Dispense di teoria di analisi matematica 1

30 settembre 2011

Capitolo 1

Un insieme è una collezione di oggetti. Si hanno sostanzialmente due modi per descrivere un insieme: il primo è elencarne tutti gli elementi, il secondo è quello di considerare l'insieme dato come un sottoinsieme di un altro insieme, fatto di elementi di questo secondo insieme che verificano una certa proprietà, cioè

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}\,, \qquad A = \{x \in X \mid P(x)\}\,.$$

Si osservi che nel primo caso l'insieme deve contenere un numero finito di elementi, diversamente non potrei elencarli tutti. Nel secondo caso devo specificare che l'insieme A è fatto di <u>elementi di X</u> che godono di una certa proprietà. Senza specificare che A è fatto di elementi di X che godono di una certa proprietà potrei incorrere in definizioni prove di senso (per i più curiosi: si veda il paradosso di Russel).

Gli insiemi che vedremo e utilizzeremo saranno **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C**. Con **N** si indica l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\,,$$

con **Z** l'insieme dei numeri interi

$$\mathbf{N} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}\,,$$

con **Q** l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbf{Q} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

1.1 Un po' di insiemistica

Un **insieme** è una collezione di oggetti

Se A è un insieme e a è un elemento di A, per denotare che a appartiene ad A si scrive

$$a \in A\,.$$

Un **sottoinsieme** B di A è un insieme tale che ogni elemento di B appartiene anche ad A. Per denotare che B è un sottoinsieme di A si scrive

$$B \subseteq A \quad (B \text{ è contenuto in } A)\,.$$

Operazioni con gli insiemi

$A \cup B$ è l'insieme unione di A e B, dato dagli elementi che appartengono all'insieme A oppure all'insieme B ($x \in A \vee x \in B$)

$A \cap B$ è l'insieme intersezione di A e B, dato dagli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B ($x \in A \wedge x \in B$)

$A \setminus B$ è l'insieme dato dagli elementi che appartengono all'insieme A, ma non all'insieme B ($x \in A \wedge x \notin B$)

$A \times B$ è l'insieme dato dagli elementi coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

Le operazioni di unione ed intersezione sono, in qualche senso commutative. Così non è per la sottrazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A\,.$$

Esempio - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.
Se voglio che $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ siano insiemi, in particolare se A e B non hanno elementi in comune cos'è $A \cap B$? Se $A \subseteq B$ che cos'è $A \setminus B$?
Insieme vuoto $\emptyset$: devo ammettere l'esistenza di un insieme che non contiene alcun elemento e che chiamo insieme vuoto.

Notare che vi è differenza tra a e $\{a\}$: se $a \in A$

$$a \text{ è un elemento di } A\,, \qquad \{a\} \text{ è un sottoinsieme di } A\,.$$

Alcuni insiemi:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\,, & \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\} \\ \mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}\,, & \mathbf{Z}^* = \{1, -1, 2, -2 \ldots\} \end{array}$$

Con $\mathbf{Q}$ denoto l'insieme dei numeri razionali, quei numeri cioè che possono essere rappresentati come p/q con $p \in \mathbf{Z}$ e $q \in \mathbf{N}^*$ (dove / denota la frazione). Si nota che un numero razionale ammette più rappresentazioni: diremo che p/q e m/n rappresentano lo stesso numero razionale se

$$pn = mq\,.$$

Fattorizzazione in primi - Preso un numero $p \in \mathbf{N}$ è possibile trovare $p_1, \dots p_k$ numeri primi e $a_1, \dots a_k$ numeri interi positivi tali che

$$p = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}\,.$$

Osservazione - Dato $n \in \mathbf{N}$ la fattorizzazione di p^n contiene tutti e soli i fattori primi che compaiono nella fattorizzazione di p:

$$p = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}\,, \qquad p^n = p_1^{na_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{na_k}\,.$$

Esempio - Trovare la scomposizione in fattori primi di 30^{13}. Si scompone 30 come prodotto di $2, 3, 5$ e si ottiene

$$30^{13} = 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}\,.$$

Se m è negativo si può considerare la scomposizione di $-m$ cambiata di segno. Due numeri interi positivi p e q si dicono **coprimi tra loro** se

$$p_i \neq q_j \qquad i = 1, \dots k\,, j = 1, \dots h$$

dove

$$p = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}\,, \qquad q = q_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot q_k^{b_k}\,,$$

o equivalentemente se il massimo comun divisore tra p e q è 1 ($\mathrm{MCD}(p, q) = 1$).

Esempio - $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ e $175 = 5^2 \cdot 7$ sono coprimi tra loro (ma nessuno dei due è primo!!)

Osservazione - Per ogni numero razionale e positivo r esiste sempre una rappresentazione di r tramite p/q con p e q coprimi tra loro. Tale rappresentazione è anche unica.

Dopo queste ultime considerazioni possiamo definire l'insieme dei numeri razionali in questo modo:

$$\mathbf{Q} = \left\{ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \;\middle|\; \mathrm{MCD}(p, q) = 1 \text{ se } p > 0\,, \mathrm{MCD}(-p, q) = 1 \text{ se } p < 0 \right\}.$$

Fatto importante: esistono numeri che non posso essere espressi come rapporto di due interi, cioè esistono numeri non razionali.

ESEMPIO - $\sqrt{2}$ non è razionale. Se lo fosse potrei scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con $p, q \in \mathbf{N}^*$ e coprimi tra loro. Ma allora

$$2q^2 = p^2$$

da cui deduciamo che p^2 è pari e, da un'osservazione precedente, che anche p è pari. Quindi p^2 è divisibile per 4 e possiamo scrivere

$$p^2 = 4r^2 \qquad \text{per qualche } r \text{ intero positivo}\,.$$

Da ciò concludiamo che

$$q^2 = 2r^2$$

da cui, analogamente a quanto fatto per p si deduce che q è pari. Ma ciò è impossibile, perché p e q sono coprimi tra loro.

Altri esempi di numeri non razionali (irrazionali) sono il numero di Nepero e, il numero π e tutti i numeri del tipo $\sqrt{k}$ con k che non sia un quadrato perfetto (per EX).

Per tale motivo si introducono **i numeri reali R**, dati dall'unione dei razionali e degli irrazionali, quelli che non sono razionali (ma questo si vedrà al corso).
Particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono gli intervalli: dati $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ definiamo

$$\begin{aligned}
&(a, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\} \\
&[a, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\} \\
&(a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\} \\
&[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \\
&(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\} \\
&(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}
\end{aligned}$$

Per descrivere un insieme ho due possibilità: elencare tutti gli elementi tra due graffe oppure considerare gli elementi di un altro insieme che soddisfano una certa, o più, proprietà. Cioè

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}\,, \qquad A = \{x \in X \mid P(x)\}\,.$$

Attenzione! scrivere

$$\{x \geqslant -2\}$$

non ha alcun significato. Hanno significato invece gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{N} \mid x \geqslant -2\}\,, \quad \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geqslant -2\}\,, \quad \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant -2\}\,,$$

che sono diversi tra loro (a tal proposito si veda anche il **paradosso di Russel**).

1.2 Un po' di logica

Simbologia

Connettivi logici

$\vee$ oppure (il *vel* latino)

$\wedge$ e (l'*et* latino)

$\neg$ negazione

$\Rightarrow$ implica

$\Leftrightarrow$ equivale

Con P e Q denotiamo due proposizioni.

$P \vee Q$ significa che può essere vera P, può essere vera Q, possono essere vere entrambe

$P \wedge Q$ significa che sono vere sia P che Q

Esempi - Date le proposizioni P (6 è pari), Q (-1 è positivo) si ha

1. $\neg P =$ (6 non è pari)
2. $P \vee Q =$ (6 è pari oppure -1 è positivo)
3. $P \wedge Q =$ (6 è pari e -1 è positivo)

Per la cronaca

- P è vera
- Q è falsa
- $P \vee Q$ è vera
- $P \wedge Q$ è falsa

Dal punto di vista insiemistico il connettivo $\vee$, cioè "o", corrisponde all'**unione**; il connettivo $\wedge$, cioè "e", corrisponde all'**intersezione**.
Ad esempio, siano $P(x)$ la proposizione "x è pari" e $Q(x)$ la proposizione "x è positivo" dove x è un numero intero. Ricordo: l'insieme degli interi $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 \ldots\}$ e l'insieme dei numeri pari è $\{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$.

Se consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x)\} &= A \text{ (l'insieme dei numeri pari)}\\
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, Q(x)\} &= B \text{ (l'insieme dei numeri positivi)}\\
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \vee Q(x)\} &= A \cup B\\
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \wedge Q(x)\} &= A \cap B
\end{aligned}$$

Altro esempio: risolviamo la disequazione ($x \in \mathbf{R}$)

$$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\,.$$

Per quali x è soddisfatta tale disequazione? Risolvendo per via grafica, risolvendo prima l'equazione $x^2-5x+6 = 0$ si ottengono i valori che appartengono all'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geqslant 3\}$, cioè

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2 \vee x \geqslant 3\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2 \text{ oppure } x \geqslant 3\}\,.$$

Se risolviamo invece scrivendo

$$(x-2)(x-3) \geqslant 0$$

e studiando il segno di $x-2$ e $x-3$ separatamente si ha $(x-2)(x-3) \geqslant 0$ in

$$\Big(\{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 2\} \cap \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 3\}\Big) \cup \Big(\{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2\} \cap \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 3\}\Big)$$

che è come dire che

$$\begin{aligned}
&x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 2 \text{ e } y \geqslant 3\} \text{ oppure } x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2 \text{ e } y \leqslant 3\} =\\
&= x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 3\} \text{ oppure } x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2\} =\\
&= x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2 \text{ oppure } y \geqslant 3\}
\end{aligned}$$

Diciamo che **una proposizione** P **è falsa** se $\neg P$ è vera.

Neghiamo alcune proposizioni semplici

Supposto che $x \in \mathbf{Z}$ negare $P(x)$ vuol dire considerare

$$\neg P(x) = \text{“}x \text{ non è pari”} = \text{“}x \text{ è dispari”}$$

$$\neg Q(x) = \text{“}x \text{ non è positivo”} = \text{“}x \text{ è negativo” oppure “}x \text{ è nullo”}$$

Se $R(x)$ è la proposizione “il foglio x è bianco” con $x \in X$, insieme dei fogli A4 di un qualunque colore, e $B = \{x \in X \mid x \text{ è bianco}\}$ allora $\neg R$ **non è** il foglio x è nero! ma

$$\neg R(x) = \text{“il foglio } x \text{ non è bianco”}$$

cioè

$$x \in X \setminus B.$$

Cioè, se una certa proprietà caratterizza un sottoinsieme dell'insieme X nel quale vive la variabile x, allora la negazione di tale proprietà caratterizza il complementare (in X) di tale insieme. In altri termini, data una proposizione S,

$$S(x) \text{ è vera per } x \in \{x \in X \mid S(x) \text{ è vera}\}\,,$$

$$\neg S(x) \text{ è vera per } x \in X \setminus \{x \in X \mid S(x) \text{ è vera}\}\,.$$

Nei primi due esempi $X = \mathbf{Z}$. Se denotiamo con A l'insieme dei numeri pari, con B l'insieme dei numeri dispari, allora

$$\neg P(x) \text{ è vera per } x \text{ numero intero, ma non pari, quindi } x \text{ dispari}\,,$$
$$\text{cioè } x \in X \setminus A = B\,,$$

$$\neg Q(x) \text{ è vera per } x \text{ numero intero, ma non positivo, quindi } x \text{ numero intero}$$
$$\text{negativo o nullo}\,.$$

Nell'ultimo esempio X l'insieme dei fogli A4 si ha

$$\neg R(x) = x \text{ è un foglio di un qualunque colore tranne il bianco}$$

Neghiamo alcune proposizioni composte

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

Da un punto di vista insiemistico se A l'insieme dei numeri pari, B l'insieme dei numeri interi positivi, allora

$$P(x) \vee Q(x) \text{ è vera per } x \in A \cup B$$

$$P(x) \wedge Q(x) \text{ è vera per } x \in A \cap B$$

quindi

$$\neg(P(x) \vee Q(x)) \text{ è vera per } x \in (\mathbf{Z} \setminus A) \cap (\mathbf{Z} \setminus B)$$
$$\neg(P(x) \wedge Q(x)) \text{ è vera per } x \in (\mathbf{Z} \setminus A) \cup (\mathbf{Z} \setminus B)$$

e leggendo

$$\begin{aligned}
\neg(P(x) \vee Q(x)) &= \neg(x \text{ è un numero pari oppure un numero intero positivo}) \\
&= x \text{ non è né un numero intero pari né un numero intero} \\
&\quad\ \text{positivo} \\
&= x \text{ è un numero intero dispari negativo o nullo} \\
\neg(P(x) \wedge Q(x)) &= \neg(x \text{ è un numero pari e un numero intero positivo}) \\
&= x \text{ non è un numero intero pari oppure non è un numero} \\
&\quad\ \text{intero positivo} \\
&= x \text{ è un numero intero dispari oppure è un numero intero} \\
&\quad\ \text{negativo o nullo}
\end{aligned}$$

Altri connettivi sono $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ con i quali, date P e Q, si possono generare altre proposizioni.

$P \Rightarrow Q$ si legge "P implica Q", cioè "se P è vera anche Q è vera" oppure "se vale P allora necessariamente deve valere Q"

$P \Leftrightarrow Q$ "P è equivalente a Q" oppure "P è vera se e solo se è vera Q" (P se Q è $P \Leftarrow Q$, P solo se Q è $P \Rightarrow Q$)

Osservazione - Per mostrare che P e Q sono equivalenti bisogna mostrare che valgono entrambe le affermazioni: $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Come fare a verificare la verità di $P \Rightarrow Q$?

Osservazione - $P \Rightarrow Q$ significa che ogni qualvolta P è vera necessariamente è vera anche Q, indipendentemente dalla verità di P.
Attenzione quindi, non si discute della verità di P, che potrebbe essere anche falsa. Noi ci concentriamo sull'affermazione $P \Rightarrow Q$ senza preoccuparci del fatto che l'affermazione P sia vera o falsa. Per definizione l'affermazione $P \Rightarrow Q$ è equivalente a $\neg P \vee Q$. Infatti, supposto che P sia vera, affinché quest'ultima sia vera si ha che necessariamente deve essere vera anche Q.

Esempio - Se $P = Q$ si ha che $P \Rightarrow P$ è sempre vero, giacché $P \vee \neg P$ è sempre vero (tautologia).

Osservazione - Dall'osservazione precedente si ha che dalla falsità di P si deduce la verità dell'implicazione $P \Rightarrow Q$, indipendentemente da Q (attenzione, non la verità di Q, ma di "$P \Rightarrow Q$").

Esempio - $P(x) = x$ è positivo, $Q(x) = -x$ è negativo.
Allora la proposizione $P(x) \Rightarrow Q(x)$ è intuitivamente vera. Anche usando la definizione si verifica facilmente che, dato $x \in \mathbf{R}$, $\neg P(x) \vee Q(x)$ è

$$(x \text{ non è positivo}) \text{ oppure } (-x \text{ è negativo }) .$$

che è come dire

$$(x \text{ non è positivo}) \text{ oppure } (x \text{ è positivo }) .$$

Si noti in particolare che

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \qquad \text{è vera}$$

indipendentemente dal fatto che, per un dato x fissato, $P(x)$ sia vera.
Ad esempio

$$P(-3) \Rightarrow Q(-3)$$

è vera anche se $P(-3)$ è falsa.

Osservazione - $P \Rightarrow Q$ significa (è equivalente a) $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Verifica:
$P \Rightarrow Q$ significa $\neg P \vee Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ significa $Q \vee \neg P$.
Esempio: se piove esco con l'ombrello. P è la proposizione "piove", Q "esco con l'ombrello". Se esco con l'ombrello non vuol dire che piova, ma se esco senza ombrello sicuramente non piove.

Osservazione - Date P e Q proposizioni, $P \Rightarrow Q$ e $P \Leftrightarrow Q$ sono nuove proposizioni la cui verità è indipendente dalla verità di P e di Q.

Quantificatori

$\forall$ ogni, per ogni

$\exists$ esiste, esistono

Altro simobolo: ! unico, unica

Esempio Come descrivere l'insieme dei numeri pari? Per descriverlo un insieme A ho essenzialmente due modi: per elencazione, sempre che l'insieme contenga un numero finito di elementi, oppure specificando A come sottoinsieme di un insieme più grande B, cioè

$$A = \{b \in B \,|\, Q(b)\}\,, \qquad Q \text{ una qualche proprietà}$$

L'insieme dei numeri pari è chiaramente infinito e non posso elencare tutti gli elementi, come ho fatto brima barando. Scriverò

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \exists\, y \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x = 2y\}\,.$$

Analogamente l'insieme dei numeri dispari sarà

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \exists\, y \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x = 2y + 1\}$$

o l'insieme dei numeri positivi che abbiaqmo considerato prima

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, x > 0\}\,.$$

Si noti come è fondamentale specificare un insieme come sottoinsieme di un insieme noto. "I numeri positivi" è vago se non specifichiamo come fatto sopra che intendiamo considerare numeri interi. Insiemi diversi da quello considerato precedentemente sono

$$\{x \in \mathbf{Q} \,|\, x > 0\}\,, \qquad \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\}\,.$$

Neghiamo alcune proposizioni

Per esempio negare una proposizione può essere utile nelle cosiddette "dimostrazioni per assurdo".
Si supponga di dover dimostrare $P \Rightarrow Q$. La dimostrazione per assurdo funziona così: supponendo vera la proposizione P si suppone anche che non valga Q, cioè sia vera $\neg Q$ e quindi bisogna saper negare una proposizione.
Alcuni esempi:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(\forall x P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$$

$$\neg(\forall x P(x) \vee Q(x)) = \exists x\ \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$$

$$\neg(P \Rightarrow Q) = \neg(Q \vee \neg P) = P \wedge \neg Q$$

$$\neg(\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)) = \exists x\ P(x) \wedge \neg Q(x)$$

- m è un maggiorante per l'insieme S se per ogni $x \in S$ vale $m \geqslant x$

  Neghiamo "m è un maggiorante per l'insieme S":
  $\neg(\forall x \in S$ si ha $m \geqslant x) = \exists x \in S$ tale che $m < x$

- f si dice crescente in $\mathbf{R}$ se per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$

  Neghiamo "f è crescente in $\mathbf{R}$":
  $\neg(\forall x, y \in \mathbf{R}, x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)) = \exists x, y \in \mathbf{R}, x < y$ tali che $f(x) > f(y)$

- f è continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che. se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

  Neghiamo "f è continua in x_0": denotiamo con $P(x)$ la proposizione $|x - x_0| < \delta$ e con $Q(x)$ la proposizione $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Abbiamo

  $\neg(\forall \epsilon\ \exists \delta\ (\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x))) = \exists \epsilon\ \forall \delta\ \neg(\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)))$ e questo è $\exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ P(x) \wedge \neg Q(x)$
  Riscrivendo questa ultima proposizione abbiamo che la negazione di "f è continua in x_0" è

  $$\text{esiste } \epsilon > 0 \text{ tale che per ogni } \delta > 0 \text{ esiste } x \text{ per cui}$$
  $$|x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \epsilon\,.$$

- si consideri una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (tali funzioni sono dette successioni). Diciamo che tale successione ammette limite $l \in \mathbf{R}$, e si scrive $\lim_{n \to +\infty} f(n) = l$, se

  $$\forall \epsilon > 0\, \exists \nu \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \geqslant \nu \text{ si ha } |f(n) - l| < \epsilon\,.$$

  Neghiamo tale affermazione:

  $$\neg(\forall \epsilon > 0\, \exists \nu \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \geqslant \nu \text{ si ha } |f(n) - l| < \epsilon) =$$
  $$= \exists \epsilon > 0\ \forall \nu \in \mathbf{N}\ \neg(\forall n \geqslant \nu \text{ si ha } |f(n) - l| < \epsilon) =$$
  $$= \exists \epsilon > 0\ \forall \nu \in \mathbf{N}\ \exists n \geqslant \nu \text{ tale che } |f(n) - l| \geqslant \epsilon$$

  che può anche essere riscritta come segue

  $\exists \epsilon > 0\ \forall \nu \in \mathbf{N}$ tale che per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$ si ha $|f(n) - l| \geqslant \epsilon\,.$

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

  Neghiamo "$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua": denotiamo con $P(x, y)$ la proposizione $|x - y| < \delta$ e con $Q(x, y)$ la proposizione $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\neg(\forall \epsilon \, \exists \delta \, (\forall x, \forall y \; P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))) = \\
&= \exists \epsilon \, \forall \delta \, \neg(\forall x \forall y \; P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))) \\
&= \exists \epsilon \, \forall \delta \, \exists x \, \exists y \; P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)
\end{aligned}$$

  che è

  > esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono x, y per cui
  >
  > $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$.

1.3 Funzioni

Per definire una **funzione** si debbono fornire tre cose: un insieme X su cui la funzione è definita (dominio), un insieme Y nel quale la funzione assume valori (codominio) e una regola per associare elementi di X a elementi di Y. Tale regola è caratterizzata dal fatto che **ad ogni elemento di** X associa uno, ed **uno solo**, elemento di Y.

Esempi:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$\begin{aligned} &x_1 \mapsto y_1, \\ &x_2 \mapsto y_2, \qquad \text{è una funzione} \\ &x_3 \mapsto y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 \mapsto y_1, \\ &x_2 \mapsto y_1, \qquad \text{è una funzione} \\ &x_3 \mapsto y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_2 \mapsto y_1, \qquad \text{non è una funzione (poco male, tolgo } x_1 \text{ dal dominio)} \\ &x_3 \mapsto y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 \mapsto y_1, y_2 \\ &x_2 \mapsto y_1, \qquad \text{non è una funzione} \\ &x_3 \mapsto y_3 \end{aligned}$$

La scrittura compatta è

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Se X e Y sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, si parla di funzioni di una variabile reale a valori reali.

Grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Attenzione! è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$!!

Immagine di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in A\}$$

Attenzione! è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$!! (da non confondersi con il grafico)

Dati $f : X \to Y$ e $A \subset X$ si dice **restrizione** di f ad A la funzione $g : A \to Y$ tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Composizione tra funzioni - Dati X, Y, Z insiemi e date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni si definisce l'operazione di composizione $g \circ f$ che è la funzione definita da

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \longrightarrow & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Esempio: la funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = (3x - 12)^2$ la posso vedere come la composizione $h(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$ dove f_i sono le seguenti funzioni

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & 3x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & y & \mapsto & y - 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array}$$

Funzione iniettiva - $f : X \to Y$ si dice iniettiva ogni qualvolta, presi $x_1, x_2 \in X$, si ha che $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente da $f(x_1) = f(x_2)$ segue che $x_1 = x_2$).
Funzione suriettiva - $f : X \to Y$ si dice suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$.
Funzione biiettiva - $f : X \to Y$ si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempi:

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_2\,, \qquad \text{è iniettiva e suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_3$$

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_1\,, \qquad \text{non è iniettiva ed è suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_2$$

$$f : \{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_3\,, \qquad \text{è iniettiva e non suriettiva}$$

$$f : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$x_1 \mapsto y_1,$$
$$x_2 \mapsto y_1\,, \qquad \text{non è né iniettiva né suriettiva}$$
$$x_3 \mapsto y_2$$

Cardinalità - Diciamo che un insieme X ha cardinalità N (e si scrive $\#(X) = N$) se esiste una biiezione tra l'insieme X e l'insieme $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Siano X e Y due insiemi, X fatto da N elementi. Si consideri una funzione $f : X \to Y$ e si supponga che f sia iniettiva. Cosa possiamo dire riguardo la cardinalità di Y?
Poiché f è iniettiva $f(x_1), \ldots f(x_N)$ sono elementi distinti di Y, cioè Y contiene almeno N elementi.
Supponiamo ora che f sia solamente suriettiva. Cosa possiamo dire riguardo il numero di elementi di Y? Che non possono essere più di N, perché l'immagine di X tramite f è $\{f(x_1), \ldots, f(x_N)\} \subseteq Y$ e quindi al più Y contiene N elementi.
Se $f : X \to Y$ è biiettiva, allora anche Y ha N elementi (minimo N perché f

è iniettiva, massimo N perché è suriettiva).

Possiamo affermare quindi che, dati X e Y insiemi, vale

$$\begin{array}{l} X \text{ contiene } N \text{ elementi} \\ f \text{ biiettiva} \end{array} \Longrightarrow Y \text{ contiene esattamente } N \text{ elementi}\,.$$

Notiamo allora che se $f : X \to X$, X ha cardinalità N, f iniettiva, necessariamente f è anche suriettiva.
Allo stesso modo vale anche che se $f : X \to X$, X ha cardinalità N, f suriettiva, necessariamente f è anche iniettiva.

Può esistere una funzione $f : A \to A$, cioè definita e a valori nello stesso insieme, che sia iniettiva, ma non suriettiva?

SI!! Ad esempio, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n + 1$. Allo stesso modo, può esistere una funzione $f : A \to A$ suriettiva, ma non iniettiva, ad esempio $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(0) = 0, g(n) = n - 1$ se $n \geqslant 1$.

Se $f : X \to Y$ è biiettiva posso definire la **funzione inversa** $f^{-1} : Y \to X$ nel modo che segue:

per ogni $y \in Y$ (posso perché f è suriettiva) definisco $f^{-1}(y)$ come quell'unico (posso perché f è iniettiva) x tale che $f(x) = y$.

Osservazione - **Se f è biiettiva e f^{-1} è la sua inversa, anche f^{-1} è biiettiva, e quindi invertibile**.

Nota per me: dire che cosa è un'operazione e che cosa è l'elemento neutro rispetto a tale operazione.

L'emento neutro rispetto all'operazione di composizione tra funzioni è la funzione *identità* $\mathrm{Id}_X : X \to X$ definita $\mathrm{Id}_X(x) = x$ per ogni $x \in X$ (esempio in $\mathbf{R}$).
Dalla definizione di f^{-1} si ha che

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{Id}_X(x)\,.$$

Allo stesso modo, detta g la funzione f^{-1} si ha che

$$g^{-1}(g(y)) = y = \mathrm{Id}_Y(y)\,.$$

L'unica cosa che rimane da verificare è che $g^{-1} = f$. Ma dalla uguaglianza sopra si ha $g^{-1}(f^{-1}(y)) = y$. Poiché f è suriettiva esiste un qualche x tale che

$y = f(x)$ e quindi

$$g^{-1}(f^{-1}(f(x))) = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad g^{-1}(x) = f(x)\,.$$

Poiché ciò vale per ogni y di Y e per cui per ogni $x \in X$ giacché f è suriettiva, si conclude che $g^{-1} = f$.

Esempi: $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ in $[0,2]$ e $2x - 2$ in $[2,3]$, $h(x) = x$ in $[0,2]$ e $2x$ in $[2,3]$.

Osservazione - Per invertire una funzione non è essenziale che tale funzione sia suriettiva, ma che sia iniettiva. Se f non è suriettiva poco male, si va a considerare $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ e questa è biiettiva.

Potenze ad esponente intero - Consideriamo $x \in \mathbf{R}$ e $m \in \mathbf{N}^*$ e definiamo la potenza x^m come segue

$$x^m = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ volte}} .$$

Proprietà immediate: $x, y \in \mathbf{R}$ e $m, n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ (x^m)^n &= x^{mn} \\ (xy)^m &= x^m \cdot y^m \end{aligned}$$

Volendo estendere la potenza x^m a $m \in \mathbf{Z}$, si vogliono mantenere che proprietà su elencate. Perciò, poiché si vorrebbe

$$x^m = x^{m+0} = x^m \cdot x^0 ,$$

si impone

$$x^0 := 1 .$$

Allo stesso modo, per $x \neq 0$, poiché si vorrebbe

$$1 = x^0 = x^{m-m} = x^m \cdot x^{-m}$$

si definisce

$$x^{-m} := \frac{1}{x^m} .$$

Grafici di alcune potenze:

Si noti che $x \mapsto x^m$ per m dispari è iniettiva, mentre per m pari no! Posso restringere le funzioni potenze ad esponenete pari alla semiretta $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ ed in tal modo le funzioni

$$
\begin{array}{rccc}
p_m : & [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\
 & x & \mapsto & x^m
\end{array}
$$

risultano sia iniettive che suriettive, e perciò invertibili.

Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **crescente** (strettamente crescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **decrescente** (strettamente decrescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \geqslant f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **monotona** (strettamente) se è crescente oppure decrescente (strettamente).

Osservazione - Le funzioni p_m, per qualunque $m \in \mathbf{N}^*$, sono monotone. (Sarebbe una proposizione che andrebbe dimostrata usando la compatibilità dell'ordinamento con le operazioni di somma e prodotto, ma tanto se la bevono)

Radice n-esima - Ora consideriamo $x \in \mathbf{R}_+$. Definiamo

$$\sqrt[m]{x} \quad \text{quell'unico numero reale non negativo } y \text{ tale che } y^m = x\,.$$

La radice n-esima di x esiste, ed è unica, in virtù del fatto che p_n sono invertibili.

Osservazione - Per m dispari si potrebbe definire $\sqrt[m]{x}$ anche per x negativo.

Grafici di alcune funzioni $\sqrt[n]{x}$

Potenze ad esponente razionale - Ora definiamo x^a con $a \in \mathbf{Q}$. Sia $a = m/n$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Allora

$$x^a = x^{m/n} := (\sqrt[n]{x})^m .$$

Verifichiamo innanzitutto che

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Detta y la quantità $\sqrt[n]{x^m}$ si ha, per definizione, che

$$y^n = x^m .$$

Detta z la quantità $\sqrt[n]{x}$ si ha che

$$z^{nm} = x^m = y^n , \qquad \text{cioè} \qquad (z^m)^n = y^n$$

da cui $z^m = y$, cioè $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$.
Verifichiamo ora la bontà della definizione che abbiamo appena dato: se a viene scritto nella forma pm/pn, detta y la quantità $\sqrt[pn]{x}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} & y^{np} = x \\ & (y^p)^n = x \\ & y^p = \sqrt[n]{x} \\ & y^{pm} = (\sqrt[n]{x})^m . \end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione di y, si ha che

$$y^{pm} = (\sqrt[pn]{x})^{mp} .$$

Attenzione!! Abbiamo definito le potenze razionali solo per $x \in \mathbf{R}_+$. Perché?

Esempi:

1. $\Big((-2)(-3)\Big)^{1/2} = (6)^{1/2}$, ma $(-2)^{1/2}$ e $(-3)^{1/2}$ non hanno senso
2. $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$, però voglio anche che $(-8)^{2/3} = (-8)^{4/6} = (\sqrt[6]{-8})^4$ e $\sqrt[6]{-8}$ non ha senso

Conlusione: la base è sempre positiva!

Che cos'è $\sqrt{x^2}$? È x se $x \geqslant 0$, ma è $-x$ se $x < 0$. La radice quadrata è definita solo in $\mathbf{R}_+$, ma se la compongo con un'altra funzione

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

La funzione

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è detta **modulo** di x e si ha

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}\,.$$

Funzione esponenziale - Fissata una base $a > 0$ abbiamo visto che è possibile considerare una funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{Q} & \to & \mathbf{R}_+ \\ & x & \mapsto & a^x\,. \end{array}$$

Questa funzione è monotona crescente (si vedrà al corso). È possibile (si vedrà al corso) estendere tale funzione a tutto $\mathbf{R}$. La funzione estesa è detta funzione esponenziale e risulta anch'essa monotona.

Poiché $x \mapsto a^x$ è strettamente crescente, è anche invertibile. La sua funzione inversa è detta logaritmo in base a.

$$\log_a(x) = y \qquad \text{dove } y \text{ è quell'unico numero t.c. } a^y = x\,.$$

Chiamiamo f la funzione definita in tutto $\mathbf{R}$ come $f(x) = a^x$, quindi $f^{-1}(x) = \log_a x$ definita in $(0, +\infty)$.

Dove è definita $f^{-1} \circ f$? In $\mathbf{R}$!
Dove è definita $f \circ f^{-1}$? In $(0, +\infty)$!

Principali proprietà del logaritmo:

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
2. $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
3. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$

Dimostrazione.

1. Se $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$ si ha, per definizione, che
$$a^{y_1} = x_1\,, \qquad a^{y_2} = x_2\,.$$
Allora
$$x_1 x_2 = a^{y_1 + y_2}$$
cioè
$$\log_a(x_1 x_2) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2\,.$$

2. $\log_a 1 = 0$, per cui $0 = \log_a \frac{1}{x}x = \log_a \frac{1}{x} + \log_a x$

3. $y = \log_a(x^\alpha)$, $z = \log_a x$, per cui $a^y = x^\alpha$, $a^z = x \Rightarrow a^{z\alpha} = x^\alpha$ per cui $y = z\alpha$

Osservazione - $\log_a x$ e $\log_b x$ sono proporzionali. Infatti, presi $a \neq 1$, $b \neq 1$, si ha, poiché $x = a^{\log_a x}$,

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_b a \log_a x \,.$$

Esempio: $\log_a(x^2)$ non è $2\log_a x$, ma $2\log_a |x|$!

Traslazioni - Noto il grafico di $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è semplice, fissato $c \in \mathbf{R}$, disegnare il grafico di $x \mapsto f(x+c)$ e di $x \mapsto f(x) + c$.

Esempi:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 1/x$
3. $f(x) = x^2$

Data la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ è sempre possibile trovare α, β, γ tali che

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x - \beta)^2 + \gamma \,.$$

Tali valori sono dati da

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = -\dfrac{b}{2a} \\ \gamma = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

Esempio: disegnare il grafico di $f(x) = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2$

1.4 Funzioni trigonometriche

Presa una circonferenza centrata nell'origine di un piano cartesiano e di raggio 1 consideriamo un punto p appartenente alla circonferenza. Consideriamo la semirette uscente dall'origine e passante per il punto P. Questa forma un angolo assieme alla semiretta uscente dall'origine che rappresenta le coorinate positive sull'asse delle ascisse. Tale angolo insiste su un arco di circonferenza. Diciamo che la misura dell'angolo è pari alla lunghezza dell'arco di circonferenza e l'unità di misura dell'angolo viene detta *radiante*. Per definizione quindi l'angolo giro ha misura 2π, la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Definiamo le funzioni sen e $\cos$ nel modo seguente: dato il punto P

$$(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

rappresentano le coordinate del punto P e ϑ è l'angolo, misurato a partire dalla semiretta delle ascisse positive in senso antiorario, individuato dalla semiretta uscente dall'origine e passante per P.
Per definizione si ha

$$\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$$

1. Estensione periodica delle funzioni senc e $\cos$ da $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ a $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (definizione di periodo e funzione periodica)

2. $\operatorname{sen}(-\vartheta) = -\operatorname{sen}\vartheta$, $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$

3. formule di addizione:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

4. Alcuni valori:

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0

Sono invertibili? NO!! però opportunamente ristrette ... Esistono infinite restrizioni iniettive e suritttive in $[-1, 1]$. Per convenzione e consuetudine si definiscono

$$\arccos y := f^{-1}(y) \qquad \text{dove} \quad f : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

$$\operatorname{arcsen} y := g^{-1}(y) \qquad \text{dove} \quad g : \begin{array}{ccc} [-\pi/2,\pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

Disegnare i grafici!

Se $\cos\vartheta \neq 0$ si definisce la funzione tangente come

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}$$

Grafico della tangente (in $\mathbf{R}$).

Anche in questo caso si può costruire un'inversa, detta arcotangente, definita nel modo seguente:

$$\operatorname{arctg} y := h^{-1}(y) \qquad \text{dove} \quad h: \begin{array}{ccc} (-\pi/2, \pi/2) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

Disegnare il grafico dell'arcotangente.

1.5 Equazioni e disequzioni

1. I grado
2. II grado
3. di grado superiore al secondo
4. razionali (e sistemi)
5. con il modulo
6. irrazionali
7. esponenziali
8. logaritmiche
9. trigonometriche

****

1. Risolvere $ax + b \geqslant 0$ - parallelismo con le rette.
   Esempi: $16x - 4 \geqslant 8 - 2x$ e $-2x + 3 \geqslant 8$
2. $6x^2 - 6x - 12 \geqslant 0$

   a) risolvo l'equazione, radici -1 e 2, e guardo il segno del coefficiente di II grado e il segno della disequazione

   b) oppure scompongo in $6(x + 1)(x - 2)$ e studio il segno dei singoli fattori

   La soluzione è un insieme!! ed è uno dei seguenti: $\emptyset$, un solo punto, un intervallo, unione di due semirette.

3. Non ci sono regole per risolvere una generica equazione polinomiale, se non per le equazioni di grado inferiore al quinto (la formula per quelle di terzo e quarto è complicata). Alcuni casi semplici si possono comunque risolvere: ad esempio $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ e equazioni di grado superiore al secondo di cui però si conoscono alcune radici.
   Il polinomio $-6x^3 - 3x + 9 \geqslant 0$ ha 1 come radice, divido per $x - 1$ e ottengo $(-6x^2 - 6x - 9)(x - 1) \geqslant 0$
4. $\dfrac{3x - 1}{2x - 1} > 0.$

   Soluzione: $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 1/3 \vee x > 1/2\} = (-\infty, 1/3) \cup (1/2, +\infty)$.

5. $\left|\dfrac{2x-1}{1-x}\right| \geqslant 2$. Diventa

$$\frac{2x-1}{1-x} \geqslant 2 \quad \vee \quad \frac{2x-1}{1-x} \leqslant -2$$

che ha come soluzione $x \in [3/4, 1) \cup (1, +\infty)$.

6. a) In generale (per n dispari dipende dalla definizione di radice n-esima, si preferisce la seconda, ma ...)

$$n \text{ dispari} \quad \sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) > q(x)^n$$

$$\text{oppure} \quad \sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) > q(x)^n \end{cases}$$

$$n \text{ pari} \quad \sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q(x) \geqslant 0 \\ p(x) > q(x)^n \end{cases}$$

b) $\sqrt{1-x^2} > 2x$ se elevo al quadrato elimino la radice, però ...
Se $2x < 0$ la disuguaglianza è sempre vera a patto che abbia senso la radice, cioè che valga $1 - x^2 \geqslant 0$, se $2x \geqslant 0$ posso elevare al quadrato e ottenere un sistema

$$\begin{cases} 1 + x^2 > 4x^2 \\ 2x \geqslant 0 \end{cases}$$

Soluzione $[-1, 0) \cup [0, 1/\sqrt{3}) = [-1, 1/\sqrt{3})$.

c) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{1-x^2}$
Le due radici hanno senso se e solo se $2x - 1 \geqslant 0$ e $1 - x^2 \geqslant 0$, cioè $x \in [1/2, 1]$. Elevo al quadrato e risolvo

$$2x - 1 < 1 - x^2 \qquad \text{con } x \in [1/2, 1]\,.$$

Soluzione: $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}) \cap [1/2, 1] = [1/2, -1+\sqrt{3})$.

d) $\sqrt[3]{1-x^4} \geqslant x^{2/3}$
Se $x < 0$ l'espressione $x^{2/3}$ non ha senso, per cui consideriamo $x \geqslant 0$. Elevando al cubo ci si riduce ad una disequazione di secondo grado in x^2. Soluzione: $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

7. a) $3^{2x-4} - 43^{x-2} + 3 > 0$
   Si pone $t = 3^{x-2}$ ($t > 0$!!!). La disequazione diventa $t^2 - 4t + 3 > 0$ che ha come soluzione $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, ma poiché $t > 0$ si riduce a $(0, 1) \cup (3, +\infty)$, cioè

$$0 < 3^{x-2} < 1 \quad \vee \quad 3^{x-2} > 3 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

   E se avessi avuto $(1/3)^{2x-4} - 4(1/3)^{x-2} + 3 > 0$? Soluzione $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

   b) $8^{x+1} \geqslant 2^{x^2} \Longleftrightarrow 2^{3(x+1)} \geqslant 2^{x^2}$

   c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x+1)} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

8. $\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) < 1$. Applico $x \mapsto (1/2)^x$ (che è decrescente) ad entrambi i membri, e ottengo

$$(1/2)^{\log_{1/2}\frac{x^2}{1+x^2}} > (1/2)^1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} > \frac{1}{2}$$

   che ha come soluzione $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

9. a) $2\cos x + \operatorname{sen}^2 x < 2$
   $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ per cui ottengo $\cos^2 x - 2\cos x + 1 > 0$. Sostituendo t a $\cos x$ ottengo $(t-1)^2 > 0$ che è vera sempre, tranne per $t = 1$, cioè per $\cos x = 1$, quindi la disuguaglianza è vera solo per $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

   b) $\frac{x^2-3x-4}{\operatorname{sen} x} < 0$
   Soluzione: un casino

   c) $3\operatorname{sen} x + 3\sqrt{3}\cos x < 0$
   Se $\cos x \neq 0$ divido per $cosx$ e ottengo $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

1.6 Un po' di calcolo combinatorio

1. Al ristorante posso scegliere fra

   3 antipasti
   4 antipasti
   5 antipasti
   2 antipasti

   Quanti pasti differenti posso fare? Risposta: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

2. Quante differenti schedine posso giocare? $3^{13} = 1.594.323$

3. Quante differenti targhe del tipo $AB123CD$ esistono? (senza le lettere I, O, Q, U)
   Risposta: $22^4 \cdot 10^3 = 234.256.000$

4. In quanti modi diversi si possono disporre in fila n oggetti? Immaginiamo di avere n palline $p_1, \dots p_n$ ed n scatole $S_1, \dots S_n$ messe in fila. Dobbiamo scegliere la prima pallina da mettere nella prima scatola (e abbiamo n possibili scelte), poi la seconda (abbiamo $n-1$ possibili scelte perché una è già stata messa nella prima scatola), e così via. Tutti possibili modi diversi sono dati allora da

   $$n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{(permutazioni di } n \text{ oggetti)}$$
   si pone per definizione $0! := 1$.

   Esempio: tre palline p_1, p_2, p_3:

   $$\begin{array}{c} p_1, p_2, p_3 \\ p_1, p_3, p_2 \\ p_2, p_1, p_3 \\ p_2, p_3, p_1 \\ p_3, p_1, p_2 \\ p_3, p_2, p_1 \end{array}$$

5. Tra n persone quante possibili strette di mano ci possono essere?
   Bisogna contare tutti i modi possibili di scegliere due persone tra n, cioè

   $$\frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Disposizioni di k oggetti scelti fra n ($k \leqslant n$): con il termine *disposizione* di k oggetti scelti fra n si intende una sequenza ordinata di k oggetti scelti fra n.

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinazioni di k oggetti scelti fra n ($k \leqslant n$): si scelgono sempre k oggetti da n, ma non interessa l'ordine in cui sono stati presi, ma solo quali oggetti sono stati presi.

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tale quantità si denota anche con $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ ed è chiamato *coefficiente binomiale* (il nome sarà chiaro più avanti).

Per fare un esempio: supponiamo di avere un sacchetto con k palline verdi e m palline rosse, $n = m + k$ scatole numerate, di pescare dal sacchetto una pallina alla volta e di mettere ciascuna pallina in una scatola cominciando dalla prima.
Segnamo la sequenza dei numeri corrispondenti alle scatole nelle quali è finita una pallina verde. Se contiamo tutte le possibili sequenze di k numeri così ottenute avremo le combinazioni di k elementi scelti fra n. Si osservi che se si scambiano due palline verdi la sequenza ottenuta non è distinguibile dalla precedente.
Se le palline fossero numerate e potessimo quindi distinguere le sequenze avremmo le disposizioni, che sono ovviamente di più. Si osservi che in questo secondo caso scambiando due palline verdi tra loro le due sequenze risultano distinguibili.

6. Ho un sacchetto con n palline rosse e m palline verdi indistinguibili. Pesco tutte le palline e le metto in fila. Quante possibilità diverse ci sono?
   Supponiamo di avere $K = n + m$ scatole, di disporle in fila e di mettere in ogni scatola una pallina. Contare le diverse possibilità equivale a contare le possibilità di scegliere dove andranno le palline rosse (le verdi di conseguenza andranno nelle rimanenti), cioè equivale a scegliere n scatole fra K (senza dare importanza all'ordine di scelta). Per cui sono

   $$\frac{K!}{(K-n)!n!} = \frac{K!}{m!n!}.$$

   E se le palline fossero numerate? Allora è come permutare $n+m$ oggetti diversi e quindi

   $$K!$$

D'altra parte è come scelgliere n scatole fra K per le palline rosse, distinguendo le palline, dopodiché permutare le palline verdi nelle uniche m scatole rimaste, per cui

$$\frac{K!}{(K-n)!} = \frac{K!}{m!} \quad \text{per le palline rosse}\,, \qquad m! \quad \text{per le palline verdi}\,,$$

per cui il risultato è $\frac{K!}{m!}m! = K!$.

7. Il numero di anagrammi della parola MATEMATICA (anagrammi formali, senza badare all'esistenza della parola in italiano). Abbiamo dieci lettere, di cui tre A, due T, due M. Allora considero tutte le permutazioni delle dieci lettere, togliendo tutte le possibili permutazioni della lettere A, T, M,

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151.200\,.$$

8. In quanti modi diversi quattro giocatori di bridge possono ricevere ciascuno tredici carte? Abbiamo 52 carte, 4 scatole (i giocatori), scegliamo 13 carte fra 52 senza badare all'ordine, quindi

$$1^\circ \text{ giocatore} \qquad \frac{52!}{13!\,(52-13)!}\,.$$

Dopodiché rimangono 39 carte, scelgo ancora 13 carte fra 39

$$2^\circ \text{ giocatore} \qquad \frac{39!}{13!\,(39-13)!}\,.$$

Per il terzo rimangono

$$3^\circ \text{ giocatore} \qquad \frac{26!}{13!\,(26-13)!}\,.$$

possibilità, il quarto si becca quello che rimane. Quindi

$$\frac{52!}{13!\,39!} \cdot \frac{39!}{13!\,26!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} \cdot 1 = \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}\,.$$

9. Superenalotto: quante possibilità ci sono?
Debbo scegliere sei numeri tra novanta, non mi importa l'ordine in cui li scelgo, quindi

$$\frac{90!}{(90-6)!6!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{720} = 622.614.630\,.$$

Conviene giocare?

10. Fra n persone quante possibilità ci sono che ve ne siano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno?
Conto le possibilità in cui ognuno compie gli anni in un giorno diverso:

365^n	il numero di possibilità totali
$365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$	il numero di possibilità in cui ognuno compie gli anni in un giorno diverso

Conclusione: le possibilità che vi siano almeno due che compiono gli anni lo stesso giorno sono

$$p_n = 365^n - 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

Persone	Casi favorevoli	Possibilità totali	Rapporto
2	p_2	365^2	~ 0.002739726
5	p_5	365^5	~ 0.03513172
10	p_{10}	365^{10}	~ 0.124206138
15	p_{15}	365^{15}	~ 0.259041857
20	p_{20}	365^{20}	~ 0.416275876
22	p_{22}	365^{22}	~ 0.481516276
23	p_{23}	365^{23}	~ 0.511346846

Si osservi quindi che la probabilità, supponendo la distribuzione della probabilità di nascere in un certo giorno costante e pari a 1/365 e fingendo che non ci siano gli anni bisestili, di avere almeno due persone che compiono gli anni nello stesso giorno diventa più del 50% non appena il gruppo considerato è composto da almeno ventitrè persone.

11. n persone $(2 \leqslant n \leqslant 7)$ lavorano per sei giorni e hanno un giorno libero a settimana. Quante sono le possibilità che almeno due persone abbiano il giorno libero nello stesso giorno?
Conto le possibilità totali e sottraggo le possibilità che tutti abbiano il giorno libero in giorni diversi. 7^n sono le possibilità totali, per cui

$$7^n - 7 \cdot \ldots \cdot (7 - n + 1) = 7^n - \frac{7!}{(7-n)!}\,.$$

$n = 1$	$7 - 7 = 0$
$n = 2$	$49 - 42 = 7$
$n = 3$	$343 - 210 = 133$
$n = 4$	$2401 - 840 = 1561$
$n = 5$	$16807 - 2520 = 14287$
$n = 6$	$117649 - 5040 = 112609$
$n = 7$	$7^n - 7!$
$n \geqslant 8$	7^n

12. Dati due numeri positivi a e b vogliamo scrivere

$$(a+b)^n\,.$$

Tale quantità non è altro che

$$\underbrace{(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

per cui il risultato è la somma di termini che sono prodotti di n elementi

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n$$

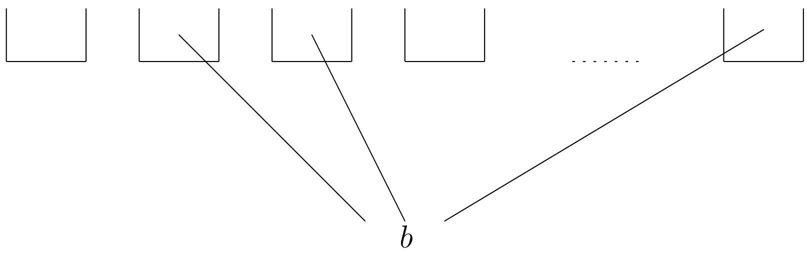
dove $x_i \in \{a,b\}$, $i = 1,\ldots n$. Si tratta quindi di contare tali elementi. Si osservi innanzitutto che gli addendi sono tutti del tipo

$$a^{n-k}b^k$$

per qualche $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Il termine del tipo a^n è unico. I termini che contengono una sola b e sono quindi del tipo

$$a^{n-1}b$$

sono n. Come contare in generale i termini del tipo $a^{n-k}b^k$?



Immaginiamo di avere n scatole. Tutti i termini $a^{n-k}b^k$ possono essere ottenuti scegliendo k scatole nelle quali mettiamo il termine b, nelle altre andrà automaticamente il termine a. Quante sono tali possibilità? Di fatto ciò è equivalente a contare tutti i modi che si hanno di scegliere k elementi fra n senza dare importanza all'ordine, cioè le combinazioni di k elementi scelti fra n, cioè

$$\text{vi sono} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{termini del tipo} \quad a^{n-k}b^k \,.$$

Allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \,.$$

Esempi:

$$
\begin{array}{ll}
n=2 & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
n=3 & (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
n=4 & (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
n=5 & (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
n=6 & (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{array}
$$