Potenze, esponenti, logaritmi

Ultimo aggiornamento: 30 settembre 2019

1. Potenze

Potenze ad esponente intero - Consideriamo $x \in \mathbf{R}$ e $m \in \mathbf{N}^*$ e definiamo la potenza x^m come segue

$$x^m = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ volte}} .$$

Proprietà immediate: $x, y \in \mathbf{R}$ e $m, n \in \mathbf{N}^*$

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$$
$$(x^m)^n = x^{mn}$$
$$(xy)^m = x^m \cdot y^m$$

Volendo estendere la potenza x^m a $m \in \mathbf{Z}$, si vogliono mantenere che proprietà su elencate. Perciò, poiché si vorrebbe

$$x^m = x^{m+0} = x^m \cdot x^0 ,$$

si impone

$$x^0 := 1 .$$

Allo stesso modo, per $x \neq 0$, poiché si vorrebbe

$$1 = x^0 = x^{m-m} = x^m \cdot x^{-m}$$

si definisce

$$x^{-m} := \frac{1}{x^m} .$$

Si noti che $x \mapsto x^m$ per m dispari è iniettiva, mentre per m pari no! Posso restringere le funzioni potenze ad esponenete pari alla semiretta $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ ed in tal modo le funzioni

$$\begin{array}{cccc} p_m : & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & x^m \end{array}$$

risultano sia iniettive che suriettive, e perciò invertibili.

Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **crescente** (strettamente crescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$ ($f(x) < f(y)$).
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **decrescente** (strettamente decrescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \geqslant f(y)$ ($f(x) > f(y)$).
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **monotona** (strettamente) se è crescente oppure decrescente (strettamente).

Osservazione - Le funzioni p_m, per qualunque $m \in \mathbf{N}^*$, sono monotone. (Questa affermazione ndrebbe dimostrata usando la compatibilità dell'ordinamento con le operazioni di somma e prodotto).

Radice n-esima - Ora consideriamo $x \in \mathbf{R}_+$. Definiamo

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{quell'unico numero reale non negativo } y \text{ tale che } y^n = x\,.$$

La radice n-esima di x esiste, ed è unica, in virtù del fatto che p_n sono invertibili.

Osservazione - Per m dispari si potrebbe definire $\sqrt[m]{x}$ anche per x negativo.

Potenze ad esponente razionale - Ora definiamo x^a con $a \in \mathbf{Q}$. Sia $a = m/n$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Allora

$$x^a = x^{m/n} := (\sqrt[n]{x})^m\,.$$

Verifichiamo innanzitutto che

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Detta y la quantità $\sqrt[n]{x^m}$ si ha, per definizione, che

$$y^n = x^m\,.$$

Detta z la quantità $\sqrt[n]{x}$ si ha che

$$z^{nm} = x^m = y^n\,, \qquad \text{cioè} \qquad (z^m)^n = y^n$$

da cui $z^m = y$, cioè $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$.
Verifichiamo ora la bontà della definizione che abbiamo appena dato: se a viene scritto nella forma pm/pn, detta y la quantità $\sqrt[pn]{x}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} &y^{np} = x \\ &(y^p)^n = x \\ &y^p = \sqrt[n]{x} \\ &y^{pm} = (\sqrt[n]{x})^m\,. \end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione di y, si ha che

$$y^{pm} = (\sqrt[pn]{x})^{mp}\,.$$

Attenzione!! Abbiamo definito le potenze razionali solo per $x \in \mathbf{R}_+$. Perché?

Esempi:

(1) $\Big((-2)(-3)\Big)^{1/2} = (6)^{1/2}$, ma $(-2)^{1/2}$ e $(-3)^{1/2}$ non hanno senso

(2) $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$, però voglio anche che $(-8)^{2/3} = (-8)^{4/6} = (\sqrt[6]{-8})^4$ e $\sqrt[6]{-8}$ non ha senso

Conlusione: la base è sempre positiva!

Che cos'è $\sqrt{x^2}$? È x se $x \geqslant 0$, ma è $-x$ se $x < 0$. La radice quadrata è definita solo in $\mathbf{R}_+$, ma se la compongo con un'altra funzione potrebbe avere senso per x in un insieme più grande. Esempio:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

La funzione

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è detta **modulo** di x e si ha

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}\,.$$

Funzione esponenziale e potenze ad esponenete reale - Fissata una base $a > 0$ abbiamo visto che è possibile considerare una funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & a^x\,. \end{array}$$

Questa funzione è monotona crescente (si vedrà al corso). È possibile (si vedrà al corso) estendere tale funzione a tutto $\mathbf{R}$. La funzione estesa è detta funzione esponenziale e risulta anch'essa monotona (si vedrà al corso).

Logaritmi - Poiché $x \mapsto a^x$ è strettamente monotona a parte il caso $a = 1$, è anche invertibile. La sua funzione inversa è detta logaritmo in base a ($a > 0$, $a \neq 1$).

$$\log_a(x) = y \qquad \text{dove } y \text{ è quell'unico numero t.c. } a^y = x\,.$$

Chiamiamo f la funzione definita in tutto $\mathbf{R}$ come $f(x) = a^x$, quindi $f^{-1}(x) = \log_a x$ definita in $(0, +\infty)$.

Dove è definita $f^{-1} \circ f$? In $\mathbf{R}$!
Dove è definita $f \circ f^{-1}$? In $(0, +\infty)$!

Principali proprietà del logaritmo:

(1) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
(2) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
(3) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$

Dimostrazione.

(1) Se $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$ si ha, per definizione, che
$$a^{y_1} = x_1\,, \qquad a^{y_2} = x_2\,.$$
Allora
$$x_1 x_2 = a^{y_1+y_2}$$
cioè
$$\log_a(x_1 x_2) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2\,.$$
(2) $\log_a 1 = 0$, per cui $0 = \log_a \frac{1}{x} x = \log_a \frac{1}{x} + \log_a x$
(3) $y = \log_a(x^\alpha)$, $z = \log_a x$, per cui $a^y = x^\alpha$, $a^z = x \Rightarrow a^{z\alpha} = x^\alpha$ per cui $y = z\alpha$

Osservazione - $\log_a x$ e $\log_b x$ sono proporzionali. Infatti, presi $a \neq 1$, $b \neq 1$, si ha, poiché $x = a^{\log_a x}$,
$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_b a \log_a x\,.$$

Esempio: $\log_a(x^2)$ non è $2\log_a x$, ma $2\log_a |x|$!