Capitolo 1
Il concetto di funzione

Ultimo aggiornamento: 22 ottobre 2019

Per definire una **funzione** si debbono fornire tre cose: un insieme X su cui la funzione è definita (dominio), un insieme Y nel quale la funzione assume valori (codominio) e una regola per associare elementi di X a elementi di Y. Tale regola è caratterizzata dal fatto che **ad ogni elemento di** X associa uno, ed **uno solo**, elemento di Y.

Esempi:

$X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

$x_1 \mapsto y_1,$

$x_2 \mapsto y_2,$ è una funzione

$x_3 \mapsto y_3$

$x_1 \mapsto y_1,$

$x_2 \mapsto y_1,$ è una funzione

$x_3 \mapsto y_3$

$x_2 \mapsto y_1,$ non è una funzione (o almeno non è una funzione da X in Y;

$x_3 \mapsto y_3,$ poco male, tolgo x_1 dal dominio e questa sarà una funzione dall'insieme $\{x_2, x_3\}$ in Y)

$x_1 \mapsto y_1, y_2$

$x_2 \mapsto y_1,$ non è una funzione

$x_3 \mapsto y_3$

La scrittura compatta è

$$f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Se X e Y sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, si parla di funzioni di una variabile reale a volori reali.

Grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Attenzione! è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$!!

Immagine di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in A\}$$

Attenzione! è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$!! (da non confondersi con il grafico)

Dati $f : X \to Y$ e $A \subset X$ si dice **restrizione** di f ad A la funzione $g : A \to Y$ tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.
Talvolta, senza rinominare la funzione, si denota semplicemente tale funzione con il simbolo

$$f|_A.$$

Composizione tra funzioni - Dati X, Y, Z insiemi e date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni si definisce l'operazione di composizione $g \circ f$ che è la funzione definita da

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \longrightarrow & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Esempio: la funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = (3x - 12)^2$ può essere vista come la composizione $h(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$ dove f_i sono le seguenti funzioni

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & 3x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & y & \mapsto & y - 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Funzione iniettiva - $f : X \to Y$ si dice iniettiva ogni qualvolta, presi $x_1, x_2 \in X$, si ha che $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente da $f(x_1) = f(x_2)$ segue che $x_1 = x_2$).
Funzione suriettiva - $f : X \to Y$ si dice suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$.
Funzione biiettiva - $f : X \to Y$ si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempi:

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_2\,, \qquad \text{è iniettiva e suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_3$$

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_1\,, \qquad \text{non è iniettiva ed è suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_2$$

$$f : \{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_3\,, \qquad \text{è iniettiva e non suriettiva}$$

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_1\,, \qquad \text{non è né iniettiva né suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_2$$

Cardinalità - Diciamo che un insieme X ha cardinalità N (e si scrive $\#(X) = N$) se esiste una biiezione tra l'insieme X e l'insieme $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Siano X e Y due insiemi, X fatto da N elementi. Si consideri una funzione $f : X \to Y$ e si supponga che f sia iniettiva. Cosa possiamo dire riguardo la cardinalità di Y?
Poiché f è iniettiva $f(x_1), \ldots f(x_N)$ sono elementi distinti di Y, cioè Y contiene almeno N elementi.
Supponiamo ora che f sia solamente suriettiva. Cosa possiamo dire riguardo il numero di elementi di Y? Che non possono essere più di N, perché l'immagine di X tramite f è $\{f(x_1), \ldots, f(x_N)\} \subseteq Y$ e quindi al più Y contiene N elementi.
Se $f : X \to Y$ è biiettiva, allora anche Y ha N elementi (minimo N perché f è iniettiva, massimo N perché è suriettiva).

Possiamo affermare quindi che, dati X e Y insiemi, vale

$$\begin{array}{l} X \text{ contiene } N \text{ elementi} \\ f \text{ biiettiva} \end{array} \Longrightarrow Y \text{ contiene esattamente } N \text{ elementi}\,.$$

Notiamo allora che se $f : X \to X$, X ha cardinalità N, f iniettiva, necessariamente f è anche suriettiva.
Allo stesso modo vale anche che se $f : X \to X$, X ha cardinalità N, f suriettiva, necessariamente f è anche iniettiva.

Può esistere una funzione $f : A \to A$, cioè definita e a valori nello stesso insieme, che sia iniettiva, ma non suriettiva?

SI!! Ad esempio, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n + 1$. Allo stesso modo, può esistere una funzione $f : A \to A$ suriettiva, ma non iniettiva, ad esempio $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(0) = 0, g(n) = n - 1$ se $n \geqslant 1$.

Se $f : X \to Y$ è biiettiva posso definire la **funzione inversa** $f^{-1} : Y \to X$ nel modo che segue:

per ogni $y \in Y$ (posso perché f è suriettiva) definisco $f^{-1}(y)$ come quell'unico (posso perché f è iniettiva) x tale che $f(x) = y$.

Osservazione - **Se f è biiettiva e f^{-1} è la sua inversa, anche f^{-1} è biiettiva, e quindi invertibile**.

Osservazione - Per invertire una funzione non è essenziale che tale funzione sia suriettiva, ma che sia iniettiva. Se f non è suriettiva poco male, si può considerare $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ e questa è biiettiva.

Osservazione - Una funzione che non sia iniettiva invece non può essere invertita, ma la si può restringere ad un sottoinsieme nel quale risulta iniettiva ed invertire tale restrizione.
Esempio: $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, non è né iniettiva, né suriettiva. Considerando la funzione

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & [0, +\infty) & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

si ottiene una funzione iniettiva e suriettiva, e quindi invertibile. L'inversa di $\tilde{f}$ è la funzione che viene denotata con $\sqrt{\cdot}$,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}^{-1} : & [0, +\infty) & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La funzione $\tilde{f}$ non è l'unica possibilità di resttringere f ottenendo una funzione iniettiva. Per esempio anche la funzione

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & (-\infty, 0] & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

risulta iniettiva e suriettiva, e quindi invertibile. Chi è la sua inversa?

EX - Si trovi una terza restrizione di f che sia iniettiva (e suriettiva).