ e $x = 1$ si scrive

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} \xi}{(2n+2)!},$$

con $\xi \in]0, 1[$. Poiché $|\operatorname{sen} \xi| \leq 1$, per ottenere un'approsimmazione di $\operatorname{sen} 1$ con 6 cifre decimali esatte dobbiamo scegliere n in modo che

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-6}.$$

Con $n = 4$ si ottiene già l'approssimazione cercata e dunque il numero

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$$

fornisce un'approssimazione di $\operatorname{sen} 1$ con 6 cifre decimali esatte.

10.2.4 Sviluppi in serie di potenze

Definizione 10.4 (serie di Taylor) *Siano $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte in $\mathcal{I}$ intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{I}$. Si dice che f è* sviluppabile in $\mathcal{I}$ in serie di Taylor di punto iniziale x_0 *se la serie di Taylor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

converge e vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,, \tag{10.25}$$

per ogni $x \in \mathcal{I}$.

- Non tutte le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ sono sviluppabili in serie di potenze, fai esempio di $x \mapsto e^{-1/x^2}$.
- Serie di esponenziale, seno, coseno, seno e coseno iperbolici, logaritmo naturale, arcotangente.

Esercizi per casa

1. Sia

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{8^n}{n!} & \text{se} \quad n \text{ è pari,} \\ \dfrac{7^n}{n!} & \text{se} \quad n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (= \cosh 8 + \operatorname{senh} 7 - 1)$.

2. Trovare per quale $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3. Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(12 + (-1)^n)^n}{n!} (= \cosh 13 + \operatorname{senh} 11)\,.$$

Capitolo 11

Undicesima settimana - 8 ore

11.1 Calcolo integrale - Paolo Musolino

11.1.1 Introduzione

Dalla velocità alla legge oraria

Supponiamo di guidare un veivolo che si muove con velocità $v = v(t)$ e supponiamo che v sia una funzione continua del tempo. Allora per calcolare lo spazio $s(T)$ percorso tra l'istante iniziale $t = 0$ e l'istante finale $t = T$, possiamo suddividere l'intervallo $[0, T]$ in tanti piccoli sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, con $t_0 = 0$ e $t_n = T$. Allora un valore approssimato di $s(T)$ sarà dato da

$$s(T) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \,,$$

dove $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Naturalmente, più n è grande, migliore è l'approssimazione che ottengo, per cui quando $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \to 0$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \to s(T) = \int_0^T v(t)\,dt \,.$$

Il calcolo delle aree

Cerchiamo di calcolare l'area $\mathcal{A}$ sottesa dal grafico della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$. Se prendiamo una partizione (o suddivisione) $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, si ha

$$\mathcal{A} \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\xi_i^2 \,,$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$, e

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{n} + \frac{i}{n}\right) = \frac{2i-1}{2n}\,,$$

si ottiene

$$\mathcal{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)^2}{4n^3} = \frac{4n^2-1}{12n^2}\,, \tag{11.1}$$

dove si sono usate

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ in (11.1), si ottiene che $\mathcal{A} = 1/3$.

11.1.2 L'integrale definito di Cauchy-Riemann

Definizione 11.1 *Si dice* partizione *(o* suddivisione*) di $[a,b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tale che*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

- Esempi di partizioni
- Ampiezza di una partizione

$$|\mathcal{P}| = \max\left\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\right\}.$$

Fai esempi.

Definizione 11.2 *Si dice* partizione puntata *una coppia $(\mathcal{P}, \xi)$ dove $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è una partizione di $[a,b]$ e $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ è una n-upla di numeri tali che $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per $k = 1, \dots, n$.*

- Fai esempi di partizioni puntate.

Definizione 11.3 *Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la* somma alla Cauchy*, o anche* somma puntata di f relativamente alla partizione puntata $(\mathcal{P}, \xi)$ *è il numero definito da*

$$S(f, \mathcal{P}, \xi) \doteq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,.$$

Definizione 11.4 (di integrale definito) *Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice* integrabile secondo Cauchy-Riemann *(o solamente* integrabile*) in $[a,b]$ se esiste finito il limite delle somme puntate quando l'ampiezza della partizione tende a zero, ovvero se esiste $I \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni partizione puntata $(\mathcal{P}, \xi)$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ si ha $|S(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon$. Il limite I viene chiamato* integrale definito (o integrale di Cauchy-Riemann) di *f in $[a,b]$ e si indica con i simboli*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \qquad \textit{oppure} \qquad \int_{[a,b]} f(x)\,dx\,, \qquad \textit{oppure} \qquad \int_a^b f$$

La funzione f ad argomento dell'integrale viene anche detta funzione integranda.

- La variabile di integrazione è muta
- Vale
$$\int_a^a f(t)\,dt = 0\,, \qquad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt\,,$$
l'ultima per convenzione
- Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \xi_n)\,,$$
per ogni successione di partizioni puntate $(\mathcal{P}_n, \xi_n)$ con $|\mathcal{P}_n| \to 0$.
- se f è non negativa e integrabile, allora il suo integrale è l'area del sottografico
$$\mathcal{SG}(f) \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b,\; 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$
Fai un disegno e riprendi l'esempio della parabola alla luce del punto sopra.
- Le funzioni costanti sono integrabili
- Cambiando una funzione integrabile in un numero finito di punti si ottiene ancora una funzione integrabile con integrale uguale a quello della funzione originaria. Fai la dimostrazione cambiando il valore della funzione in un punto.

11.1.3 Classi di funzioni integrabili

Proposizione 11.1 *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione limitata, allora sono equivalenti*

1. *f è integrabile secondo Cauchy-Riemann in $[a,b]$;*

2. *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni coppia di partizioni puntate* $(\mathcal{P}', \xi')$, $(\mathcal{P}'', \xi'')$ *di* $[a, b]$ *con* $|\mathcal{P}'|, |\mathcal{P}''| < \delta$ *si ha* $|S(f, \mathcal{P}', \xi') - S(f, \mathcal{P}'', \xi'')| < \varepsilon$.

- Sfruttando la Proposizione 11.1 fai vedere che la funzione di Dirichlet non è integrabile.

Dim. Non farla! □

Teorema 11.1 *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funzione monotona. Allora* f *è integrabile secondo Cauchy-Riemann.*

Dim. Niente dimostrazione, accenna solo che si usa la Proposizione 11.1. □

- Integrabilità e integrale della funzione esponenziale.

Definizione 11.5 *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice* continua a tratti *se è continua tranne eventualmente in al più un numero finito di punti dove la funzione ammette finiti i limiti sinistro e destro quando ciò ha senso.*

- Fai esempio di funzione continua a tratti

Teorema 11.2 (di integrabilità delle funzioni continue a tratti) *Se* f *è una funzione limitata in* $[a, b]$ *e continua a tratti, allora* f *è ivi integrabile secondo Cauchy-Riemann. In particolare, ogni funzione continua in* $[a, b]$ *è integrabile. Inoltre, se* $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, $k = 1, \dots, m$, *con* $\bigcup_{k=1}^m [\alpha_{k-1}, \alpha_k] = [a, b]$, *sono sottointervalli sui quali la restrizione di* f *è continua, vale la formula*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(x)\, dx\,.$$

- Fai esempio di calcolo di integrale per una funzione definita in modo diverso su intervalli disgiunti.

11.1.4 Proprietà dell'integrale

Teorema 11.3 *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funzioni integrabili. Allora:*

1. ***(linearità dell'integrale)*** $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ *è integrabile e vale*

$$\int_a^b \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx\,; \tag{11.2}$$

2. *(**proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione**) se $c \in]a,b[$, allora f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se lo è in $[a,c]$ e in $[c,b]$. Inoltre si ha*
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\,. \tag{11.3}$$
3. *(**monotonia dell'integrale**) se $f \le g$ in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b g(x)\ dx$;*
4. *$|f|$ è integrabile in $[a,b]$ e vale*
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx\,; \tag{11.4}$$
in particolare
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le (b-a)\sup_{[a,b]}|f|\,. \tag{11.5}$$

Dim. Fai quella dei punti 1 e 3, per 2 fai un disegno, per 4 supponi f continua a tratti.

1. Se $\alpha = \beta = 0$ risultato banale. Supponiamo che uno dei due non sia nullo. Fai vedere che
$$S(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \xi) = \alpha S(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta S(g, \mathcal{P}, \xi)\,,$$
e da questo deduci il risultato.

3. Ragiona su $h(x) = g(x) - f(x)$ e sul fatto che il suo integrale è il limite delle somme alla Cauchy una volta presa una successione di partizioni puntate con ampiezza infinitesima.

4. $|f|$ è integrabile perché continua a tratti, la disuguaglianza segue dalla monotonia dell'integrale. Osserva che la disuguaglianza vale anche se $b > a$.

□

Esempio 11.1 Si discuta la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{2n}^{2n+1} e^{-x^2}\ dx\,.$$
Osserviamo che la serie è a termini positivi. Inoltre, $x \mapsto e^{-x^2}$ è funzione decrescente su $\mathbb{R}^+$. Dunque
$$n\int_{2n}^{2n+1} e^{-x^2}\ dx \le ne^{-4n^2} \le e^{-3n^2} \le e^{-n} \quad \text{definitivamente per} \quad n \to +\infty\,.$$
Poiché e^{-n} è il termine generale di una serie convergente, anche la serie di partenza converge.

Teorema 11.4 (della media integrale) *Siano f integrabile in $[a,b]$, $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$. Allora*

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M\,. \tag{11.6}$$

In particolare se f è continua in $[a,b]$, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)\,. \tag{11.7}$$

Dim. Falla! □

- Fai vedere che (11.7) non è vera se f non è continua.

Osservazione 11.1 Il valore

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

si dice media integrale o valor medio di f in $[a,b]$.

11.1.5 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione 11.6 Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Una funzione $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *primitiva* o *funzione primitiva* di f (in A) se F è derivabile in A e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Esempio 11.2 Prendi $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 11.5 *Siano F e G due funzioni primitive di una stessa funzione f su un intervallo $\mathcal{I}$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$G(x) = F(x) + c\,, \qquad \forall\ x \in \mathcal{I}\,. \tag{11.8}$$

Dim. Falla, mettendo in evidenza che è fondamentale che F e G siano primitive di f su uno stesso intervallo. □

Teorema 11.6 (fondamentale del calcolo) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Se F è una qualsiasi primitiva di f in $[a,b]$, allora vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \tag{11.9}$$

detta formula fondamentale del calcolo integrale. *In definitiva, l'integrale definito di f in $[a,b]$ è uguale all'incremento che una qualunque primitiva di f subisce nel passare da a a b.*

Dim. Sia F una primitiva di f in $[a,b]$. Fissata una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$, per il teorema di Lagrange, per ogni $k = 1, \dots, n$ esiste $\xi_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ tale che

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Si ha dunque

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1})\,,$$

ovvero la differenza $F(b) - F(a)$ può essere scritta come un'opportuna somma alla Cauchy relativa alla partizione scelta $\mathcal{P}$. Per definizione di integrale, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni partizione puntata $(\mathcal{P}, \xi)$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ si ha

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Scelta $(\mathcal{P}, \xi)$ con $\xi = \{\xi_1^*, \dots, \xi_n^*\}$ e $|\mathcal{P}| < \delta$ si ottiene

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,,$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

- Notazione
$$F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b = F(x)\Big|_a^b\,.$$

Corollario 11.1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione derivabile con derivata integrabile. Allora*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,. \tag{11.10}$$

Dim. Banale! □

- Fai esempi di calcolo di integrali.
- Integrale indefinito di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ come insieme delle sue primitive
- Alla luce del teorema 11.5, se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $F : I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva, allora
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$
con $c \in \mathbb{R}$ costante di integrazione.
- Linearità dell'integrale indefinito.

11.2 Tecniche di integrazione

- Integrali immediati.

Esempi di calcolo di integrali.

$$\int e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2x^2} + \arctan\ln x\,.$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan x = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2e^x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2e^x+3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}[\ln(2e+3) - \ln 5]\,.$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}\,.$$

11.2.1 Integrazione per parti

Da

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ricava

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,,$$

e poi per l'integrale indefinito

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Calcola primitive di $\ln x$ e $x^2\cos(2x)$.

11.2.2 Integrazione per sostituzione

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ una funzione derivabile con derivata continua e tale che $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$. Se F è una primitiva di f in $[a,b]$, per la formula di derivazione della funzione composta si ha che

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Per la formula fondamentale del calcolo (11.10) si ha inoltre che

$$\int_c^d (F\circ\varphi)'(t)\,dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

perciò in definitiva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,, \tag{11.11}$$

detta *formula di integrazione per sostituzione.* Il nome della formula deriva dal fatto che l'integrale a destra si ottiene intuitivamente da quello a sinistra mediante la sostituzione $x = \varphi(t)$. Più precisamente, come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mediante il cambiamento di variabile $x = \varphi(t)$ si può tenere a mente il seguente schema:

- x viene sostituito da $\varphi(t)$,
- dx viene sostituito da $\varphi'(t)\,dt$,
- gli estremi di integrazione a e b vengono sostituiti da numeri reali c, d tali che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Se φ è inoltre invertibile si ha in particolare $c = \varphi^{-1}(a)$, $d = \varphi^{-1}(b)$ per cui (11.11) diventa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \tag{11.12}$$

Si può ottenere una formula analoga anche nel caso degli integrali indefiniti. Più precisamente, se f è una funzione continua e φ una funzione invertibile e derivabile con derivata continua, allora vale la formula di integrazione per sostituzione

$$\int f(x)\,dx = \Big[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

dove le parentesi quadre stanno a significare che la funzione al loro interno va alla fine calcolata in $t = \varphi^{-1}(x)$.

Capitolo 12

Dodicesima settimana - 8 ore

12.1 Tecniche di integrazione

Integrali immediati

Calcola

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx\,, \qquad \int \operatorname{sen}^2 x\,dx\,, \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx\,,$$
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\operatorname{sen} x}}\,dx\,, \qquad \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\,dt\,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx\,, \quad x>3.$$

Per il secondo osserva che $\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos(2x))/2$. Per il quinto moltiplica e dividi per $1-\operatorname{sen} t$. Per l'ultimo ricorda che

$$D\,\operatorname{settcosh} t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,.$$

Integrazione per parti

Calcola

$$x^2\ln x\,, \qquad x^2e^x\,, \qquad \operatorname{sen}(2x)e^{3x}\,,$$
$$x(\ln x)^2\,, \qquad x\arctan(2x)\,, \qquad \operatorname{arcsen} x\,.$$

Integrazione per sostituzione

Esempio 12.1 Calcoliamo

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx\,.$$

Poniamo $x = \cos t$. Si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{1+\cos t}\cdot \operatorname{sen} t\; dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{1+\cos t}\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\;dt = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Esempio 12.2 Calcoliamo

$$\int_{-1}^0 x \operatorname{arcsen}(x+1)\;dx\,.$$

Integrando per parti e poi ponendo $(x+1) = \cos t$ si ottiene

$$\int_0^1 x \operatorname{arcsen}(x+1)\;dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}(x+1)\,\Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \frac{(\cos t - 1)^2}{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} t\;dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 \left[\,\cos^2 t - 2\cos t + 1\right] dt\,,$$

che si calcola facilmente osservando che

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}\,.$$

Esempio 12.3 Calcoliamo

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}\,dx\,.$$

Ponendo $t = e^x$ si ottiene

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+7}\,dx = \int \frac{t}{t^2+5t+6}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{(t+2)(t+3)}\,dt$$
$$= \int \left[\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right] dt = \ln\frac{t+2}{t+3} + c$$
$$= \ln\frac{e^x+2}{e^x+3} + c\,.$$

Esempio 12.4 Calcoliamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos x + \operatorname{sen} x + 3}\,dx\,.$$

Sfruttando il fatto che

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,,$$

l'integrale si riscrive

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+2\tan(x/2)+5}\,dx\,.$$

Posto $t = \tan(x/2)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos x + \operatorname{sen} x + 3}\,dx &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{t^2+2t+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+5}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\big((t+1)/2\big)^2+1} \\
&= \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \arctan(1/2)\,.
\end{aligned}$$

12.1.1 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Procedi per esempi, e ricorda sempre che puoi ricondurti al caso in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.

Esempio 12.5 Calcoliamo

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Osserviamo che

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+((2\sqrt{3}x+\sqrt{3})/3)^2}\,dx \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{2\sqrt{3}/3}{1+((2\sqrt{3}x+\sqrt{3})/3)^2}\,dx \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{3}\frac{2x+1}{3}\right) + c\,.
\end{aligned}$$

Esempio 12.6 Calcoliamo

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx\,.$$

Osserviamo che
$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1\,.$$
Si ottiene
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+5}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + c\,.\end{aligned}$$

Esempio 12.7 Calcoliamo
$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6}\,dx\,.$$
Il polinomio di secondo grado al denominatore ha radici 2 e 3. Cerchiamo A e B reali tali che
$$\frac{3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\,.$$
Deve essere
$$\frac{(A+B)x - 3A - 2B}{x^2-5x+6} = \frac{3x+2}{x^2-5x+6}\,,$$
e dunque
$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A + 2B = -2\,. \end{cases}$$
Risolvendo il sistema si trova $A = -8$ e $B = 11$. Ergo
$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \left[\frac{11}{x-3} - \frac{8}{x-2}\right]\,dx \\ &= 11\ln|x-3| - 8\ln|x-2| + c\,.\end{aligned}$$

Esempio 12.8 Calcoliamo
$$\int \frac{x^4+1}{x^3+8}\,dx\,.$$
Dividendo il polinomio x^4+1 per x^3+8, si ottiene
$$\frac{x^4+1}{x^3+8} = x - \frac{8x-1}{x^3+8}\,.$$
Il polinomio x^3+8 ha -2 come radice e quindi
$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2-2x+4)\,.$$

Allora cerchiamo una decomposizione della frazione algebrica $(8x-1)/(x^3+8)$ come

$$\frac{8x-1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}\,,$$

con A, B e C costanti reali. Deve essere

$$\frac{(A+B)x^2+(C-2A+2B)x+4A+2C}{x^3+8} = \frac{8x-1}{x^3+8}\,,$$

da cui si ottiene il sistema di primo grado nelle incognite A, B e C

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A+2B=8 \\ 4A+2C=-1\,. \end{cases}$$

Risolvendolo si ricava $A=-17/12$, $B=17/12$ e $C=7/3$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+1}{x^3+8}\,dx &= \int \left[x + \frac{17}{12}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{17x+28}{x^2-2x+4}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{12}\int \frac{17x+28}{x^2-2x+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{12}\ln|x+2| - \frac{17}{24}\int \frac{2x-2+90/17}{x^2-2x+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 = \frac{17}{12}\ln|x+2| - \frac{17}{24}\ln(x^2-2x+4) - \frac{15}{4}\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{12}\ln|x+2| - \frac{17}{24}\ln(x^2-2x+4) - \frac{15}{4}\int \frac{1}{3+(x-1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{12}\ln|x+2| - \frac{17}{24}\ln(x^2-2x+4) - \frac{5\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c\,.
\end{aligned}$$

Esempio 12.9 Calcoliamo

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx\,.$$

Si decompone

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(C-2A)x+A-B+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

e poi si procede di conseguenza imponendo

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=1/2 \end{cases}$$

da cui
$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{|x-1|} - \frac{1}{2(x-1)}\,.$$

Esempio 12.10 Calcoliamo
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$
Si osservi che
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\,,\end{aligned}$$
da cui si ricava
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right]\,.$$

Esempio 12.11 Calcoliamo
$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\,.$$
Poiché
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= \frac{x}{x^2+2x+5} + \int \frac{2x^2+2x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{x^2+2x+5} + \int \frac{2x^2+4x+10-2x-10}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{x^2+2x+5} + 2\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx+\\ &\quad - 8\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\,,\end{aligned}$$
da cui si ricava
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx &= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+2x+5} + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx\right]\,.\end{aligned}$$
Per l'ultimo integrale
$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} = \int \frac{1}{4+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\big[(x+1)/2\big] + c\,,$$

e quindi

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{2}\arctan\big[(x+1)/2\big]\right] + c\,.$$

12.1.2 Integrali riconducibili a integrali di funzioni razionali fratte

Esempio 12.12 Calcoliamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\;dx\,.$$

Utilizziamo le formule parametriche

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,,$$

e risriviamo l'integrale da calcolare come

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2(x/2)}{2\tan(x/2)+1-\tan^2(x/2)}\;dx\,.$$

Operiamo la sostituzione $t = \tan(x/2)$ e otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\;dx &= -\int_0^1 \frac{1+t^2}{t^2-2t-1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\;dt \\
&= -2\int_0^1 \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{(t-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\right]\;dt \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|\;\Bigg|_0^1 = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\,.
\end{aligned}$$

Esempio 12.13 Calcoliamo

$$\int \frac{\tan x}{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\,dx\,.$$

Poiché

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}\,,$$

posto $t = \tan x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \int \frac{t(1+t^2)}{3-t^2}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t}{3-t^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|3-t^2| + c = -\frac{1}{2}\ln|3-\arctan^2 x| + c\,.
\end{aligned}$$

Esempio 12.14 Calcoliamo
$$\int_0^{1/2} \frac{e^x}{e^{3x}-2e^x-4}\, dx\,.$$
Operiamo una sostituzione ponendo $t = e^x$. Si ottiene
$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{e^x}{e^{3x}-2e^x-4}\, dx &= \int_1^{e} \frac{1}{(t-2)(t^2+2t+2)}\, dt \\
&= \frac{1}{10}\int_1^{\sqrt{e}} \left[\frac{1}{t-2} - \frac{t+4}{t^2+2t+2}\right]\, dt \\
&= \frac{1}{10}\ln|t-2|\,\Bigg|_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{20}\int_1^{\sqrt{e}} \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\, dt - \frac{1}{20}\int_1^{\sqrt{e}} \frac{6}{1+(t+1)^2}\, dt \\
&= \frac{1}{10}\ln|t-2|\,\Bigg|_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{20}\ln(t^2+2t+2)\,\Bigg|_1^{\sqrt{e}} - \frac{3}{10}\arctan(t+1)\,\Bigg|_1^{\sqrt{e}} \\
&= \frac{1}{10}\ln(\sqrt{e}-2) - \frac{1}{20}\ln(e+2\sqrt{e}+2) + \\
&\quad + \frac{1}{20}\ln 5 - \frac{3}{10}\arctan(\sqrt{e}+1) + \frac{3}{10}\arctan 2\,.
\end{aligned}$$

Esempio 12.15 Calcoliamo
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\, dx\,.$$
Innanzitutto, operiamo la sostituzione $x = \operatorname{senh} t$. Posto $\alpha = \operatorname{settsenh} 1$, si ottiene
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\, dx &= \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}}{\operatorname{senh} t+1}\cosh t\, dt = \int_0^{\alpha} \frac{\cosh^2 t}{\operatorname{senh} t+1}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{e^t-e^{-t}+2}\, dt\,.
\end{aligned}$$

Posto $e^t = y$, cioè $t = \ln y$, si ha
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\, dx &= \frac{1}{2}\int_1^{e^\alpha} \frac{y^2+y^{-2}+2}{y-y^{-1}+2}\cdot\frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^{e^\alpha} \frac{y^4+2y^2+1}{y^2(y^2+2y-1)}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{e^\alpha} \left(1 - \frac{2y^3-3y^2-1}{y^2(y^2+2y-1)}\right)\, dy = \frac{e^\alpha-1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^{e^\alpha} \frac{2y^3-3y^2-1}{y^2(y^2+2y-1)}\,, dy\,.
\end{aligned}$$

Poiché
$$y^2(y^2+2y-1) = y^2(y+1+\sqrt{2})(y+1-\sqrt{2})\,,$$

possiamo trovare $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2y^3 - 3y^2 - 1}{y^2(y^2 + 2y - 1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y + 1 + \sqrt{2}} + \frac{D}{y + 1 - \sqrt{2}},$$

e poi l'integrale si calcola di conseguenza.

Esempio 12.16 Calcoliamo

$$\int_{-1/2}^{1} x\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}\, dx\,.$$

Operiamo la sostituzione $t^2 = (2 - x)/(x + 3)$, cosicchè

$$x = \frac{2 - 3t^2}{t^2 + 1} = -3 + \frac{5}{t^2 + 1} \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{10t}{(t^2 + 1)^2}\,.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1} x\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}\, dx &= -\int_{1}^{1/2} \left(-3 + \frac{5}{t^2+1}\right) \frac{10t^2}{(t^2+1)^2}\, dt \\ &= -30 \int_{1/2}^{1} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt + 50 \int_{1/2}^{1} \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\, dt\,.\end{aligned}$$

Vediamo il primo integrale

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot t\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\Bigg|_{1/2}^{1} + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{t^2+1}\, dt \qquad (12.1) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\Bigg|_{1/2}^{1} + \frac{1}{2}\arctan t\Bigg|_{1/2}^{1},\end{aligned}$$

e si procede. Quanto al secondo, con una integrazione per parti si trova

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\, dt &= \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} \frac{4t}{(t^2+1)^3} \cdot t\, dt \\ &= -\frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}\Bigg|_{1/2}^{1} + \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}\Bigg|_{1/2}^{1} + \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1}\right] dt\,,\end{aligned}$$

e sfruttando quanto fatto in (12.1) si conclude.

12.2 Teorema fondamentale del calcolo

Teorema 12.1 (fondamentale del calcolo integrale, seconda versione) *Sia $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile su un ogni sottointervallo $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$ e sia $d \in \mathcal{I}$ fissato. Allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_d^x f(t)\,dt \tag{12.2}$$

è continua in $\mathcal{I}$. Se inoltre f è continua in $x_0 \in \mathcal{I}$ allora la funzione integrale è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$. In particolare, se f è continua in $\mathcal{I}$ allora F una è primitiva di f in $\mathcal{I}$.

Dim. Sia x_0 un punto interno a $\mathcal{I}$ (il caso in cui x_0 coincide con uno degli eventuali estremi si tratta analogamente) e sia $[a,b]$ un sottointervallo di $\mathcal{I}$ tale che $x_0 \in]a,b[$. Per ipotesi f è limitata in $[a,b]$, e per ogni $x \in [a,b]$ si ha

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_d^x f(t)\,dt - \int_d^{x_0} f(t)\,dt \right| = \left| \int_d^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_d^{x_0} f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \le \sup_{[a,b]} |f| \cdot |x - x_0|\,.\end{aligned}$$

Facendo il limite per $x \to x_0$, per confronto otteniamo $\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, dunque F è continua in x_0. Dall'arbitrarietà di x_0 si ottiene che F è continua in $\mathcal{I}$ (con la medesima strategia si può dimostrare che F è lipschitziana su ogni intervallo $[a,b]$ contenuto in $\mathcal{I}$). Sia ora $x_0 \in \mathcal{I}$ punto di continuità di f. Dimostriamo che esiste il limite del rapporto incrementale di F in x_0 e che coincide con $f(x_0)$. Preso $x \in \mathcal{I}$, $x \neq x_0$, analogamente a sopra si ottiene

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt\,.$$

D'altronde si ha anche

$$f(x_0) = f(x_0) \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x dt = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\,,$$

quindi, supponendo $x > x_0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt \right| \\ &\le \sup_{x_0 \le t \le x} \big|f(t) - f(x_0)\big| = \sup_{x_0 < t \le x} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,.\end{aligned}$$

Nel caso in cui $x < x_0$ si ottiene analogamente

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup_{x \leq t < x_0} \left|f(t) - f(x_0)\right| .$$

In definitiva per la continuità di f in x_0, passando al limite per $x \to x_0$, per confronto si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) ,$$

perciò F è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$. □

12.2.1 Funzioni integrali

- Prendi

$$F(x) = \int_d^x f(t)\, dt$$

  e illustra cosa succede se f ha in x_0 un punto di salto: punto angoloso di F.

- Derivata di funzione integrale "composta"

$$F(x) = \int_d^{b(x)} f(t)\, dt , \qquad F(x) = \int_{\alpha(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$$

- Fai esempio di studio di funzione integrale con

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-1/t}}{\sqrt{|t|}}\, dt .$$

  Il dominio è $\mathbb{R}$ e $g(x) \geq 0$ se e solo se $|x| \geq 1$. Non ha asintoti orizzontali perché $t \mapsto e^{-1/t}/\sqrt{t}$ ha integrale divergente in $[1, +\infty[$. Per gli asintoti obliqui si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to+\infty} 2x\frac{e^{-1/x^2}}{x} = 2 , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to-\infty} -2x\frac{e^{-1/x^2}}{x} = -2 .$$

  Inoltre, se $x > 0$,

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-1/t} - 1}{\sqrt{|t|}}\, dt + \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = 2x - 2 + \int_1^{x^2} \frac{e^{-1/t} - 1}{\sqrt{|t|}}\, dt$$

  e se $x < 0$

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-1/t} - 1}{\sqrt{|t|}}\, dt + \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{-t}}\, dt = -2x + 2 + \int_1^{x^2} \frac{e^{-1/t} - 1}{\sqrt{|t|}}\, dt$$

  da cui si deduce che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2x , \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) + 2x$$

  esistono finiti perché $x \mapsto (e^{-1/x} - 1)/x$ ha integrale convergente in $[1, +\infty[$.

12.3 Integrali generalizzati

1. Problema del calcolo del potenziale elettrico in un punto: integrale su intervalli illimitati.
2. Problema dell'area sottesa da $-\ln x$ nell'intervallo $]0,1]$: funzione illimitata.
3. Perché i problemi ai punti 1 e 2 non si trattano con la definizione di integrale data: problema della definizione di somme alla Cauchy.
4. Possibili soluzioni:
   (a) Per 1, integrare su $[a,b[$ e passare al limite per $b \to +\infty$.
   (b) Per 2, integrare su $[a,1]$ con $0 < a < 1$ e passare al limite per $a \to 0^+$.

Definizione 12.1 *Sia* $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile in ogni sotto intervallo* $[c,b] \subseteq]a,b]$. *Se esiste finito il seguente limite*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

si dice che f è integrabile in senso improprio in $]a,b]$ *ed il numero*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx\,, \tag{12.3}$$

viene detto integrale generalizzato (o improprio) *di* f *in* $]a,b]$.
Analogamente, data $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *integrabile in ogni sotto intervallo* $[a,c] \subseteq [a,b[$, *se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx\,,$$

si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a,b[$ *ed il numero*

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx\,, \tag{12.4}$$

si dice integrale generalizzato (o improprio) *di* f *in* $[a,b[$.

In questo caso, come anche in quelli che verranno presentati in seguito, si parla anche di *integrale (improprio) convergente* oppure si dice che f *ha integrale (improprio) convergente*. Allo stesso modo se il limite in (12.3)-(12.4) è infinito si parlerà di *integrale (improprio) divergente* (a $+\infty$ o a $-\infty$) oppure si dirà che f *ha integrale (improprio) divergente*.

- Calcola l'integrale di $\ln x$ su $]0,1]$.

- Fai esempi: $1/\sqrt{x-1}$ su $]1,3]$, $1/(x+1)^2$ su $[-2,-1[$, $1/(x-a)^\alpha$ su $]a,a+1]$.
- Fai vedere che
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{sen}(1/x)\,dx$$
non esiste.
- Osserva che se $f;[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile, allora è integrabile anche in senso improprio e i due integrali coincidono. Fai esempio con $x\mapsto(1-\cos x)/x^2$.

Definizione 12.2 *Sia $f:]-\infty,b]\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni sotto intervallo $[c,b]\subseteq]-\infty,b]$. Se esiste finito il seguente limite*
$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,dx\,,$$
si dice che f è integrabile in maniera impropria in $]-\infty,b]$ *ed il numero*
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,dx\,, \tag{12.5}$$
viene detto integrale generalizzato (o improprio) *di f in $]-\infty,b]$.*
Analogamente, data $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni sotto intervallo $[a,c]\subseteq[a,+\infty[$, se esiste finito il limite
$$\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx\,,$$
si dice che f è integrabile in maniera impropria in $[a,+\infty[$ *ed il numero*
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx\,, \tag{12.6}$$
si dice integrale generalizzato (o improprio) *di f in $[a,+\infty[$.*

- Calcola integrale di e^x in $]-\infty,-2]$, di $1/x^\alpha$ su $[1,+\infty[$.
- Le definizioni (12.3)-(12.6) possono poi essere estese a casi più generali. Ad esempio, se $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ $(a,b\in\overline{\mathbb{R}})$ è una funzione integrabile su ogni sotto intervallo $[c,d]\subset]a,b[$, si dice che f è integrabile impropriamente in $]a,b[$ se, fissato $x_0\in]a,b[$, f è integrabile impropriamente in $]a,x_0]$ e in $[x_0,b[$, nel qual caso si pone
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx\\ &= \lim_{c\to a^+}\int_c^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{d\to b^-}\int_{x_0}^d f(x)\,dx = \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}}\int_c^d f(x)\,dx\,.\end{aligned} \tag{12.7}$$

In particolare si definisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}} \int_c^d f(x)\,dx\,. \tag{12.8}$$

Si può facilmente verificare che le definizioni non dipendono dalla scelta di x_0.

- Calcola l'integrale di $1/(1+x^2)$ e digli che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

- Fai vedere che $1/x^\alpha$ non è integrabile in $]0.+\infty[$, estendendo opportunamente la nozione di integrabilità in senso improprio.

- Attenzione:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,, \qquad f \text{ integrabile in senso improprio in } [1,+\infty[$$

sono affermazioni indipendenti l'una dall'altra.

- In generale, se $f\,:]a,b[\to\mathbb{R}$ è integrabile impropriamente in $]x_0,x_1[$, $]x_1,x_2[$,..., $]x_{n-1},x_n[$, con $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, allora si dice che f è integrabile impropriamente in $]a,b[$ e si definisce il suo integrale generalizzato come segue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx\,. \tag{12.9}$$

Fai vedere che $1/x$ non è integrabile in $[-1,1]$ in senso improprio mostrando la criticità nella definizione.

12.3.1 Assoluta integrabilità e criterio del confronto

Definizione 12.3 *Una funzione $f\,:]a,b]\to\mathbb{R}$ si dice* assolutamente integrabile in senso improprio in $]a,b]$ *se $|f|$ è integrabile in senso improprio in $]a,b]$. In questo caso si dice anche che l'*integrale improprio di f converge assolutamente *o che f* ha integrale improprio assolutamente convergente.

Analoghe definizioni possono essere date per le altre tipologie di integrali impropri. L'uso della terminologia è giustificata dal seguente teorema.

Teorema 12.2 (criterio di assoluta integrabilità) *Se $|f|$ è integrabile in senso improprio in $]a,b]$ allora f è integrabile in senso improprio in $]a,b]$, ovvero l'assoluta integrabilità in senso improprio implica l'integrabilità in senso improprio. Un risultato analogo vale per funzioni definite in $[a,b[$.*

Dim. Niente dimostrazione. $\square$

- Fai vedere che se una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ è definitivamente non negativa per $x \to b^+$, allora ha integrale improprio convergente o divergente, esattamente come per le serie a termini definitivamente positivi.

- Il teorema 12.2 non si può invertire: $\operatorname{sen} x/x$ è integrabile in senso improprio in $[1,+\infty[$, ma non è assolutamente integrabile.

Teorema 12.3 (criterio del confronto) *Siano $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$ integrabili in ogni sotto intervallo $[c,b] \subset]a,b]$ e tali che $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in]a,b]$. Allora*

1. *se g ha integrabile improprio convergente in $]a,b]$ anche f ha integrabile improprio convergente in $]a,b]$;*

2. *se f ha integrabile improprio divergente in $]a,b]$ anche g ha integrabile improprio divergente in $]a,b]$.*

Un risultato analogo vale per funzioni definite in $[a,b[$ con $b \in \overline{\mathbb{R}}$, con ovvie modifiche.

Dim. Per l'osservazione precedente gli integrali impropri di f e g convergono oppure divergono. Per ipotesi e per la monotonia dell'integrale definito, se $c \in]a,b[$ si ha

$$0 \le \int_c^b f(x)\,dx \le \int_c^b g(x)\,dx\,,$$

e passando al limite $c \to a^+$ si ottiene che

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Se dunque l'integrale di g converge, anche quello di f deve convergere. Al contrario, se l'integrale di f diverge, anche quello di g deve divergere. $\square$

- Integrabilità di $1/x^\alpha |\ln x|^\beta$ in $[2,+\infty[$ e analogia con serie.

- Integrabilità di $1/x^\alpha |\ln x|^\beta$ in $]0,1/2]$ con cambio di variabile $t = 1/x$ in modo da riportarti in $[2,+\infty[$.

- Integrabilità di $e^{\alpha x}$ in $[0,+\infty[$.

Teorema 12.4 (Criterio asintotico del confronto) *Siano* $f,g :]a,b] \to \mathbb{R}$, *con* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *integrabili su ogni sotto intervallo* $[c,b] \subset]a,b]$ *e tali che* f *sia asintotica a* g *per* $x \to a^+$. *Allora* f *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$ *se e solo se* g *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$. *Più precisamente, supposto che*

$$\lim_{x\to a^+} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}\,, \tag{12.10}$$

allora

1. *se* $\ell \in \mathbb{R}$ *e* $\ell \neq 0$, f *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$ *se e solo se* g *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$;
2. *se* $\ell = 0$ *e* g *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$ *allora anche* f *è assolutamente integrabile in senso improprio in* $]a,b]$;
3. *se* $\ell = +\infty$ *e l'integrale di* g *diverge assolutamente, anche l'integrale di* f *diverge assolutamente.*

Un risultato analogo vale nel caso di funzioni $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$, *con* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *ed integrabili su ogni sotto intervallo* $[a,c] \subset [a,b[$.

Capitolo 13

Tredicesima settimana - 8 ore

13.1 Integrali generalizzati

Esempio 13.1 Studia la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}(2+\operatorname{sen} x)}\, dx\,.$$

- L'integrabilità di f in $]a,b]$ dipende solo dal comportamento locale di f vicino ad a. Fai esempio con $1/\sqrt{x}$ in $]0,1$ e con $1/x$ in $[1,+\infty[$.

Esempio 13.2 Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali impropri

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha \ln x}\, dx\,, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t|\ln t|}{t^\alpha |t-1|^{-\alpha}}\, dt\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} x^2}{e^{4\alpha(x^2+x)}x^\alpha}\, dx\,.$$

Esempio 13.3 Trovare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x}{x^\beta(2+\operatorname{sen} x)}\, dx\,.$$

Risultato: $1 < \beta < \alpha + 1$.

13.1.1 Esercizi

Si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^5(1/x)}{\ln(x^2+1) - 2\ln x}\, dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{x^4}}{1+e^{4x^4}}\, dx\,,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(3+\operatorname{sen} x)}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}}\, dx\,, \qquad .$$

13.1.2 Esercizi per casa

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali impropri (sono tratti da un libro che ho io)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{\cosh t}}\, dt\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^7}\, dx\,,$$
$$\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^2}\, dt\,, \qquad \int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - e^5}}\, dx\,,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx\,.$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza dei seguenti integrali (sono tratti da un libro che ho io)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x \ln |x||}{|x|^\alpha + 1}\, dx\,, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x^{(2+x)/x}}{x^{3/2}\ln x}\, dx\,,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \cosh(e^{-x}) + 1}}\, dx\,, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\ln(1+x^{3/2})(x^4+1)}\, dx\,,$$
$$\int_{-\infty}^{-1} \ln(1+e^{\alpha x})\, dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(1-x^{3/2})}{\ln(1+x)(x^3+1)}\, dx\,,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{x^5 + \operatorname{sen}(e^x)}}\, dx\,, \qquad \int_0^3 \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}\sqrt[7]{(x-2)^{10}}}\, dx\,,$$
$$\int_0^{\pi^2} |x|^\alpha \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{(\pi^2 - x)^\alpha}\,.$$

13.1.3 Criterio integrale per le serie

Teorema 13.1 (criterio integrale per le serie) *Siano $k_0 \in \mathbb{N}$ e $f : [k_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzione decrescente non negativa. Allora*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \text{ converge se e solo se } \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}.$$

Dim. Dai un'idea della dimostrazione con un disegno □

- Fai vedere che
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$
hanno lo stesso carattere.

13.2 Equazioni differenziali

13.2.1 Introduzione

Fai esempi presi dalla fisica e dalla biologia:

1. corpo di massa m soggetto alla forza di una molla:
$$mx''(t) = -\kappa x(t)\,, \tag{13.1}$$
con $\kappa > 0$ costante elastica della molla;

2. legge di carica di un condensatore con capacità C, in un circuito di induttanza L e resistenza R, con forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$: se $Q(t)$ è la carica presente sul condensatore al tempo t essa soddisfa
$$LQ''(t) + rQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = \mathcal{E}(t)\,;$$

3. il decadimento di una sostanza radioattiva è soggetto alla legge
$$K'(t) = -\alpha K(t)\,, \tag{13.2}$$
dove $\alpha > 0$ è una data costante;

4. il numero di trote $y(t)$ di un vivaio in cui viene costantemente prelevato un certo numero di pesci obbedisce alla legge
$$y'(t) = ay(t) - b\,, \tag{13.3}$$
dove a e b sono costanti positive corrispondenti rispettivamente alla prolificità e al prelievo.

13.2.2 Equazioni lineari del primo ordine

Definizione 13.1 *Un'*equazione differenziale lineare di ordine 1 (o del primo ordine) in forma normale sull'intervallo $\mathcal{I}$ *è un'equazione della forma*

$$y' = a(t)y + b(t)\,, \tag{13.4}$$

dove $a, b : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ sono opportune funzioni reali, spesso supposte continue. Se $b(t) = 0$ è identicamente nulla l'equazione si dice omogenea, *altrimenti viene detta* non omogenea.
Una soluzione dell'equazione differenziale (13.4) *in $\mathcal{I}$ è una funzione $y = y(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathcal{I}$ e tale che*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \qquad \textit{per ogni } t \in \mathcal{I}\,.$$

L'insieme di tutte le soluzioni viene detto soluzione generale dell'equazione differenziale *oppure* integrale generale dell'equazione differenziale.

Cerchiamo soluzioni dell'equazione (13.4) definite su un intervallo $\mathcal{I}$. Supponendo a, b funzioni continue su $\mathcal{I}$

1. scrivi tutte le soluzioni di (13.4) (*integrale o soluzione generale*)

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt\,, \tag{13.5}$$

   con $A(t)$ primitiva di a, oppure

$$y(t) = e^{A(t)} \left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right), \tag{13.6}$$

   con $c \in \mathbb{R}$ e

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(r)\, dr$$

   primitiva di a che si annulla in t_0.

2. fissa $t_0 \in \mathcal{I}$ e trova la soluzione di (13.4) che soddisfa $y(t_0) = y_0$ (Problema di Cauchy).

Teorema 13.2 *Assegnate due funzioni continue $a, b \to \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, la generica soluzione dell'equazione differenziale $y' = a(t)y + b(t)$ è data da* (13.5) *(oppure da* (13.6) *al variare di $c \in \mathbb{R}$). Se $t_0 \in \mathcal{I}$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases} \tag{13.7}$$

ammette un'unica soluzione in $\mathcal{I}$, data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right) \quad \textit{con} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(r)\, dr\,. \tag{13.8}$$

Calcola le soluzioni di (13.2).
Riprendi (13.3) e trova b in modo da non rimanere senza.

Esempio 13.4 Sia $y = y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1} y = \dfrac{x}{x+1} \qquad \text{se} \quad x > 0\,, \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}$.

Esempio 13.5 Calcolare la soluzione di

$$\begin{cases} y' - (2 \operatorname{sen} x \cos x) y = 3 e^{\operatorname{sen}^2 x}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esempio 13.6 Calcolare la funzione f che soddisfa

$$\frac{1}{2} \int_0^x f(t)\,dt = f(x) + 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 13.7 Calcolare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x} y = \operatorname{sen} x \qquad \text{se} \quad x > 0\,, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0\,. \end{cases}$$

Esempio 13.8 Sia $u = u(x)$ la soluzione di

$$\begin{cases} u' + 2u = 2 \arctan x\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

Esempio 13.9 Data la soluzione di

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1} y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x+2}\,, \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

13.2.3 Equazioni a variabili separabili

Consideriamo un'equazione del tipo

$$y'(x) = g(x)f(y(x))\,. \tag{13.9}$$

Procediamo formalmente scrivendo $y' = dy/dx$ e "separando le variabili". Si ottiene

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx\,,$$

e calcolando le primitive si risolve il problema. Per esempio, per l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = xy^2\,, \tag{13.10}$$

per $y \neq 0$, separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{y^2} = xdx\,,$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, l'equazione (13.10), oltre alla soluzione identicamente nulla, ammette anche tutte quelle della forma

$$y(x) = -\frac{1}{c + x^2/2}\,.$$

Teorema 13.3 *Siano date f e g funzioni continue e si consideri l'equazione a variabili separabili*

$$y' = g(t)f(y)\,. \tag{13.11}$$

Se $f(y_0) = 0$, allora $y(t) = y_0$ è banalmente una soluzione dell'equazione. Se invece $f(y) \neq 0$ per ogni y appartenente ad un intervallo $\mathcal{J}$, dette F una primitiva di $1/f$ e G una primitiva di g, allora ogni funzione derivabile $y = y(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ con $y(t) \in \mathcal{J}$ per ogni $t \in \mathcal{I}$ e tale che soddisfi l'equazione

$$F\big(y(t)\big) = G(t) + c\,, \qquad c \in \mathbb{R} \text{ costante}\,, \tag{13.12}$$

è soluzione di (13.11) *nell'intervallo $\mathcal{I}$. In particolare, una soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = g(t)f(y)\,, \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases} \tag{13.13}$$

con $f(y_0) \neq 0$ verifica l'equazione $F(y(t)) - F(y_0) = G(t) - G(t_0)$. Se inoltre f è di classe C^1 in un intorno di y_0, oppure se $f(y_0) \neq 0$, allora si può dimostrare che il problema di Cauchy (13.13) *ammette un'unica soluzione definita in un intorno di t_0.*

Dim. Da (13.12), derivando si ottiene

$$F'(y(x))y'(x) = G'(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x)\,,$$

come si voleva. Non dimostriamo l'unicità. $\square$

Dunque, per determinare la soluzione di un'equazione differenziale "a variabili separabili", cioè con il metodo descritto dal precedente teorema, si devono calcolare due primitive e poi applicare la formula (13.12). Si osservi che tale formula dà una famiglia di soluzioni (che dipendono dal parametro arbitrario c) *in forma implicita*: la funzione $y(x)$ deve essere ancora ricavata. Vediamo nel prossimo esempio come può essere talvolta calcolata imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Esempio 13.10 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = -2\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\frac{1}{2}y^2 = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema di unicità sappiamo che il nostro problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione. Per determinarla calcoliamo innanzitutto c: dalla condizione $y(0) = 2$ risulta $c = (-2)^2/2 = 2$, per cui la soluzione $y(x)$ deve essere ricavata dall'equazione

$$\frac{1}{2}y^2 = x + 2,$$

che dà

$$y(x) = -\sqrt{2(x+2)}$$

Esempio 13.11 (qui riparto io) Consideriamo l'equazione $y' = \sqrt{y}$. Applicando il metodo della separazione delle variabili, risulta $2\sqrt{y} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, cioè $y(x) = (x+c)^2/4$. Dunque ci sono almeno due soluzioni $y(x)$ tali che $y(0) = 0$. Sono $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = x^2/4$ (in realtà ce ne sono infinite). Osserviamo che $f(y) = \sqrt{y}$ non è derivabile in $y = 0$.

Esempio 13.12 Sia data l'equazione

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}\,, \qquad -1 \le y \le 1\,.$$

Le rette $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni. Le altre soluzioni si ricavano per separazione di variabili:

$$\operatorname{arcsen} y = x^2 + c\,.$$

Quindi, fissata c, si trova una soluzione definita per

$$-\frac{\pi}{2} \leq x^2 + c \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

e data da

$$y(x) = \operatorname{sen}(x^2 + c)\,.$$

Per esempio, dovendo risolvere

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

si impone la condizione iniziale

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sen}(\pi + c)\,,$$

cercando c in modo che $-\pi/2 \leq \pi + c \leq \pi/2$. Si trova $c = -5\pi/6$, da cui

$$y(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 - \frac{5\pi}{6}\right)\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x^2 - \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Esempio 13.13 L'equazione cosiddetta logistica (di Verhulst, 1845),

$$y' = ry(1 - \frac{y}{K})$$

con r e K costanti reali positive, modella alcuni fenomeni biologici. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = y_0 > 0$ è data da

$$y(x) = \frac{Ky_0e^{rx}}{K - y_0 + y_0e^{rx}}.$$

È facile vedere che qualunque sia la condizione iniziale y_0, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = K.$$

K si chiama la *capacità portante (carrying capacity)*, o capacità dell'ambiente.

Esercizi per casa

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = x(4 - y^2) \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

(soluzione: il metodo della separazione delle variabili dà $|4 - y^2(x)| = ke^{-x^2/2}$, $k \in \mathbb{R}$; imponendo la condizione iniziale risulta $y^2(x) < 4$ per x in un intorno di $x = 0$, per cui si toglie il modulo e la soluzione è $y(x) = \sqrt{4 - e^{-x^2/2}}$).

2. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{2xy}{x^2-1}$$
con le condizioni iniziali
$$y(0) = 0,\ y(0) = 2,\ y(1/2) = 1$$
(soluzioni: $y(x) \equiv 0$, $y(x) = 2(x^2-1)$, $y(x) = -\frac{4}{3}(x^2-1)$).

3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\ln x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
(soluzione: $y(x) = \tan(x\ln x - x + 1)$).

4. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 5\,. \end{cases}$$

5. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

6. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

7. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

8. Calcolare le soluzioni del problema di Cauchy
$$y' + 3x^2y^4 = 0$$
con le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $y(1) = 1$.

9. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = \tan y \\ y(1) = \pi/4 \end{cases}$$

(soluzione: $y(x) = \mathrm{arcsen}(x/\sqrt{2})$; NB: per $|x| \leq \sqrt{2}$).

10. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

13.3 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 1

Stabilire al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore del

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}\,.$$

Svolgimento Si ha

$$\ln n! = \ln(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = \sum_{k=2}^{n} \ln k\,. \tag{13.14}$$

Si osservi che

$$\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x\,dx\,,$$

da cui, utilizzando (13.14),

$$\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \leq \ln n! \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln x\,dx = \int_2^{n+1} \ln x\,dx\,.$$

Essendo

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n\,, \qquad \int_2^{n+1} \ln x\,dx = (n+1)\ln(n+1) - (n-1) - 2\ln 2\,,$$

si ottiene

$$\lim_n \frac{\ln n!}{n^\alpha} = \lim_n \frac{n\ln n}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 1\,, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \leq 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^\alpha}\,.$$

Svolgimento Sfruttando quanto fatto prima, la serie converge se e solo se converge la serie

$$\sum_n \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\,,$$

e quindi se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 3

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln\bigl(1 - |\tanh x|\bigr)\,.$$

Svolgimento Dominio è $\mathbb{R}$, ed fè pari. $f(x) \le 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed in particolare $x = 0$ è punto di massimo assoluto. La funzione non ha asintoti veriticali perché è continua in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,,$$

e quindi f non ha asintoti orizzontali. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x - \ln(1+e^{-2x}) + \ln 2}{x} = -2\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl[f(x) + 2x\bigr] = \lim_{x\to+\infty} \bigl[\ln 2 - -\ln(1+e^{-2x})\bigr] = \ln 2\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = -2x + \ln 2$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Essendo f pari, la retta di equazione $y = 2x + \ln 2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.
Derivata prima.

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - |\tanh x|}\,\mathrm{sgn}(\tanh x)(1 - \tanh^2 x) \ge 0$$

se e solo se $x < 0$. Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1\,,$$

e quindi $x = 0$ è punto angoloso. f è decrescente in $[0, +\infty[$, crescente in $]-\infty, 0]$.

Derivata seconda. Si osservi che

$$f'(x) = -\operatorname{sgn}(\tanh x)(1 + |\tanh x|)\,,$$

e quindi

$$f''(x) = -\big[\operatorname{sgn}(\tanh x)\big]^2(1 - \tanh^2 x) \le 0 \quad \forall x \neq 0\,.$$

f risulta essere concava in tutto il suo dominio.

Esercizio 4

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln\cosh x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{senh} x|\,.$$

Svolgimento Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. f non è pari né dispari.
Segno. Si ha

$$f(x) = \ln\cosh x - \ln e^{x/2} - \ln|\operatorname{senh} x|^{1/2} = \ln\frac{\cosh x}{e^{x/2}|\operatorname{senh} x|^{1/2}} \ge 0$$

se e solo se

$$\frac{\cosh x}{e^{x/2}|\operatorname{senh} x|^{1/2}} \ge 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cosh^2 x \ge e^x|\operatorname{senh} x|\,.$$

Se $x > 0$ si ottiene

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} \ge \frac{e^{2x} - 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x} + e^{-2x} \ge 2e^{2x} - 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{4x} - 2e^{2x} - 1 \le 0$$

da cui

$$e^{2x} \le 1 + \sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x \le \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}\,.$$

Analogamente, se $x < 0$, si ottiene

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} \ge \frac{1 - e^{2x}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x} + e^{-2x} \ge 2 - 2e^{2x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3e^{4x} - 2e^{2x} + 1 \ge 0\,,$$

che è sempre verificata. Allora

$$f(x) \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x \le \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2} \quad \text{o} \quad x < 0\,.$$

Essendo

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ è asintoto verticale. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{e^x|1 - e^{-2x}|^{1/2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = -\ln 2/2$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{|1 - e^{2x}|^{1/2}}\right) = +\infty\,.$$

Ricerchiamo asintoti obliqui a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{2x} + 1}{|1 - e^{2x}|^{1/2}}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \big[f(x) + x\big] = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{2x} + 1}{|1 - e^{2x}|^{1/2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = -x - \ln 2/2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.
Derivata prima

$$f'(x) = \tanh x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tanh x} = \frac{2\tanh^2 x - \tanh x - 1}{2\tanh x}\,.$$

Si ha

$$2\tanh^2 x - \tanh x - 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tanh x \leq -\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -\frac{1}{2}\ln 3\,,$$

dove si è sfruttato il fatto che

$$\operatorname{settanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}\,.$$

Poiché $\tanh x \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$, si ottiene che

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\ln 3 \leq x < 0\,,$$

e quindi $x = -\ln 3/2$ è punto di minimo relativo.
Derivata seconda

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\tanh x(4\tanh x - 1)(1 - \tanh^2 x) - (2\tanh^2 x - \tanh x - 1)(1 - \tanh^2 x)}{2\tanh^2 x} \\ &= \frac{(1 - \tanh^2 x)}{2\tanh^2 x}(2\tanh^2 x + 1) \geq 0 \qquad \forall x \neq 0\,, \end{aligned}$$

e quindi f è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$.

Esercizio 5

Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_{1/x}^{1}\frac{\operatorname{sen}t-\arctan t}{t^{\alpha}}\,dt$$
al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Svolgimento Essendo
$$\operatorname{sen}t-\arctan t=\frac{t^3}{6}+o(t^3)\quad\text{per } t\to 0\,,$$
l'integrale converge se e solo se $\alpha<4$. Per tali α il limite è 0. Per tutti gli altri con il Teorema di De L'Hôpital si ottiene
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_{1/x}^{1}\frac{\operatorname{sen}t-\arctan t}{t^{\alpha}}\,dt&=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1}{x^2}\frac{\operatorname{sen}(1/x)-\arctan(1/x)}{(1/x)^{\alpha}}\\&=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-1}\left(\frac{1}{6x^3}+o(1/x^3)\right)\\&=\begin{cases}1/6 & \text{se}\quad \alpha=4\,,\\ +\infty & \text{se}\quad \alpha>4\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 6

Determinare i valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\beta>0$ per i quali converge l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{senh}x\arctan(1/x)}{|x-\ln(1+x)|^{\alpha}(1+x^{\beta})}\,dx\,.$$

Svolgimento Si ha
$$e^{-x}\operatorname{senh}x\arctan(1/x)\sim x\qquad\text{per } x\to0^+\,,$$
$$e^{-x}\operatorname{senh}x\arctan(1/x)\sim\frac{1}{x}\qquad\text{per } x\to+\infty\,,$$
ed inoltre
$$|x-\ln(1+x)|^{\alpha}(1+x^{\beta})\sim x^{2\alpha}\qquad\text{per } x\to0^+\,,$$
$$|x-\ln(1+x)|^{\alpha}(1+x^{\beta})\sim x^{\alpha+\beta}\qquad\text{per } x\to+\infty\,.$$
Allora
$$\frac{e^{-x}\operatorname{senh}x\arctan(1/x)}{|x-\ln(1+x)|^{\alpha}(1+x^{\beta})}\sim1/x^{2\alpha-1}\qquad\text{per } x\to0^+\,,$$
$$\frac{e^{-x}\operatorname{senh}x\arctan(1/x)}{|x-\ln(1+x)|^{\alpha}(1+x^{\beta})}\sim1/x^{\alpha+\beta+1}\qquad\text{per } x\to+\infty\,,$$

e quindi l'integrale converge se e solo se

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 < 1 \\ \alpha + \beta + 1 > 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha + \beta > 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 7

Determinare i valori di $\alpha \geq 0$ per i quali converge la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha+2}(1+\tanh n + \cos n^6)^{2\alpha}}{2n + \sqrt{n^4+n^3+3}} \ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) .$$

Svolgimento Si ha

$$n^{\alpha+2} \leq n^{\alpha+2}(1+\tanh n + \cos n^6)^{2\alpha} \leq 3^{2\alpha} n^{\alpha+2}\,,$$

ed inoltre

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}} \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$

$$2n + \sqrt{n^4+n^3+3} \sim n^2 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Allora la serie data converge se e solo se converge

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha+2}}{n^{2+2\alpha}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}\,,$$

e quindi se e solo se $\alpha > 1$.