CAPITOLO 6.1

MANIPOLAZIONE DI GRAFICI DI FUNZIONI

Data una funzione f, che per semplicità penseremo definita su $\mathbb{R}$, abituiamoci a disegnare il grafico di alcune sue manipolazioni.

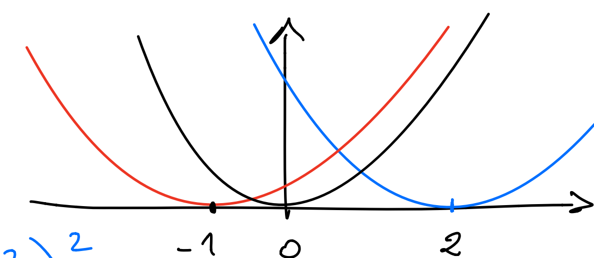
Cominciamo con semplici operazioni quali le traslazioni e la moltiplicazione per un fattore costante:

- $T_c f(x) = f(x-c)$ trasla il grafico verso DESTRA di c

Se $c < 0$ traslare a destra di c significa traslare a sinistra di $-c$

Esempio

$f(x) = x^2$



$f(x-2) = (x-2)^2$

$f(x+1) = f(x-(-1)) = (x+1)^2$

- $f(x)+c$ è un'altra funzione il cui grafico è traslato verso l'ALTO di c

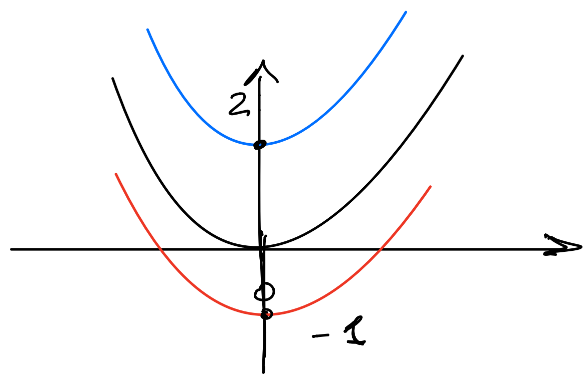
(se $c<0$: verso l'alto di c = = verso il basso di $-c$)

Esempio:

$f(x) = x^2$

$f(x)+2 = x^2+2$

$f(x)-1 = x^2-1$



- $c\,f(x)$ riscala di c ogni valore
("aumenta" se $c>1$
"diminuisce" se $c \in (0,1)$)

Mettendo assieme queste cose si può disegnare il grafico di una funzione che sia ottenuta con le tre operazioni di sopra a partire da una data funzione f.

Esempio: $a x^2 + b x + c$

$\exists\ \alpha, \beta, \gamma > 0$ tali che

$$a x^2 + b x + c = \alpha (x-\beta)^2 + \gamma$$

Per trovarli è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} a = \alpha & (\text{eguagliando i coeff. di } x^2) \\ b = -2\alpha\beta & (\text{" " " " } x) \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma & (\text{" " " " } 1) \end{cases}$$

e si ottengono

$$\alpha = a$$
$$\beta = -\frac{b}{2a}$$
$$\gamma = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

per cui sapendo disegnare $x \mapsto x^2$

possiamo prima traslare di β e ottenere

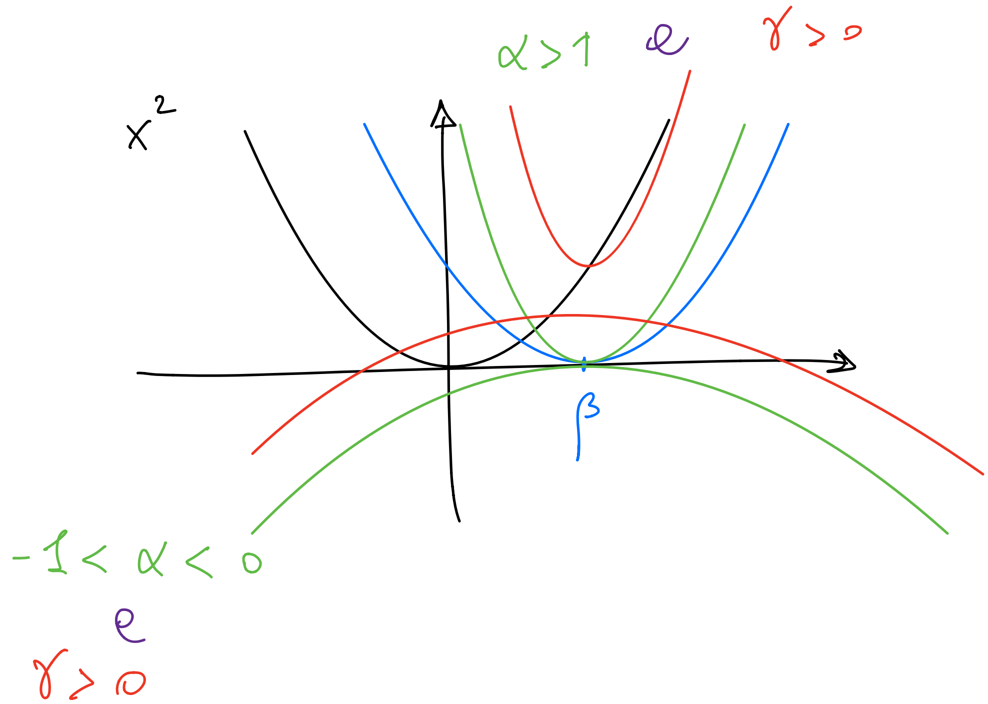
$$x \mapsto (x-\beta)^2$$

poi moltiplicando per α ottenere

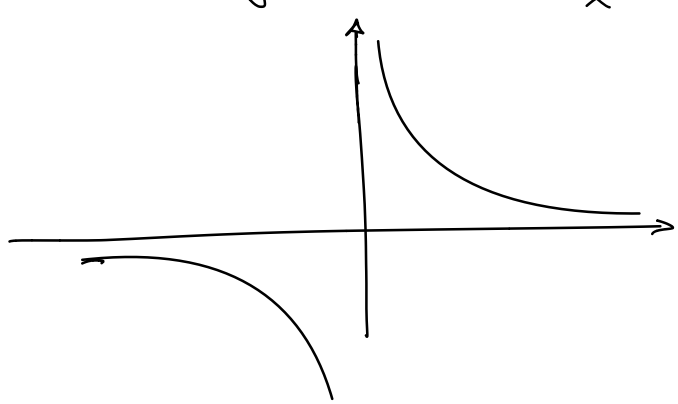
$$x \mapsto \alpha (x-\beta)^2$$

Infine aggiungendo γ

$$x \mapsto \alpha (x-\beta)^2 + \gamma = a x^2 + bx + c$$



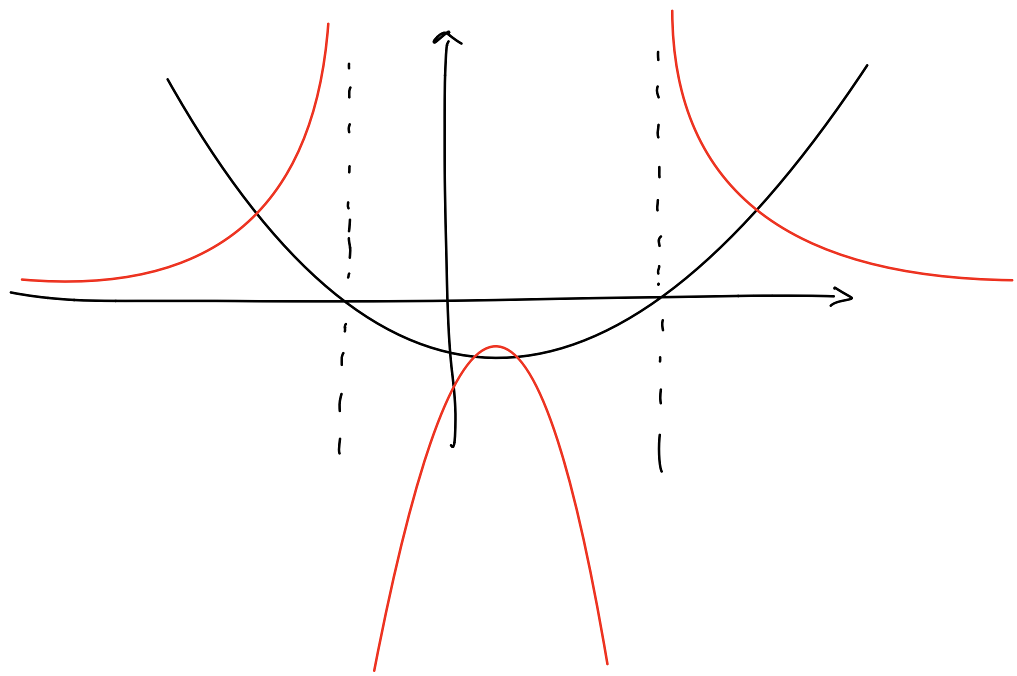
Conoscendo il grafico di $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$



è possibile anche disegnare il grafico di

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Nel caso il polinomio di 2° grado abbia <u>due</u> radici distinte, ad esempio, si avrà

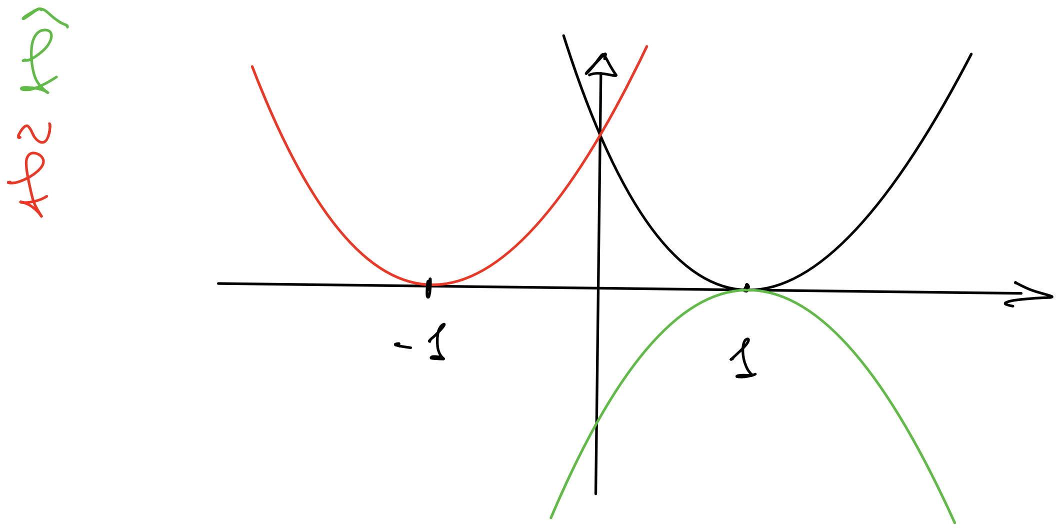


Qui serve sapere quale sia il grafico di $\frac{1}{x}$
perchè se il polinomio di 2° grado ha
due radici distinte x_1 e x_2 si avrà

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (\text{E}\, x)$$

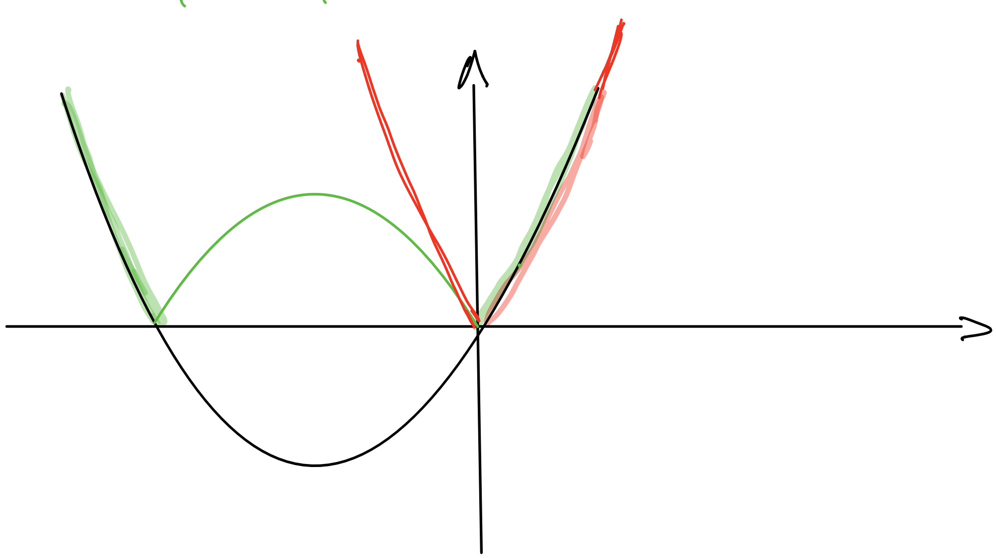
Altri due semplici esempi sono:
date $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quali sono i grafici
delle due funzioni $\hat{f}, \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\hat{f}(x) = -f(x)$ $\quad \tilde{f}(x) = f(-x)$?

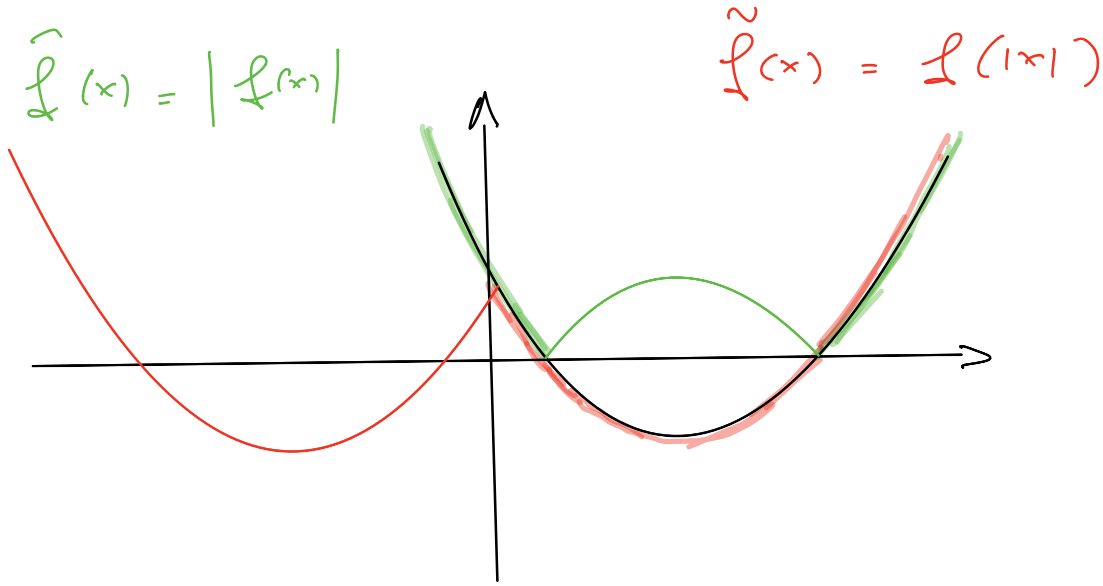
Sia $f(x) = (x-1)^2$



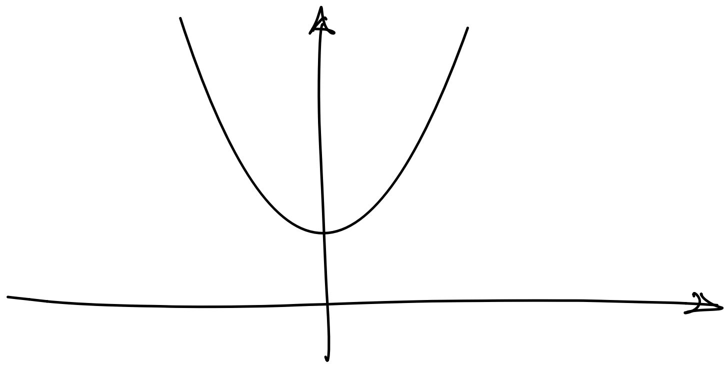
Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si disegni

$\hat{f}(x) = |f(x)|$ e $\tilde{f}(x) = f(|x|)$

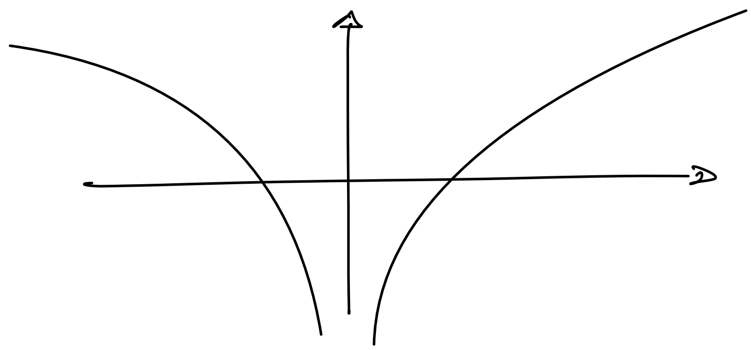



$\tilde{f}(x) = |f(x)|$
$\tilde{f}(x) = f(|x|)$

$x \mapsto e^{x^2}$



$x \mapsto \log(x^2)$



$\operatorname{sen} x^2$