

# 10 - Funzioni derivabili

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 20 NOVEMBRE 2023

Si consideri una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo. Dati due punti  $x, x_o \in I$ ,  $x \neq x_o$ , si definisce *rapporto incrementale* di  $f$  in  $x_o$  il numero

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Chiaramente i ruoli di  $x$  e  $x_o$  possono essere invertiti, ma solitamente si pensa ad uno dei due punti fissati. Per questo a volte il rapporto incrementale in  $x_o$  si scrive

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Tale rapporto misura la variazione media di  $f$  nell'intervallo  $[x_o, x_o + h]$  o  $[x_o + h, x_o]$ . Si osservi come tale rapporto rappresenta il coefficiente angolare della funzione

$$r(y) := f(x_o) + \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(y - x_o)$$

dove  $x$  e  $x_o$  sono fissati (mentre  $y$  indica la variabile della funzione  $r$ ) oppure, in maniera equivalente,

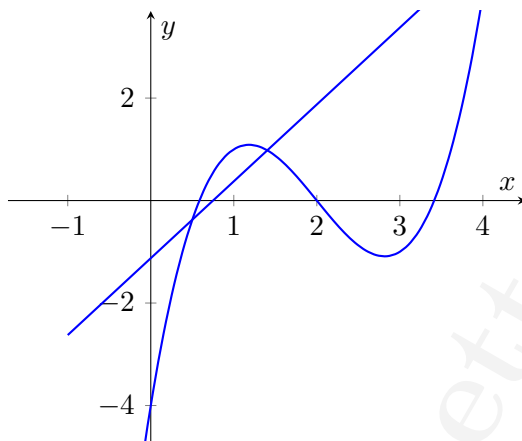
$$r(x) := f(x_o) + \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}(x - x_o)$$

dove questa volta sono fissati  $x_o$  e  $h$  (mentre questa volta indichiamo la variabile della funzione  $r$  con la lettera  $x$ , ma questa scelta è arbitraria e ininfluyente). Nella figura che segue sono rappresentati il grafico di una funzione  $f$  e il grafico della retta  $r$ . Le proiezioni sull'asse delle ascisse dei punti in cui si incontrano i due grafici sono  $x_o$  e  $x$ . Per semplicità si supponga che il minore dei due sia  $x_o$  e il maggiore sia  $x$ .

Si osservi anche come questa retta passa per i due punti

$$(x_o, f(x_o)) \quad \text{e} \quad (x, f(x)).$$

Quindi può essere individuata in maniera univoca dal fatto che passa per il punto  $(x_o, f(x_o))$  e ha coefficiente angolare  $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$  oppure perché passa per i due punti  $(x_o, f(x_o))$  e  $(x, f(x))$ .



## 1. DERIVABILITÀ

**Definizione 1.1.** Siano  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo e  $x_o \in I$ . Diciamo che  $f$  è derivabile in  $x_o$  se il seguente limite esiste ed è finito

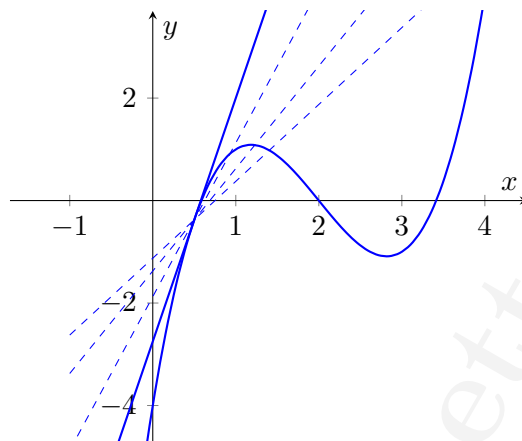
$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_o \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

e si denota con  $f'(x_o)$  o con  $\frac{df}{dx}(x_o)$  o con  $Df(x_o)$ .

Si dirà che  $f$  è derivabile in  $I$  se  $f$  è derivabile in ogni punto di  $I$ .

In figura sono riportate alcune possibili rette con diverse possibili scelte di  $x$ , mentre  $x_o$  (che, come precedentemente detto, supponiamo minore di  $x$ ) rimane fissato. Si osservi come queste rette (che sono tratteggiate nella figura che segue) sono ben individuate in maniera unica (da due informazioni: o due punti del grafico di  $f$  che devono stare sul grafico di  $r$  oppure un punto del grafico e il coefficiente angolare).

Si osservi anche come queste rette si muovano al variare di  $x$ . L'esistenza della derivata di  $f$  nel punto  $x_o$ , che è semplicemente un numero, da un punto di vista geometrico seleziona una speciale retta: fra tutte le infinite rette passanti per il punto  $(x_o, f(x_o))$  ne seleziona una, che noi chiameremo retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_o, f(x_o))$ .



Sia  $r$  la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_o, f(x_o))$ , cioè

$$r(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Si osservi come questa retta soddisfi

$$(2) \quad \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_o \\ x \in I}} (f(x) - r(x)) &= 0, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_o \\ x \in I}} \frac{f(x) - r(x)}{x - x_o} &= 0. \end{aligned}$$

**Osservazione** - Si potrebbe definire la derivata anche per funzioni  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ , dove  $D$  non è necessariamente un intervallo, in un punto  $x_o$  che sia di accumulazione per  $D$ , ma noi ci limiteremo a considerare intervalli e un punto  $x_o$  di tale intervallo. Vediamo due possibili casi.

Il primo è quello in cui  $x_o$  è un punto interno ad  $I$ , ad esempio  $x_o \in (a, b) = I$ . Il secondo è quello in cui  $x_o = a$  e  $I$  è  $[a, b)$  o  $[a, b]$  o  $[a, +\infty)$ . In questo caso il limite (1) può essere riscritto (supponendo che  $I$  sia  $[a, b)$ )

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in [a, b)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si osservi che in questo caso la variabile  $x$  può essere solo maggiore di  $a$ . Per questo a volte il valore di tale limite, se esiste ed è finito, viene chiamato derivata *destra* per sottolineare il fatto che  $x$  può essere considerato solamente “a destra” di  $a$ .

In maniera analoga si parla di derivata sinistra.

**Derivate destra e sinistra** - In generale, anche se  $x_o$  fosse un punto interno all'intervallo  $I$ , possiamo comunque definire le derivate destra e sinistra.

Chiameremo derivata destra e derivata sinistra, se esistono finiti, rispettivamente i seguenti limiti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_o^+ \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_o^- \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

**Esempi -**

•  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = c$  con  $c \in \mathbf{R}$ . Allora  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

La verifica è presto fatta.

•  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbf{N}$ . Allora  $f'(x) = n x^{n-1}$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Si osservi che

$$x^n - x_o^n = (x - x_o)(x^{n-1} + x^{n-2}x_o + x^{n-3}x_o^2 + \dots + x x_o^{n-2} + x_o^{n-1})$$

da cui

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = x^{n-1} + x^{n-2}x_o + x^{n-3}x_o^2 + \dots + x x_o^{n-2} + x_o^{n-1}.$$

Passando al limite per  $x \rightarrow x_o$  si conclude.

•  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = |x|$  con  $c \in \mathbf{R}$ . Allora

$$\text{se } x \neq 0 \text{ si ha } f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$

mentre

$$\text{in } 0 \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

•  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Allora  $f' : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  e  $f'(x) = (2\sqrt{x})^{-1}$ .

Si ha

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}}$$

quindi passando al limite si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}.$$

Se  $x_o = 0$  la derivata non esiste in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

**Osservazione -** Se  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo, è derivabile in  $x_o$  allora  $f$  è continua in  $x_o$ .

È sufficiente verificare che  $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$ . Per far ciò scriviamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) - f(x_o)) &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} (x - x_o) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \lim_{x \rightarrow x_o} (x - x_o) = f'(x_o) \lim_{x \rightarrow x_o} (x - x_o) = 0. \end{aligned}$$

Ovviamente il viceversa è falso. Vediamo alcuni esempi.

Primo:  $f(x) = |x|$  con  $x \in \mathbf{R}$ . La funzione  $f$  è continua in 0, ma non derivabile in 0.

Secondo:  $f(x) = \sqrt{x}$  con  $x \in [0, +\infty)$ . La funzione  $f$  è continua in 0, ma non derivabile in 0.

Terzo: si consideri la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione  $f$  è continua in 0, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

però il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

non ammette limite per  $x \rightarrow 0$ .

Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni derivabili in  $x_o$ ,  $x_o \in I$ . Allora

- i)  $(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$ ,
- ii) dato  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $(\lambda f)'(x_o) = \lambda f'(x_o)$
- iii)  $(fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$
- iv) se  $g(x_o) \neq 0$  allora  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o) = -\frac{g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$

Dimostrazioni - Scriviamo i rapporti incrementali.

i)

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

ii)

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_o)}{x - x_o} = \lambda \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

iii)

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_o)g(x_o)}{x - x_o} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_o)g(x) + f(x_o)g(x) - f(x_o)g(x_o)}{x - x_o} = \\ &= g(x) \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + f(x_o) \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}. \end{aligned}$$

Usando la continuità di  $g$  in  $x_o$  si conclude.

iv) Per il teorema della permanenza del segno ( $g$  è non nulla e continua in  $x_o$ ) si ha che  $g$  è non nulla in un intorno di  $x_o$ , per cui ha senso valutare  $g^{-1}$  in un intorno di  $x_o$ . Si ha

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_o)}}{x - x_o} = - \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \frac{1}{g(x)g(x_o)}.$$

**Osservazione 1.2.** - Si osservi che da iii) e iv) si ricava, scrivendo  $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ ,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = - \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}.$$

**Regola della catena** - Siano  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbf{R}$  funzioni,  $f$  derivabile in  $x_o \in I$ ,  $g$  derivabile in  $y_o = f(x_o) \in J$ . Allora  $f \circ g$  è derivabile in  $x_o$  e

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)) f'(x_o).$$

Dimostrazione -

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_o)}{x - x_o} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o}.$$

Si osservi che se  $f(x) = f(x_o)$  in un intorno di  $x_o$  tale rapporto incrementale è nullo. Supponiamo allora che  $f$  non sia costante in un intorno di  $x_o$ , possiamo moltiplicare e dividere per  $f(x) - f(x_o)$ . Allora

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{f(x) - f(x_o)} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} & \text{se } f(x) \neq f(x_o) \\ 0 & \text{se } f(x) = f(x_o) \end{cases}$$

Definendo

$$\gamma(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_o)}{y - y_o} & \text{se } y \neq y_o \\ g'(y_o) & \text{se } y = y_o \end{cases}$$

(si osservi che  $\gamma$  risulta continua in  $y_o$ ) si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} = \gamma(f(x)) \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

e passando al limite si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{g(f(x)) - g(f(x_o))}{x - x_o} = g'(f(x_o)) f'(x_o). \quad \square$$

**Derivazione delle funzioni inverse** - Siano  $I$  e  $J$  due intervalli,  $f : I \rightarrow J$  continua e invertibile (si osservi che  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è continua).

Si supponga  $f$  derivabile in  $x_o \in I$ . Allora  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è derivabile in  $y_o = f(x_o)$  se e solo se  $f'(x_o) \neq 0$  ed in tal caso si ha

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)}.$$

Dimostrazione -

$$\lim_{y \rightarrow y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}. \quad \square$$

Controesempio: la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3$  è biiettiva e derivabile, ma  $f'(0) = 0$ . La sua inversa non è derivabile in 0.

## 2. DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Vediamo ora di calcolare esplicitamente le derivate di alcune funzioni.

-  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

-  $f(x) = a^x$ ,  $f'(x) = \log a a^x$ ,  $a > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h) \log a} - e^{x \log a}}{h} = \\ &= e^{x \log a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} \log a = a^x \log a. \end{aligned}$$

-  $f(x) = \log x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - \log x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log x + \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Si provi per esercizio ad usare la formula per la funzione inversa per calcolare la derivata di  $x \mapsto \log x$ .

-  $f(x) = \log_a x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}$ .

-  $f(x) = x^\alpha$ ,  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $x$  appartenenete al dominio naturale tranne che nei casi in cui  $\alpha \in (0, 1)$ , casi nei quali escludiamo  $x = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

-  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $f'(x) = \text{cos } x$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \text{cos } h + \text{cos } x \text{sen } h - \text{sen } x}{h} = \\ &= \text{sen } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h^2} h + \text{cos } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = \text{cos } x. \end{aligned}$$

-  $f(x) = \text{cos } x$ ,  $f'(x) = -\text{sen } x$  (EX)

-  $f(x) = \text{arcsen } x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f = g^{-1}$ , dove  $g : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $g(t) = \text{sen } t$ , per cui

$$(g^{-1})'(x_o) = \frac{1}{g'(t_o)} = \frac{1}{\text{cos } t_o}$$

dove  $g(t_o) = x_o$  e  $t_o = \text{arcsen } x_o$ . Si osservi che  $\text{cos } t_o > 0$ , per cui

$$\frac{1}{\text{cos } t_o} = \frac{1}{\text{cos}(\text{arcsen } x_o)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen } x_o)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_o^2}}.$$

-  $f(x) = \text{arccos } x$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

-  $f(x) = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$ .

$$f'(x) = \frac{\text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{cos}^2 x} = \frac{1}{\text{cos}^2 x}.$$

-  $f(x) = \text{arctg } x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

$f = g^{-1}$ , dove  $g : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(t) = \text{tg } t$ , per cui

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(x_o) &= \frac{1}{g'(t_o)} = \frac{1}{\frac{1}{\text{cos}^2 t_o}} = \text{cos}^2 t_o = \frac{\text{cos}^2 t_o}{\text{sen}^2 t_o + \text{cos}^2 t_o} = \\ &= \frac{1}{1 + \text{tg}^2 t_o} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \text{arctg } x_o} = \frac{1}{1 + x_o^2}. \end{aligned}$$

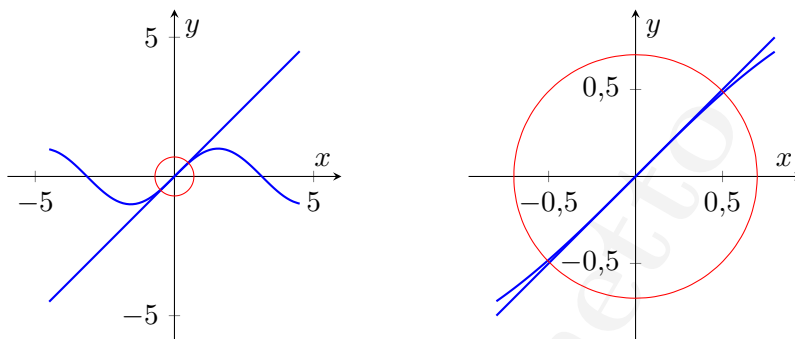
**Commenti** - Dai calcoli fatti per trovare le funzioni derivate di alcune funzioni elementari si vede come il calcolo dei limiti notevoli sia funzionale a calcolare le derivate di alcune funzioni (le prime sette che abbiamo calcolato).

Inoltre alcuni limiti notevoli altro non sono che l'espressione della derivata prima in un dato punto.

Nella figura seguente, a sinistra una parte del grafico di  $x \mapsto \text{sen } x$  in un intorno di 0 e della sua retta tangente in  $(0, 0)$ , a destra un ingrandimento



della parte cerchiata in rosso. Si ricordi il limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .



**Curiosità** - Il numero  $e$  appare in maniera naturale se si vuole fare la derivata della funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x$$

in una qualche base  $a > 0$  e si vuole che tale derivata valga 1 nel punto 1. Si avrà quindi che, prendendo l'incremento uguale ad  $1/n$  con  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e questo è 1 se  $a = e$ .

Altro esempio: si vuole valutare quanto si dovrebbe ricevere investendo un capitale  $C$  che ha come rendimento un certo interesse annuo  $i$ . Valutando gli interessi una sola volta a fine anno si ottiene

$$C_1 = C(1 + i).$$

Se si valutano gli interessi due volte all'anno, ogni sei mesi, si avrà un capitale  $C_{1,1/2} = C(1 + i/2)$  dopo sei mesi e

$$C_2 = C_{1,1/2} \left(1 + \frac{i}{2}\right) = C \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 > C_1.$$

a fine anno. Si noti che  $\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 > 1 + i$ . Se valutassimo gli interessi ogni quattro mesi si avrebbe il capitale  $C_{1,1/3} = C(1 + i/3)$  dopo quattro mesi,  $C_{2,1/3} = C_{1,1/3}(1 + i/3)$  dopo otto mesi e infine

$$C_3 = C \left(1 + \frac{i}{3}\right)^3 > C_2.$$

dopo un anno. Frazionando in  $n$  parti l'anno si otterrebbe un capitale

$$C_n = C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

e se si valutassero gli interessi istantaneamente il giusto capitale a fine anno dovrebbe essere

$$\bar{C} = e^i C > C_n \quad \text{qualunque sia } n \in \mathbf{N}.$$

Sembra che Leibniz ed Eulero siano stati i primi ad usare in maniera esplicita il numero  $e$ , sia per semplificare i calcoli riguardo la funzione esponenziale e logaritmica, sia per semplici modelli finanziari come quello appena descritto.

### 3. TEOREMI CLASSICI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

**Teorema 3.1** (Fermat). *Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  e  $x_o \in (a, b)$ ,  $x_o$  di minimo o di massimo locale per  $f$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_o$  allora  $f'(x_o) = 0$ .*

**Dimostrazione** - Si supponga che  $x_o$  sia di minimo locale. Per definizione esiste  $\delta > 0$  tale che  $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset (a, b)$  e per ogni  $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$  si ha che  $f(x) \geq f(x_o)$ . Allora si hanno

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} &\geq 0 && \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta), \\ \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} &\leq 0 && \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o). \end{aligned}$$

Da queste disuguaglianze e poiché  $f$  è derivabile si devono avere

$$\lim_{x \rightarrow x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0,$$

ma proprio perché  $f$  è derivabile in  $x_o$  esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

e a questo punto deve essere 0. □

**Osservazione 3.2.** - Attenzione! Il viceversa in generale non è vero. Si consideri, ad esempio, la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Si ha  $f'(0) = 0$ , ma 0 non è né di massimo né di minimo.

I punti che soddisfano  $f'(x) = 0$  sono detti *stazionari*.

I punti che soddisfano  $f'(x) = 0$  e che non sono né di minimo locale né di massimo locale sono detti *di flesso (orizzontale)*.

**Osservazione 3.3.** - Nonostante l'esempio precedente, se si debbono cercare i massimi e i minimi, oppure il massimo e/o il minimo, di una funzione  $f$  tra i candidati ci saranno sicuramente le soluzioni dell'equazione  $f'(x) = 0$ . In generale, se si devono trovare il massimo e il minimo di una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , questi vanno cercati in questa lista di candidati:

- i*) punti interni ad  $I$  nei quali  $f$  è derivabile e  $f'$  si annulla;
- ii*) punti interni ad  $I$  nei quali  $f$  non è derivabile;
- iii*) estremi dell'intervallo  $I$ .

**Esempio** - Si trovino il massimo e il minimo della funzione  $f : [0, 6] \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $f(x) = x$  se  $x \in [0, 3]$ ,  $f(x) = \frac{3}{4}(x - 5)^2$  se  $x \in (3, 6]$ . Allora i candidati sono  $\{0, 3, 5, 6\}$ , dove 5 è un punto di derivabilità e  $f'(5) = 0$ , 0 e 6 sono gli estremi dell'intervallo, 3 è un punto di non derivabilità.

**Esempio** - Anche se gli estremi non appartengono all'insieme va "controllato" il valore al bordo. Si consideri la funzione  $f : [0, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) := \operatorname{tg} x$ .  $f$  è derivabile in ogni punto del dominio e  $f'$  non si annulla mai nel dominio. Il punto 0 è un estremo dell'intervallo. Per concludere bisogna fare il limite nell'altro estremo, che è  $+\infty$ . Si conclude che  $f$  ha minimo in 0 e non ha massimo.

**Esempio** - Consideriamo  $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} \log \frac{1}{x}$ . La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \left( \log \frac{1}{x} + 1 \right) = -\frac{1}{x^2} (1 - \log x)$$

che si annulla per  $x = e$ . Quindi abbiamo i due candidati: 2, estremo dell'intervallo, ed  $e$ , punto stazionario. Facciamo il limite all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Vediamo come utilizzare questa informazione: si ha  $f(e) = -1/e < 0$ ,  $f(2) = -\frac{1}{2} \log 2 < 0$  e la funzione ha limite 0 all'infinito. Allora  $f$  ammette minimo e non ammette massimo (il minimo sarà il più piccolo tra i due valori  $f(2)$  e  $f(e)$ , che è  $f(e)$  anche se per ora non sappiamo mostrarlo).

Vediamo una curiosità. Si osservi che date due funzioni crescenti  $g, h$ , il loro prodotto è crescente nell'insieme nel quale entrambe sono positive e il loro prodotto è decrescente nell'insieme nel quale entrambe sono negative. Infatti, dati  $x$  e  $y$  con  $x < y$  si ha

$$\begin{aligned} g(x) < g(y), h(x) < h(y) \text{ e } g(x) > 0, h(x) > 0 &\implies g(x)h(x) < g(y)h(y), \\ g(x) < g(y), h(x) < h(y) \text{ e } g(y) < 0, h(y) < 0 &\implies g(x)h(x) > g(y)h(y). \end{aligned}$$

Negli altri casi non si può dire nulla, in generale. Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui  $g$  ed  $h$  sono decrescenti.

La funzione  $g(x) = x$  è crescente, la funzione  $h(x) = \log x$  è crescente, allora le funzioni  $x \mapsto g(1/x)$  e  $x \mapsto h(1/x)$  sono decrescenti. In particolare deduciamo da quanto appena visto che per  $x \in (0, 1)$ , cioè quando entrambe sono positive, il prodotto è decrescente, mentre per  $x > 1$  non possiamo dire nulla in generale (in particolare non sappiamo, senza altri strumenti, confrontare  $f(2)$  e  $f(e)$ ). Se si considera come dominio l'insieme  $[1/2, +\infty)$  e la stessa espressione per

$f$  si ha che

$$f(1/2) = 2 \log 2 > 0$$

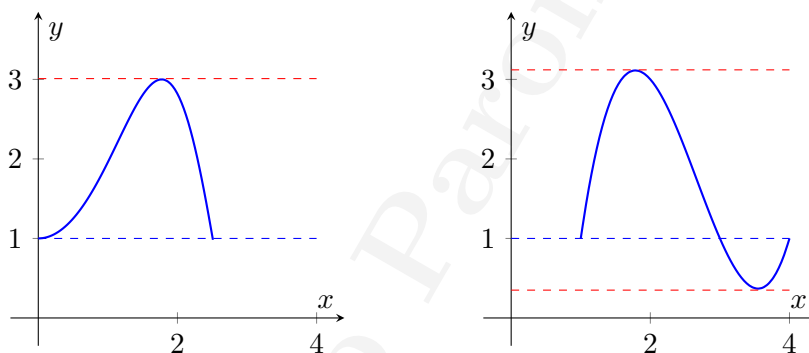
quindi questa volta possiamo concludere che  $f$  ammette massimo nel punto  $1/2$ .

**Teorema 3.4** (Rolle - seconda versione). *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua, derivabile in  $(a, b)$ , e si supponga che  $f(a) = f(b)$ .*

*Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .*

*Dimostrazione* - Per il teorema di Rolle, prima versione, esiste  $c \in (a, b)$  di estremo per  $f$ . Dal teorema di Fermat si conclude.  $\square$

In figura due possibili situazioni che verificano il teorema di Rolle.



**Teorema 3.5** (Lagrange, sul valor medio). *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua, derivabile in  $(a, b)$ . Allora esiste un punto  $c \in (a, b)$  tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Dimostrazione* - Si consideri la funzione  $g(x) = f(x) - r(x)$ , dove  $r$  è l'espressione di una retta passante per i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . L'espressione di  $r$  è data da

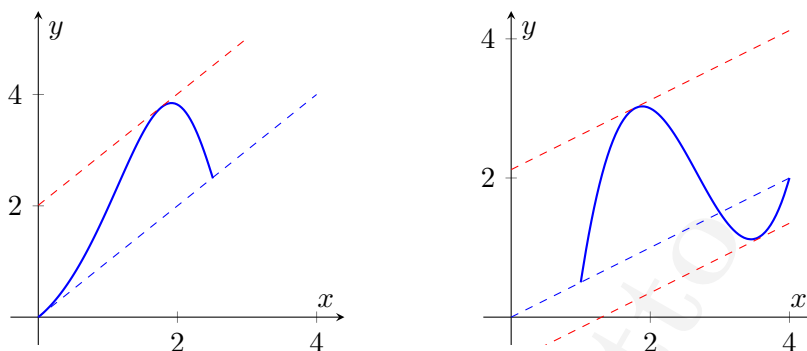
$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

Si osservi che  $g(a)$  e  $g(b)$  sono nulli, e in particolari uguali tra loro. Allora, per il teorema di Rolle, esiste un punto  $c$  nel quale vale

$$g'(c) = 0,$$

e ciò equivale alla tesi.  $\square$

In figura due possibili situazioni che verificano il teorema di Lagrange.



**Corollario 3.6.** Sia  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile in  $D \subset \mathbf{R}$  con derivata identicamente nulla. Allora  $f$  è costante in ogni intervallo contenuto in  $D$ .

**Dimostrazione** - Sia  $I \subset D$  un intervallo, siano  $x_1, x_2 \in I$ . Per il teorema di Lagrange esiste  $c \in (x_1, x_2)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ma  $f'(c) = 0$ , per cui  $f(x_2) = f(x_1)$ . Per l'arbitrarietà di  $x_1$  e  $x_2$  si ha che  $f$  è costante in  $I$ .  $\square$

**Conseguenza** - Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo, con  $f'(x) = g'(x)$  per ogni  $x \in I$ . Allora  $f$  e  $g$  differiscono per una costante.

**Esempio** - La funzione  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $D = (0, 1) \cup (2, 3)$ , definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 3 & \text{se } x \in (2, 3) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del dominio  $D$ , ma non è costante in  $D$ .

**Esercizio** - Si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Si può dedurre che  $f$  è costante?

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

ovviamente no. Quindi  $f$  non è costante (nel suo dominio), ma  $f'$  è identicamente nulla. Si capisca il perché.

**Osservazione 3.7.** - Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  è crescente in  $I$  se e solo se

$$(f(y) - f(x))(y - x) \geq 0 \quad \text{per ogni } y, x \in I$$

e anche se e solo se

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \text{per ogni } y, x \in I, y \neq x.$$

Il seguente teorema è un corollario del teorema di Lagrange.

**Teorema 3.8.** Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo, continua in  $I$  e derivabile in  $\overset{\circ}{I}$ .

- i*)  $f'(x) \geq 0$  in  $\overset{\circ}{I} \iff f$  è crescente in  $I$ ,  
 $f'(x) > 0$  in  $\overset{\circ}{I} \implies f$  è strettamente crescente in  $I$ ;  
*ii*)  $f'(x) \leq 0$  in  $\overset{\circ}{I} \iff f$  è decrescente in  $I$ ,  
 $f'(x) < 0$  in  $\overset{\circ}{I} \implies f$  è strettamente decrescente in  $I$ ;

**Dimostrazione** - Dimostriamo il punto *i*), essendo il *ii*) simile. Supponiamo che  $f$  sia crescente, quindi se  $x \in \overset{\circ}{I}$ ,  $y \in I$ ,  $y > x$  allora  $f(y) \geq f(x)$ . Di conseguenza

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

ed essendo  $f$  derivabile in  $x$ , passando al limite per  $y \rightarrow x$  si conclude che  $f'(x) \geq 0$ . Analogamente si conclude per  $x \in \overset{\circ}{I}$ ,  $y \in I$ ,  $y < x$ .

Vediamo ora l'implicazione opposta. Siano  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Per il teorema di Lagrange esiste  $c \in (x, y)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Se per qualunque scelta di  $x$  e  $y$   $f'(c) \geq 0$  allora  $f(y) \geq f(x)$ , e quindi  $f$  è crescente; se per qualunque scelta di  $x$  e  $y$   $f'(c) > 0$  allora  $f(x) > f(y)$ , e quindi  $f$  è strettamente crescente.  $\square$

**Osservazione 3.9.** - Si osservi che  $f' \geq 0$  garantisce solamente che  $f$  sia crescente e non strettamente crescente. Ad esempio, la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ x^2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

ha derivata maggiore o uguale a zero ed è crescente, ma non strettamente crescente.

Si osservi inoltre come la seconda parte di entrambi i punti non è una equivalenza. Infatti la funzione

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbf{R}$$

è strettamente crescente, ma è falso che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Si osservi però la seguente cosa: data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continua in  $I$  tale che  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , ma  $f'$  si annulla in un solo punto, allora  $f$  è strettamente crescente. Infatti, se per assurdo non lo fosse, si avrebbero due punti  $x < y$  per i quali  $f(x) = f(y)$ . Ma siccome  $f' \geq 0$  l'unica possibilità è che  $f$  sia costante in  $[x, y]$ , e quindi che  $f' = 0$  in tutto l'intervallo  $[x, y]$ , ma questo è falso.

La stessa cosa vale se  $f'$  si annulla in più punti, anche infiniti, ma isolati.

**Massimi e minimi locali** - Siano  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua e derivabile in  $\overset{\circ}{I}$  e  $x_o \in \overset{\circ}{I}$  un punto stazionario per  $f$ . Se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ > 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

allora  $x_o$  è un punto di minimo locale stretto; se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ < 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

allora  $x_o$  è un punto di massimo locale stretto; se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f'(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$$

oppure

$$f'(x) < 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$$

allora  $x_o$  non è né di massimo né di minimo (in questo caso  $x_o$  si dice *punto di flesso*).

Attenzione! Non è vero che se  $x_o$  è di minimo locale per  $f$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ > 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

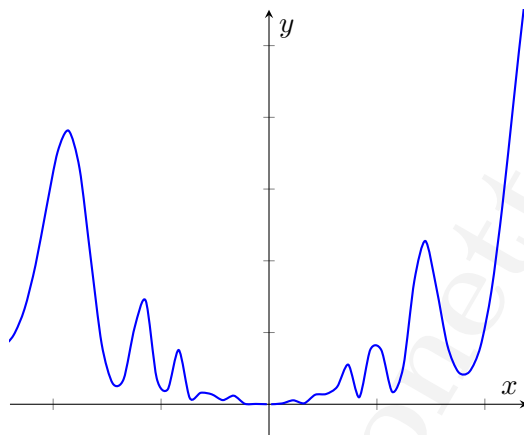
e nemmeno

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ \geq 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta). \end{cases}$$

Si consideri ad esempio la funzione

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

il cui grafico in un intorno di 0 è riportato in figura.



**EX** - Si provi per esercizio che esiste una successione  $\{x_n\}_n$  positiva e convergente a zero lungo la quale  $f'$ ,  $f$  definita in (3), risulta negativa, cioè

$$f'(x_n) < 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

**Teorema 3.10** (Regola di de l'Hôpital). *Siano  $I$  un intervallo e  $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$  un punto di accumulazione per  $I$ . Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$  derivabili in  $I \setminus \{x_o\}$  e sia  $g'(x_o) \neq 0$  per ogni  $x \in I \setminus \{x_o\}$ . Si supponga che esista il limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Allora, ammesso che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = +\infty,$$

esiste anche  $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$  e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Esempi** - Rapporto di due polinomi: dati  $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$ ,  $q(x) = 2x^2 - 7x - 16$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty.$$

Valutando le due derivate ci si accorge che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (10x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 7) = +\infty.$$



Derivando nuovamente si ottiene che il rapporto delle due derivate è  $5/2$ . Di conseguenza

$$\frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x + 3}{4x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Limiti notevoli: ad esempio  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ . Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

**Attenzione!** Il teorema non vale a rovescio, nel senso che se esiste il limite del rapporto tra  $f$  e  $g$ , non è detto che esista il limite del rapporto delle derivate.

Ad esempio, si considerino le due funzioni

$$f(x) = x + \cos x \quad \text{e} \quad g(x) = x + \text{sen } x.$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{non esiste.}$$

Altro esempio: si considerino le due funzioni

$$f(x) = x^2 \text{sen } \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{non esiste.}$$

**Attenzione!** La regola di de l'Hôpital può anche non aiutare. Si considerino le due funzioni

$$f(x) = e^{-1/x} \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Si vorrebbe calcolare, usando la regola di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}.$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

Valutando le derivate si ha

$$\frac{d}{dx} f(x) = e^{-1/x} \frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx} g(x) = 1.$$

Volendo fare il limite del rapporto delle derivate si dovrebbe calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Se si deriva ulteriormente si arriva a dover calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

e ad ogni iterazione il grado del denominatore aumenta.

**Esempio 3.11.** - 1. Si vuole calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^{1/x^2}$ . Scriviamo

$$\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^{1/x^2} = \left[ \left(1 + \left(\frac{\text{sen } x}{x} - 1\right)\right)^{\frac{x}{x - \text{sen } x}} \right]^{\frac{\text{sen } x - x}{x^3}}.$$

Volendo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x - x}{x^3}$$

valutiamo il rapporto delle due derivate e otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}.$$

A questo punto usando il limite notevole o derivando ulteriormente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\text{sen } x}{6x}$$

si ottiene il valore  $-1/6$ . Per cui il valore del limite è  $e^{-1/6}$ .

2. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \text{arctg } x - \arccos \frac{1}{x^2} \right).$$

Scriviamo la quantità

$$x^2 \left( \text{arctg } x - \arccos \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{come} \quad \frac{\text{arctg } x - \arccos \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x^3 \sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}}{-2 \frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} \right)$$

che, per  $x \rightarrow +\infty$ , tende a  $-\infty$ .

**Corollario 3.12.** Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continua,  $x_o \in I$ ,  $f$  derivabile in  $I \setminus \{x_o\}$ . Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$$

allora  $f$  è derivabile anche in  $x_o$  e  $f'(x_o) = \ell$ .

*Dimostrazione* - Si considerino le due funzioni  $F(x) := f(x) - f(x_o)$  e  $G(x) = x - x_o$ , infinitesime in  $x_o$ . Poiché

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x)}{1} = \ell$$

per la regola di de l'Hôpital si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \ell. \quad \square$$

**Esempio 3.13.** - Si consideri la funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $f(x) = e^{-1/x^2}$  se  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Si noti che la funzione  $f$  è continua. Per calcolare la derivata di  $f$  nel punto 0 possiamo valutare, anziché il limite del rapporto incrementale, la derivata in un generico punto  $x \neq 0$  e poi farne il limite per  $x \rightarrow 0$ . Si ha

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

Si ottiene che  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$  per cui  $f$  è derivabile in 0 e la sua derivata è zero. Si osservi però che se tale limite non esiste la funzione potrebbe comunque essere derivabile. A tal proposito si veda l'esempio della funzione definita in (4) nel paragrafo seguente.

#### 4. DERIVATE DI ORDINE SUCCESSIVO AL PRIMO

Se  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  è derivabile si consideri la funzione  $g = f'$ . La derivata di  $g$  in  $x_o \in I$ , se esiste, è detta derivata seconda di  $f$  in  $x_o$  e si denota con

$$f''(x_o), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_o), \quad D^2 f(x_o).$$

Analogamente si possono definire le derivate di ordine successivo al secondo. Con  $C(I)$  o con  $C^0(I)$  si denota l'insieme delle funzioni continue nell'intervallo  $I$ . Con  $C^1(I)$  si denota l'insieme delle funzioni continue, derivabili, la cui derivata è continua in  $I$ .

Con  $C^k(I)$  si denota l'insieme delle funzioni continue, derivabili  $k$  volte, la cui derivata  $k$ -esima è continua in  $I$ . Si ha che

$$C^1(I) \subset \{\text{funzioni} : I \rightarrow \mathbf{R}, \text{ derivabili}\} \subset C^0(I).$$

Esempio: si consideri la funzione

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$f$  è continua in 0; vediamo che è anche derivabile in 0, ma la sua derivata non è continua.

Per vedere se è derivabile in 0 valutiamo il limite del rapporto incrementale:

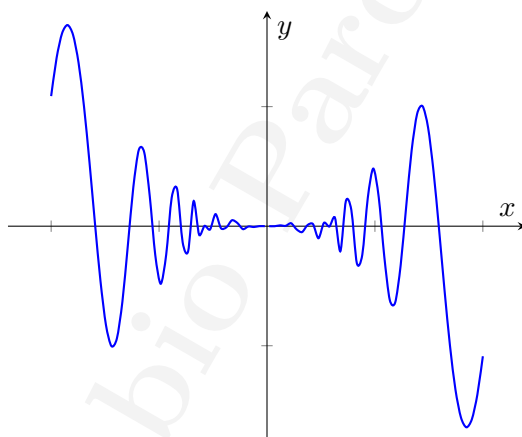
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

Vediamo ora di calcolare la derivata in un punto diverso da 0:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Si osserva che il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  non esiste, per cui in particolare non è 0. Ne concludiamo che  $f'$  non è continua in 0, quindi  $f$  è derivabile in ogni punto, ma non è  $C^1(\mathbf{R})$ .

Il grafico di  $f$  in un intorno di 0 è riportato in figura.



## 5. ASINTOTI

Si consideri una funzione  $f$  diciamo per semplicità definita in  $(a, b)$  o  $(a, +\infty)$  e si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

Si dirà che  $f$  ha un asintoto verticale in  $a$ .

Esempi:  $f(x) = \operatorname{tg} x$  con  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  ha asintoti verticali in  $-\pi/2$  e in  $\pi/2$ ;  $f(x) = e^{-1/x}$  ha un asintoto verticale in 0.

Si consideri una funzione  $f$  diciamo per semplicità definita in  $(a, +\infty)$  (ma analoghe considerazioni valgono per una funzione definita in  $(-\infty, a)$  o in  $\mathbf{R}$ ) e si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

Ci si può chiedere se  $f$  ha un asintoto a  $+\infty$ , cioè se esiste una retta  $r(x) = mx + q$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - r(x)) = 0.$$

Se tale retta esiste si chiama asintoto orizzontale se  $m = 0$ , obliquo negli altri casi. Vediamo come ricavare tale asintoto. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

da cui si deduce che

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

A questo punto, trovato  $m$ , si ricava che

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx).$$

**Esempio 5.1.** -  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ . Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1.$$

Attenzione! Non è detto che se esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbf{R}$$

allora la funzione  $f$  abbia un asintoto. Ad esempio le funzioni  $f(x) = x + \log x$  o  $g(x) = x + x^\alpha$  con  $\alpha \in (0, 1)$  non hanno asintoti all'infinito, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

## 6. FUNZIONI CONVESSE

**Definizione 6.1.** Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo, si dice convessa se per ogni  $x, y \in I$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  vale

$$(5) \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

La funzione  $f$  è detta strettamente convessa se la disuguaglianza sopra è stretta per ogni  $t \in (0, 1)$ .

Inoltre  $f$  si dice (strettamente) concava se  $-f$  è (strettamente) convessa.

Vediamo di capire il significato della definizione.

Dati due numeri  $x, y \in \mathbf{R}$  i punti dell'intervallo  $[x, y]$ , cioè tutti i valori compresi tra  $x$  e  $y$ , possono essere scritti nel modo che segue

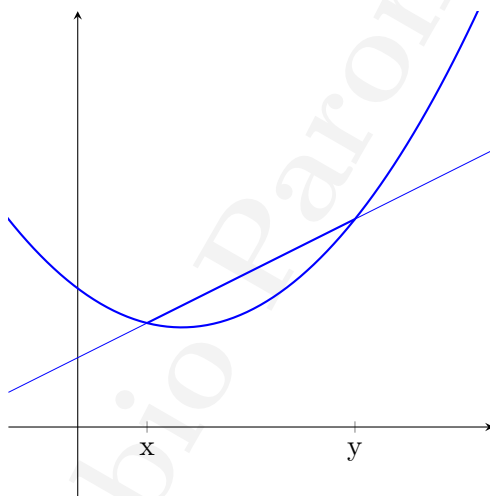
$$(1-t)x + ty, \quad t \in [0, 1].$$

Tale espressione è detta combinazione convessa di  $x$  e  $y$ . Si noti che per  $t = 0$  si ha l'estremo sinistro  $x$ , per  $t = 1$  l'estremo destro  $y$ , per  $t \in (0, 1)$  si ottengono tutti i punti interni all'intervallo.

Analizziamo la disuguaglianza (5): nel termine di sinistra si valutano i valori di  $f$  nell'intervallo  $[x, y]$ , il termine di destra può essere scritto come

$$f(x) + t(f(y) - f(x))$$

che, nella variabile  $t$ , rappresenta la retta passante per i punti  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ . Limitandosi a  $t \in [0, 1]$  abbiamo una parte della retta, un segmento, che unisce i due punti  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ . Vediamo una rappresentazione grafica: si noti che (5) significa che il grafico di  $f$ , limitatamente all'intervallo  $[x, y]$ , è fatto di punti con ordinata minore rispetto al corrispondente punto con la stessa ascissa che giace sul grafico della retta  $t \mapsto f(x) + t(f(y) - f(x))$ .



Vediamo qualche esempio: la funzione  $f(x) = |x|$  è convessa, le funzioni  $x \mapsto x^{2k}$ ,  $k \in \mathbf{N}$  sono convesse (strettamente se  $k \geq 1$ ), la funzione esponenziale  $x \mapsto a^x$  è convessa (strettamente se  $a \neq 1$ ), la funzione  $x \mapsto \log_a x$  è strettamente convessa se  $a < 1$ , è strettamente concava se  $a > 1$ .

La funzione  $x \mapsto \sin x$  è strettamente convessa nell'intervallo  $[0, \pi]$ , è strettamente concava nell'intervallo  $[\pi, 2\pi]$ .

Vediamo di verificare che  $x \mapsto x^2$  è strettamente convessa. Si fissino due valori distinti  $x, y$  e si supponga che  $x < y$ . Va verificato che

$$((1-t)x + ty)^2 \leq (1-t)x^2 + ty^2, \quad t \in [0, 1]$$

e

$$((1-t)x + ty)^2 < (1-t)x^2 + ty^2, \quad t \in (0, 1).$$

Per  $t = 0$  e  $t = 1$  la cosa è immediata, per cui limitiamoci a  $t \in (0, 1)$ . Svolgendo il quadrato si ha

$$\begin{aligned} (1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2(1-t)txy &< (1-t)x^2 + ty^2 \\ \Updownarrow \\ 2(1-t)txy &< ((1-t) - (1-t)^2)x^2 + (t - t^2)y^2 \\ \Updownarrow \\ 2(1-t)txy &< (1-t)tx^2 + (1-t)ty^2 \end{aligned}$$

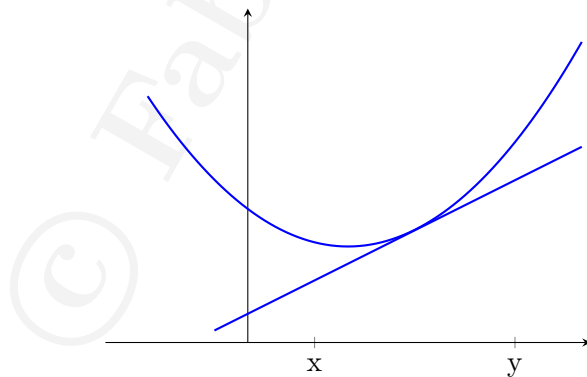
e tale disuguaglianza è sempre vera. Infatti (ricordo:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  per ogni  $a, b \in \mathbf{R}$ ) dividendo per  $t(1-t)$  basta prendere  $a = x$  e  $b = y$  per rendersene conto.

Da questo esempio ci si rende conto che non è immediato verificare la convessità, o la concavità, di una funzione usando (5). Vediamo ora, assumendo qualche ipotesi in più, condizioni che garantiscono la convessità.

**Teorema 6.2.** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo,  $f$  derivabile in  $I$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a)  $f$  è convessa;
- b)  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  per ogni  $x, x_0 \in I$ ;
- c)  $f'$  è crescente in  $I$ .

Si osservi che graficamente il punto b) significa che il grafico di  $f$  è “sopra” il grafico della retta tangente al grafico di  $f$ .



**Dimostrazione** - Mostriamo le tre implicazioni  $a) \Rightarrow b)$ ,  $b) \Rightarrow c)$ ,  $c) \Rightarrow a)$ , da cui avremo le tre equivalenze.

$a) \Rightarrow b)$  - Dall'ipotesi si ha

$$f((1-t)x_0 + tx) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x) = f(x_0) + t(f(x) - f(x_0))$$

da cui, per  $t \in (0, 1)$ ,

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t(x - x_0)} (x - x_0).$$

Passando al limite per  $t \rightarrow 0$  si ottiene la tesi.

b)  $\Rightarrow$  c) - Per ipotesi valgono

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\geq f'(y)(x - y) = -f'(y)(y - x), \\ f(y) - f(x) &\geq f'(x)(y - x) \end{aligned}$$

per ogni  $x, y \in I$ . Sommando si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &\geq (f'(x) - f'(y))(y - x) \\ &\quad \Downarrow \\ (f'(x) - f'(y))(x - y) &\geq 0. \end{aligned}$$

Si osservi come questa disuguaglianza significa che  $f'$  è crescente.

c)  $\Rightarrow$  a) - Dati  $x, y \in I$  si supponga che  $x < y$ . Si consideri  $z \in (x, y)$ . Dal teorema di Lagrange si ha che esistono  $a \in (x, z)$  e  $b \in (z, y)$  tali che

$$f'(a) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \text{e} \quad f'(b) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Dall'ipotesi si ha che

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &\leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \\ &\quad \Downarrow \\ (f(z) - f(x))(y - z) &\leq (f(y) - f(z))(z - x) \\ &\quad \Downarrow \\ f(z)(y - x) &\leq f(y)(z - x) + f(x)(y - z). \end{aligned}$$

Poiché  $z$  è compreso tra  $x$  e  $y$  esiste  $t \in (0, 1)$  tale che

$$z = (1 - t)x + ty.$$

Riscrivendo l'ultima disuguaglianza si ottiene

$$f((1 - t)x + ty)(y - x) \leq f(y)(ty - tx) + f(x)(1 - t)(x - y).$$

Dividendo per  $y - x$  si conclude.  $\square$

Dalla dimostrazione si ricava anche

**Teorema 6.3.** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo,  $f$  derivabile in  $I$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a)  $f$  è strettamente convessa;
- b)  $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  per ogni  $x, x_0 \in I$ ,  $x \neq x_0$ ;
- c)  $f'$  è strettamente crescente in  $I$ .



Inoltre si mostrano gli analoghi risultati per le funzioni concave, che non riportiamo.

Vediamo ora un'altra condizione equivalente alla convessità nel caso in cui  $f$  sia derivabile due volte.

**Teorema 6.4.** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo,  $f$  derivabile due volte. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a)  $f'' \geq 0$  per ogni  $x \in I$ ;
- b)  $f$  è convessa in  $I$ .

*Inoltre se vale l'affermazione*

- c)  $f'' > 0$  per ogni  $x \in I$

*allora vale l'affermazione*

- d)  $f$  è strettamente convessa in  $I$ .

**Dimostrazione** - Segue dal Teorema 3.8. Infatti (mostriamo l'equivalenza tra a) e b)),  $f'' \geq 0$  in  $I$  se e solo se  $f'$  è crescente in  $I$  e questo è vero se e solo se (Teorema 6.3)  $f$  è convessa.

Per quanto riguarda i punti c) e d) abbiamo: se  $f'' > 0$  in  $I$  allora  $f'$  è strettamente crescente in  $I$  (Teorema 3.8) e questo è vero se e solo se (Teorema 6.3)  $f$  è strettamente convessa.  $\square$

**Osservazione 6.5.** - Come nel Teorema 3.8 non possiamo concludere che le affermazioni sono equivalenti. Infatti si consideri la funzione  $f(x) = x^4$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . È strettamente convessa, ma la sua derivata seconda si annulla in 0. Però, analogamente a quanto visto nell'osservazione 3.9, se  $f'' \geq 0$  e si annulla in un solo punto allora è strettamente convessa (perché  $f'$  è strettamente crescente).

**Osservazione 6.6.** - Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione strettamente convessa di classe  $C^1(I)$ ,  $I$  intervallo. Se un punto  $x_o$  è critico per  $f$  allora è di minimo globale.

Infatti, dal punto b) del Teorema 6.3 si ha che  $f(x_o) \leq f(x)$  per ogni  $x \in I$ . Inoltre se  $f$  è strettamente convessa e  $x_o$  è critico allora questo è l'unico punto di minimo.

Infatti se ce ne fossero due,  $x_o$  e  $y_o$ , si avrebbe che

$$f\left(\frac{x_o + y_o}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_o) + \frac{1}{2}f(y_o) = \min f$$

e questo non è possibile.

**Definizione 6.7** (Flesso). *Data  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $I$  intervallo aperto, un punto  $x_o \in I$  è detto di flesso per  $f$  se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset I$$

e

$$\begin{aligned} f & \text{ concava in } (x_o - \delta, x_o), \\ f & \text{ convessa in } (x_o - \delta, x_o), \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} f & \text{ convessa in } (x_o - \delta, x_o), \\ f & \text{ concava in } (x_o - \delta, x_o). \end{aligned}$$

In particolare, dai due ultimi risultati, si avrà che  $x_o$  è di flesso per  $f$  funzione derivabile se  $f'$  è crescente (rispettivamente decrescente) in un intorno sinistro di  $x_o$  e decrescente (rispettivamente crescente) in un intorno di  $x_o$  oppure, se  $f$  derivabile due volte, se  $f'' \geq 0$  (rispettivamente  $f'' \leq 0$ ) in un intorno sinistro di  $x_o$  e  $f'' \leq 0$  (rispettivamente  $f'' \geq 0$ ) in un intorno destro di  $x_o$ .

**Esempio** Il punto 0 è di flesso per la funzione  $f(x) = \sin x$ .