10 - Funzioni derivabili

Ultimo aggiornamento: 26 febbraio 2025

Si consideri una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo. Dati due punti $x, x_o \in I$, $x \neq x_o$, si definisce *rapporto incrementale* di f in x_o il numero

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Chiaramente i ruoli di x e x_o possono essere invertiti, ma solitamente si pensa ad uno dei due punti fissati. Per questo a volte il rapporto incrementale in x_o si scrive

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Tale rapporto misura la variazione media di f nell'intervallo $[x_o, x_o + h]$ o $[x_o + h, x_o]$. Si osservi come tale rapporto rappresenta il coefficiente angolare della funzione

$$r(y) := f(x_o) + \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(y - x_o)$$

dove x e x_o sono fissati (mentre y indica la variabile della funzione r) oppure, in maniera equivalente,

$$r(x) := f(x_o) + \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}(x - x_o)$$

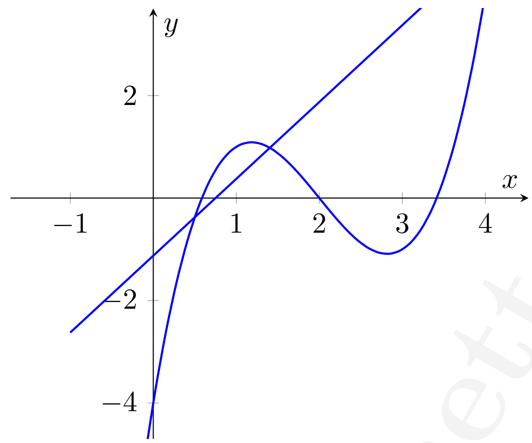
dove questa volta sono fissati x_o e h (mentre questa volta indichiamo la variabile della funzione r con la lettera x, ma questa scelta è arbitraria e ininfluente). Nella figura che segue sono rappresentati il grafico di una funzione f e il grafico della retta r. Le proiezione sull'asse delle ascisse dei punti in cui si incontrano i due grafici sono x_o e x. Per semplicità si supponga che il minore dei due sia x_o e il maggiore sia x.

Si osservi anche come questa retta passa per i due punti

$$\big(x_o, f(x_o)\big) \quad \text{e} \quad \big(x, f(x)\big).$$

Quindi può essere individuata in maniera univoca dal fatto che passa per il punto $\big(x_o, f(x_o)\big)$ e ha coefficiente angolare $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ oppure perché passa per i due punti $\big(x_o, f(x_o)\big)$ e $\big(x, f(x)\big)$.

© Fabio Paronetto



1. Derivabilità

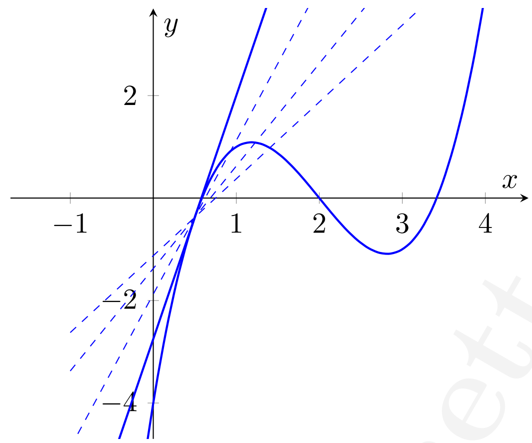
Definizione 1.1. *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo e $x_o \in I$. Diciamo che f è* derivabile in x_o *se il seguente limite* *esiste* *ed è* *finito*

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \tag{1}$$

e si denota con $f'(x_o)$ o con $\frac{df}{dx}(x_o)$ o con $Df(x_o)$.
Si dirà che f è derivabile in I se f è derivabile in ogni punto di I.

In figura sono riportate alcune possibili rette con diverse possibili scelte di x, mentre x_o (che, come precedentemente detto, supponiamo minore di x) rimane fissato. Si osservi come queste rette (che sono tratteggiate nella figura che segue) sono ben individuate in maniera unica (da due informazioni: o due punti del grafico di f che devono stare sul grafico di r oppure un punto del grafico e il coefficiente angolare).
Si osservi anche come queste rette si muovano al variare di x. L'esistenza della derivata di f nel punto x_o, che è semplicemente un numero, da un punto di vista geometrico seleziona una speciale retta: fra tutte le infinite rette passanti per il punto $\big(x_o, f(x_o)\big)$ ne seleziona una, che noi chiameremo *retta tangente* al grafico di f nel punto $\big(x_o, f(x_o)\big)$.

© Fabio Paronetto



Sia r la retta tangente al grafico di f nel punto $\big(x_o, f(x_o)\big)$, cioè

$$r(x) = f(x_o) + f'(x_o)\big(x - x_o\big).$$

Si osservi come questa retta soddisfi

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in I}} \big(f(x) - r(x)\big) = 0, \\ &\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in I}} \frac{f(x) - r(x)}{x - x_o} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Osservazione - Si potrebbe definire la derivata anche per funzioni $f : D \to \mathbf{R}$, dove D non è necessariamente un intervallo, in un punto x_o che sia di accumulazione per D, ma noi ci limiteremo a considerare intervalli e un punto x_o di tale intervallo. Vediamo due possibili casi.
Il primo è quello in cui x_o è un punto interno ad I, ad esempio $x_o \in (a, b) = I$.
Il secondo è quello in cui $x_o = a$ e I è $[a, b)$ o $[a, b]$ o $[a, +\infty)$. In questo caso il limite (1) può essere riscritto (supponendo che I sia $[a, b)$)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in [a,b)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si osservi che in questo caso la variabile x può essere <u>solo</u> maggiore di a. Per questo a volte il valore di tale limite, se esiste ed è finito, viene chiamato derivata *destra* per sottolineare il fatto che x può essere considerato solamente "a destra" di a.
In maniera analoga si parla di derivata sinistra.

Derivate destra e sinistra - In generale, anche se x_o fosse un punto interno all'intervallo I, possiamo comunque definire le derivate destra e sinistra.

© Fabio Paronetto

Chiameremo derivata destra e derivata sinistra, se esistono finiti, rispettivamente i seguenti limiti

$$\lim_{\substack{x \to x_o^+ \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \qquad \lim_{\substack{x \to x_o^- \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

Esempi -
• $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$ con $c \in \mathbf{R}$. Allora $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
La verifica è presto fatta.
• $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbf{N}$. Allora $f'(x) = n\,x^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Si osservi che

$$x^n - x_o^n = (x - x_o)(x^{n-1} + x^{n-2}x_o + x^{n-3}x_o^2 + \ldots + x\,x_o^{n-2} + x_o^{n-1})$$

da cui

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = x^{n-1} + x^{n-2}x_o + x^{n-3}x_o^2 + \ldots + x\,x_o^{n-2} + x_o^{n-1}.$$

Passando al limite per $x \to x_o$ si conclude.
• $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ con $c \in \mathbf{R}$. Allora

$$\text{se } x \neq 0 \text{ si ha} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$

mentre

$$\text{in 0 si ha} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

• $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Allora $f' : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ e $f'(x) = \big(2\sqrt{x}\big)^{-1}$.
Si ha

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o}\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_o}}$$

quindi passando al limite si ha

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_o}}{x - x_o} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}.$$

Se $x_o = 0$ la derivata non esiste in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

Osservazione - Se $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, è derivabile in x_o allora f è continua in x_o.

© Fabio Paronetto

È sufficiente verificare che $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$. Per far ciò scriviamo

$$\lim_{x\to x_o} \big(f(x) - f(x_o)\big) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\,(x - x_o) =$$
$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}\ \lim_{x\to x_o}(x - x_o) = f'(x_o)\lim_{x\to x_o}(x - x_o) = 0.$$

Ovviamente il viceversa è falso. Vediamo alcuni esempi.
Primo: $f(x) = |x|$ con $x \in \mathbf{R}$. La funzione f è continua in 0, ma non derivabile in 0.
Secondo: $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, +\infty)$. La funzione f è continua in 0, ma non derivabile in 0.
Terzo: si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è continua in 0, infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

però il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

non ammette limite per $x \to 0$.

Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_o, $x_o \in I$. Allora

i) $\big(f + g\big)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$,
ii) dato $\lambda \in \mathbf{R}$, $\big(\lambda f\big)'(x_o) = \lambda f'(x_o)$
iii) $\big(fg\big)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$
iv) se $g(x_o) \neq 0$ allora $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_o) = -\dfrac{g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$

Dimostrazioni - Scriviamo i rapporti incrementali.
i)

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

ii)

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_o)}{x - x_o} = \lambda \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

© Fabio Paronetto

iii)

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_o)g(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x)g(x)-f(x_o)g(x)+f(x_o)g(x)-f(x_o)g(x_o)}{x-x_o} =$$
$$= g(x)\,\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + f(x_o)\,\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}.$$

Usando la continuità di g in x_o si conclude.

iv) Per il teorema della permanenza del segno (g è non nulla e continua in x_o) si ha che g è non nulla in un intorno di x_o, per cui ha senso valutare g^{-1} in un intorno di x_o. Si ha

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_o)}}{x-x_o} = -\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\,\frac{1}{g(x)g(x_o)}.$$

Osservazione 1.2. - Si osservi che da *iii*) e *iv*) si ricava, scrivendo $\frac{f}{g}=f\,\frac{1}{g}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = -\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}.$$

Regola della catena - Siano $f: I \to J$, $g: J \to \mathbf{R}$ funzioni, f derivabile in $x_o \in I$, g derivabile in $y_o = f(x_o) \in J$. Allora $f \circ g$ è derivabile in x_o e

$$\big(g \circ f\big)'(x_o) = g'\big(f(x_o)\big)\,f'(x_o).$$

Dimostrazione -

$$\frac{\big(g\circ f\big)(x)-\big(g\circ f\big)(x_o)}{x-x_o} = \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_o)\big)}{x-x_o}.$$

Si osservi che se $f(x)=f(x_o)$ in un intorno di x_o tale rapporto incrementale è nullo. Supponiamo allora che f non sia costante in un intorno di x_o, possiamo moltiplicare e dividere per $f(x)-f(x_o)$. Allora

$$\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_o)\big)}{x-x_o} = \begin{cases} \dfrac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_o)\big)}{f(x)-f(x_o)}\,\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} & \text{se } f(x)\neq f(x_o) \\[2ex] 0 & \text{se } f(x)=f(x_o) \end{cases}$$

Definendo

$$\gamma(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_o)}{y-y_o} & \text{se } y \neq y_o \\[2ex] g'(y_o) & \text{se } y = y_o \end{cases}$$

(si osservi che γ risulta continua in y_o) si ha

$$\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_o)\big)}{x-x_o} = \gamma\big(f(x)\big)\,\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

© Fabio Paronetto

e passando al limite si ottiene

$$\lim_{x\to x_o} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_o)\big)}{x - x_o} = g'\big(f(x_o)\big)\, f'(x_o). \qquad \square$$

Derivazione delle funzioni inverse - Siano I e J due intervalli, $f : I \to J$ continua e invertibile (si osservi che $f^{-1} : J \to I$ è continua).
Si supponga f derivabile in $x_o \in I$. Allora $f^{-1} : J \to I$ è derivabile in $y_o = f(x_o)$ se e solo se $f'(x_o) \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\big(f^{-1}\big)'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)}.$$

Dimostrazione -

$$\lim_{y\to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \lim_{x\to x_o} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}. \qquad \square$$

Controesempio: la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ è biiettiva e derivabile, ma $f'(0) = 0$. La sua inversa non è derivabile in 0.

2. Derivate delle funzioni elementari

Vediamo ora di calcolare esplicitamente le derivate di alcune funzioni.

- $f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

- $f(x) = a^x, \qquad f'(x) = \log a\, a^x$, $a > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\log a} - e^{x\log a}}{h} =$$

$$= e^{x\log a} \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log a} - 1}{h\, \log a} \log a = a^x \log a.$$

- $f(x) = \log x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\big(x\big(1 + \frac{h}{x}\big)\big) - \log x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log x + \log\big(1 + \frac{h}{x}\big) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\big(1 + \frac{h}{x}\big)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Si provi per esercizio ad usare la formula per la funzione inversa per calcolare la derivata di $x \mapsto \log x$.

- $f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}$.

© Fabio Paronetto

- $f(x) = x^\alpha, \qquad f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$\alpha \in \mathbf{R}$, x appartenente al dominio naturale tranne che nei casi in cui $\alpha \in (0,1)$, casi nei quali escludiamo $x = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

- $f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f'(x) = \cos x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} h + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \cos x.$$

- $f(x) = \cos x\,, \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$ (EX)

- $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f = g^{-1}$, dove $g : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, per cui

$$\left(g^{-1}\right)'(x_o) = \frac{1}{g'(t_o)} = \frac{1}{\cos t_o}$$

dove $g(t_o) = x_o$ e $t_o = \operatorname{arcsen} x_o$. Si osservi che $\cos t_o > 0$, per cui

$$\frac{1}{\cos t_o} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x_o)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x_o)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_o^2}}.$$

- $f(x) = \arccos x, \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$

- $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$
$f = g^{-1}$, dove $g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$, $g(t) = \operatorname{tg} t$, per cui

$$\left(g^{-1}\right)'(x_o) = \frac{1}{g'(t_o)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t_o}} = \cos^2 t_o = \frac{\cos^2 t_o}{\operatorname{sen}^2 t_o + \cos^2 t_o} =$$

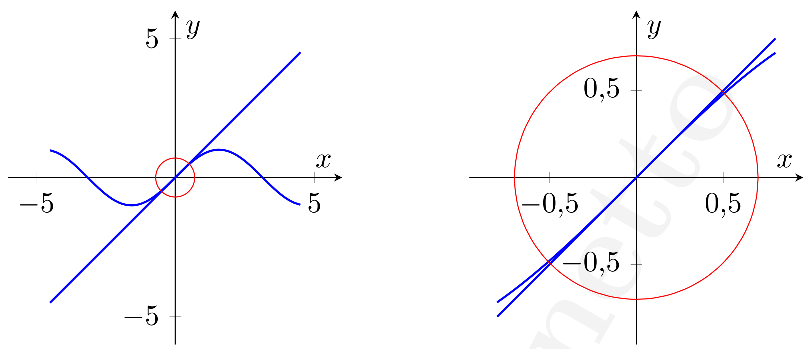
$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t_o} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x_o} = \frac{1}{1+x_o^2}.$$

Commenti - Dai calcoli fatti per trovare le funzioni derivate di alcune funzioni elementari si vede come il calcolo dei limiti notevoli sia funzionale a calcolare le derivate di alcune funzioni (le prime sette che abbiamo calcolato).
Inoltre alcuni limiti notevoli altro non sono che l'espressione della derivata prima in un dato punto.

Nella figura seguente, a sinistra una parte del grafico di $x \mapsto \operatorname{sen} x$ in un

© Fabio Paronetto

intorno di 0 e della sua retta tangente in $(0,0)$, a destra un ingrandimento della parte cerchiata in rosso. Si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.



Curiosità - Il numero e appare in maniera naturale se si vuole fare la derivata della funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x$$

in una qualche base $a > 0$ e si vuole che tale derivata valga 1 nel punto 1. Si avrà quindi che, prendendo l'incremento uguale ad $1/n$ con $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e questo è 1 se $a = e$.

Altro esempio: si vuole valutare quanto si dovrebbe ricevere investendo un capitale C che ha come rendimento un certo interesse annuo i. Valutando gli interessi una sola volta a fine anno si ottiene

$$C_1 = C(1+i).$$

Se si valutano gli interessi due volte all'anno, ogni sei mesi, si avrà un capitale $C_{1,1/2} = C(1+i/2)$ dopo sei mesi e

$$C_2 = C_{1,1/2}\left(1+\frac{i}{2}\right) = C\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 > C_1.$$

a fine anno. Si noti che $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 > 1+i$. Se valutassimo gli interessi ogni quattro mesi si avrebbe il capitale $C_{1,1/3} = C(1+i/3)$ dopo quattro mesi, $C_{2,1/3} = C_{1,1/3}(1+i/3)$ dopo otto mesi e infine

$$C_3 = C\left(1+\frac{i}{3}\right)^3 > C_2.$$

© Fabio Paronetto

dopo un anno. Frazionando in n parti l'anno si otterrebbe un capitale

$$C_n = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

e se si valutassero gli interessi istantaneamente il giusto capitale a fine anno dovrebbe essere

$$\bar{C} = e^i\, C > C_n \qquad \text{qualunque sia } n \in \mathbf{N}.$$

Sembra che Leibniz ed Eulero siano stati i primi ad usare in maniera esplicita il numero e, sia per semplificare i calcoli riguardo la funzione esponenziale e logaritmica, sia per semplici modelli finanziari come quello appena descritto.

3. Teoremi classici del calcolo differenziale

Teorema 3.1 (Fermat)**.** *Siano $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ e $x_o \in (a,b)$, x_o di minimo o di massimo locale per f. Se f è derivabile in x_o allora $f'(x_o) = 0$.*

Dimostrazione - Si supponga che x_o sia di minimo locale. Per definizione esiste $\delta > 0$ tale che $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset (a,b)$ e per ogni $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$ si ha che $f(x) \geqslant f(x_o)$. Allora si hanno

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geqslant 0 \qquad \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta),$$
$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leqslant 0 \qquad \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o).$$

Da queste disuguaglianze e poiché f è derivabile si devono avere

$$\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leqslant 0,$$

ma proprio perché f è derivabile in x_o esiste il limite

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

e a questo punto deve essere 0. □

Osservazione 3.2. - Attenzione! Il viceversa in generale non è vero. Si consideri, ad esempio, la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$.
Si ha $f'(0) = 0$, ma 0 non è né di massimo né di minimo.

I punti che soddisfano $f'(x) = 0$ sono detti *stazionari*.

I punti che soddisfano $f'(x) = 0$ e che non sono né di minimo locale né di massimo locale sono detti *di flesso (orizzontale)*.

© Fabio Paronetto

Osservazione 3.3. - Nonostante l'esempio precedente, se si debbono cercare i massimi e i minimi, oppure il massimo e/o il minimo, di una funzione f tra i candidati ci saranno sicuramente le soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. In generale, se si devono trovare il massimo e il minimo di una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, questi vanno cercati in questa lista di candidati:
i) punti interni ad I nei quali f è derivabile e f' si annulla;
ii) punti interni ad I nei quali f non è derivabile;
iii) estremi dell'intervallo I.

Esempio - Si trovino il massimo e il minimo della funzione $f : [0, 6] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x$ se $x \in [0, 3]$, $f(x) = \frac{3}{4}(x - 5)^2$ se $x \in (3, 6]$. Allora i candidati sono $\{0, 3, 5, 6\}$, dove 5 è un punto di derivabilità e $f'(5) = 0$, 0 e 6 sono gli estremi dell'intervallo, 3 è un punto di non derivabilità.

Esempio - Anche se gli estremi non appartengono all'insieme va "controllato" il valore al bordo. Si consideri la funzione $f : [0, \pi/2) \to \mathbf{R}$, $f(x) := \operatorname{tg} x$. f è derivabile in ogni punto del dominio e f' non si annulla mai nel dominio. Il punto 0 è un estremo dell'intervallo. Per concludere bisogna fare il limite nell'altro estremo, che è $+\infty$. Si conclude che f ha minimo in 0 e non ha massimo.

Esempio - Consideriamo $f : [2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \log \frac{1}{x}$. La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \left(\log \frac{1}{x} + 1 \right) = -\frac{1}{x^2} (1 - \log x)$$

che si annulla per $x = e$. Quindi abbiamo i due candidati: 2, estremo dell'intervallo, ed e, punto stazionario. Facciamo il limite all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Vediamo come utilizzare questa informazione: si ha $f(e) = -1/e < 0$, $f(2) = -\frac{1}{2} \log 2 < 0$ e la funzione ha limite 0 all'infinito. Allora f ammette minimo e non ammette massimo (il minimo sarà il più piccolo tra i due valori $f(2)$ e $f(e)$, che è $f(e)$ anche se per ora non sappiamo mostrarlo).

Vediamo una curiosità. Si osservi che date due funzioni crescenti g, h, il loro prodotto è crescente nell'insieme nel quale entrambe sono positive e il loro prodotto è decrescente nell'insieme nel quale entrambe sono negative. Infatti, dati x e y con $x < y$ si ha

$$\begin{aligned} g(x) < g(y),\ h(x) < h(y) \text{ e } g(x) > 0, h(x) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad g(x)h(x) < g(y)h(y), \\ g(x) < g(y),\ h(x) < h(y) \text{ e } g(y) < 0, h(y) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad g(x)h(x) > g(y)h(y). \end{aligned}$$

Negli altri casi non si può dire nulla, in generale. Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui g ed h sono decrescenti.

La funzione $g(x) = x$ è crescente, la funzione $h(x) = \log x$ è crescente, allora le funzioni $x \mapsto g(1/x)$ e $x \mapsto h(1/x)$ sono decrescenti. In particolare deduciamo da quanto appena visto che per $x \in (0, 1)$, cioè quando entrambe sono positive, il prodotto è decrescente, mentre per $x > 1$ non possiamo dire nulla in generale (in particolare non sappiamo, senza altri strumenti, confrontare $f(2)$ e $f(e)$.

Se si considera come dominio l'insieme $[1/2, +\infty)$ e la stessa espressione per

(c) Fabio Paronetto

f si ha che

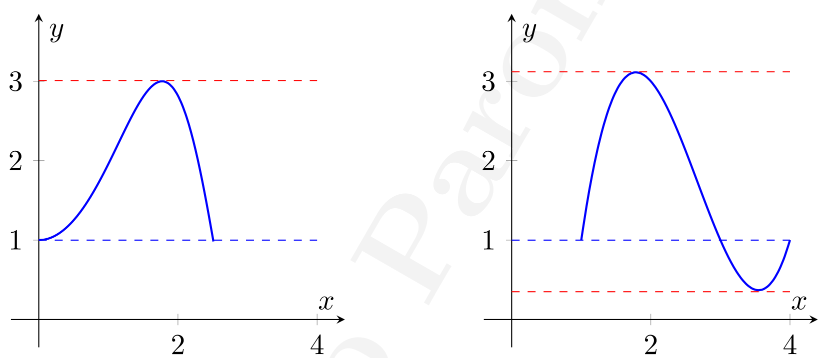
$$f(1/2) = 2\log 2 > 0$$

quindi questa volta possiamo concludere che f ammette massimo nel punto $1/2$.

Teorema 3.4 (Rolle - seconda versione)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *continua, derivabile in* (a,b)*, e si supponga che* $f(a) = f(b)$*.*
Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Dimostrazione - Per il teorema di Rolle, prima versione, esiste $c \in (a,b)$ di estremo per f. Dal teorema di Fermat si conclude. $\square$

In figura due possibili situazioni che verificano il teorema di Rolle.



Teorema 3.5 (Lagrange, sul valor medio)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *continua, derivabile in* (a,b)*. Allora esiste un punto* $c \in (a,b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione - Si consideri la funzione $g(x) = f(x) - r(x)$, dove r è l'espressione di una retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. L'espressione di r è data da

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

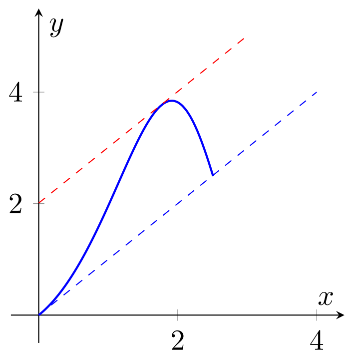
Si osservi che $g(a)$ e $g(b)$ sono nulli, e in particolari uguali tra loro. Allora, per il teorema di Rolle, esiste un punto c nel quale vale

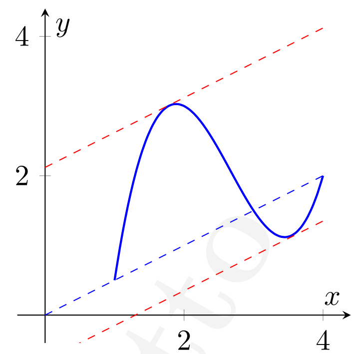
$$g'(c) = 0,$$

e ciò equivale alla tesi. $\square$

In figura due possibili situazioni che verificano il teorema di Lagrange.

© Fabio Paronetto





Corollario 3.6. *Sia $f : D \to \mathbf{R}$ derivabile in $D \subset \mathbf{R}$ con derivata identicamente nulla. Allora f è costante in ogni intervallo contenuto in D.*

Dimostrazione - Sia $I \subset D$ un intervallo, siano $x_1, x_2 \in I$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ma $f'(c) = 0$, per cui $f(x_2) = f(x_1)$. Per l'arbitrarietà di x_1 e x_2 si ha che f è costante in I. □

Conseguenza - Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, con $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$. Allora f e g differiscono per una costante.

Esempio - La funzione $f : D \to \mathbf{R}$, $D = (0,1) \cup (2,3)$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 3 & \text{se } x \in (2,3) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del dominio D, ma non è costante in D.

Esercizio - Si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Si ha che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\,\frac{1}{x^2} = 0.$$

Si può dedurre che f è costante?
Dal momento che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

© Fabio Paronetto

ovviamente no. Quindi f non è costante (nel suo dominio), ma f' è identicamente nulla. Si capisca il perché.

Osservazione 3.7. - Una funzione $f : I \to \mathbf{R}$ è crescente in I se e solo se

$$\big(f(y) - f(x)\big)\big(y - x\big) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } y, x \in I$$

e anche se e solo se

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } y, x \in I, y \neq x.$$

Il seguente teorema è un corollario del teorema di Lagrange.

Teorema 3.8. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, continua in I e derivabile in $\mathring{I}$.*

i) $f'(x) \geqslant 0$ in $\mathring{I}$ $\iff$ f è crescente in I,
$f'(x) > 0$ in $\mathring{I}$ $\Longrightarrow$ f è strettamente crescente in I;
ii) $f'(x) \leqslant 0$ in $\mathring{I}$ $\iff$ f è decrescente in I,
$f'(x) < 0$ in $\mathring{I}$ $\Longrightarrow$ f è strettamente decrescente in I;

Dimostrazione - Dimostriamo il punto *i*), essendo il *ii*) simile. Supponiamo che f sia crescente, quindi se $x \in \mathring{I}$, $y \in I$, $y > x$ allora $f(y) \geqslant f(x)$. Di conseguenza

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$$

ed essendo f derivabile in x, passando al limite per $y \to x$ si conclude che $f'(x) \geqslant 0$. Analogamente si conclude per $x \in \mathring{I}$, $y \in I$, $y < x$.
Vediamo ora l'implicazione opposta. Siano $x, y \in I$, $x < y$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (x, y)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Se per qualunque scelta di x e y $f'(c) \geqslant 0$ allora $f(y) \geqslant f(x)$, e quindi f è crescente; se per qualunque scelta di x e y $f'(c) > 0$ allora $f(x) > f(y)$, e quindi f è strettamente crescente. $\square$

Osservazione 3.9. - Si osservi che $f' \geqslant 0$ garantisce solamente che f sia crescente e non strettamente crescente. Ad esempio, la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

ha derivata maggiore o uguale a zero ed è crescente, ma non strettamente cerscente.

© Fabio Paronetto

Si osservi inoltre come la seconda parte di entrambi i punti non è una equivalenza. Infatti la funzione

$$f(x) = x^3, \qquad x \in \mathbf{R}$$

è strettamente crescente, ma è falso che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Si osservi però la seguente cosa: data una funzione $f : I \to \mathbf{R}$ continua in I tale che $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, ma f' si annulla in un solo punto, allora f è strettamente crescente. Infatti, se per assurdo non lo fosse, si avrebbero due punti $x < y$ per i quali $f(x) = f(y)$. Ma siccome $f' \geqslant 0$ l'unica possibilità è che f sia costante in $[x, y]$, e quindi che $f' = 0$ in tutto l'intervallo $[x, y]$, ma questo è falso.
La stessa cosa vale se f' si annulla in più punti, anche infiniti, ma isolati.

Massimi e minimi locali - Siano $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile in $\mathring{I}$ e $x_o \in \mathring{I}$ un punto stazionario per f. Se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ > 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

allora x_o è un punto di minimo locale stretto; se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ < 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

allora x_o è un punto di massimo locale stretto; se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$$

oppure

$$f'(x) < 0 \qquad \text{per ogni } x \in (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$$

allora x_o non è né di massimo né di minimo (in questo caso x_o si dice *punto di flesso*).

Attenzione! Non è vero che se x_o è di minimo locale per f esiste $\delta > 0$ tale che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ > 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

e nemmeno

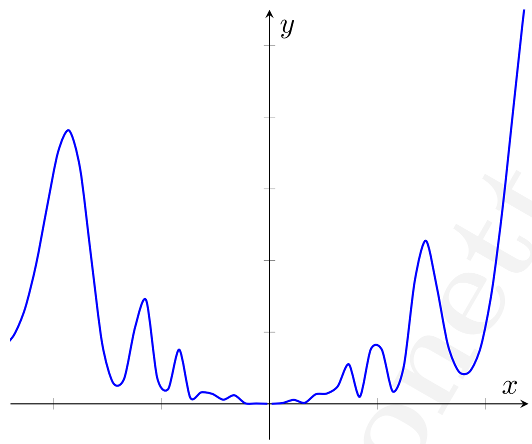
$$f'(x) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{per } x \in (x_o - \delta, x_o) \\ \geqslant 0 & \text{per } x \in (x_o, x_o + \delta). \end{cases}$$

Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

© Fabio Paronetto

il cui grafico in un intorno di 0 è riportato in figura.



EX - Si provi per esercizio che esiste una successione $\{x_n\}_n$ positiva e convergente a zero lungo la quale f', f definita in (3), risulta negativa, cioè

$$f'(x_n) < 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Teorema 3.10 (Regola di de l'Hôpital)**.** *Siano I un intervallo e $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione per I. Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_o\}$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_o\}$. Si supponga che esista il limite*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Allora, ammesso che

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = +\infty,$$

esiste anche $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e si ha*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esempi - Rapporto di due polinomi: dati $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$, $q(x) = 2x^2 - 7x - 16$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty.$$

Valutando le due derivate ci si accorge che

$$\lim_{x \to +\infty} (10x + 3) = \lim_{x \to +\infty} (4x - 7) = +\infty.$$

© Fabio Paronetto

Derivando nuovamente si ottiene che il rapporto delle due derivate è 5/2. Di conseguenza

$$\frac{5}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x+3}{4x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Limiti notevoli: ad esempio $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Si ha $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0} x = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Attenzione! Il teorema non vale a rovescio, nel senso che se esiste il limite del rapporto tra f e g, non è detto che esista il limite del rapporto delle derivate.
Ad esempio, si considerino le due funzioni

$$f(x) = x + \cos x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + \operatorname{sen} x.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{non esiste.}$$

Altro esempio: si considerino le due funzioni

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{non esiste.}$$

Attenzione! La regola di de l'Hôpital può anche non aiutare. Si considerino le due funzioni

$$f(x) = e^{-1/x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x.$$

Si vorrebbe calcolare, usando la regola di de l'Ĥopital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}.$$

© Fabio Paronetto

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.$$

Valutando le derivate si ha

$$\frac{d}{dx} f(x) = e^{-1/x}\,\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{d}{dx} g(x) = 1.$$

Volendo fare il limite del rapporto delle derivate si dovrebbe calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Se si deriva ulteriormente si arriva a dover calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

e ad ogni iterazione il grado del denominatore aumenta.

Esempio 3.11. - 1. Si vuole calcolare $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$. Scriviamo

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2} = \left[\left(1 + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)\right)^{\frac{x}{x - \operatorname{sen} x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}}.$$

Volendo calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

valutiamo il rapporto delle due derivate e otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}.$$

A questo punto usando il limite notevole o derivando ulteriormente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{6x}$$

si ottiene il valore $-1/6$. Per cui il valore del limite è $e^{-1/6}$.

2. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x^2}\right).$$

Scriviamo la quantità

$$x^2 \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{come} \qquad \frac{\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}}{-2\,\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}\right)$$

che, per $x \to +\infty$, tende a $-\infty$.

© Fabio Paronetto

Corollario 3.12. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua, $x_o \in I$, f derivabile in $I \setminus \{x_o\}$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_o} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$$

allora f è derivabile anche in x_o e $f'(x_o) = \ell$.

Dimostrazione - Si considerino le due funzioni $F(x) := f(x) - f(x_o)$ e $G(x) = x - x_o$, infinitesime in x_o. Poiché

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{1} = \ell$$

per la regola di de l'Hôpital si ha che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \ell. \qquad \square$$

Esempio 3.13. - Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si noti che la funzione f è continua. Per calcolare la derivata di f nel punto 0 possiamo valutare, anziché il limite del rapporto incrementale, la derivata in un generico punto $x \neq 0$ e poi farne il limite per $x \to 0$. Si ha

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2}.$$

Si ottiene che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ per cui f è derivabile in 0 e la sua derivata è zero. Si osservi però che se tale limite non esiste la funzione potrebbe comunque essere derivabile. A tal proposito si veda l'esempio della funzione definita in (4) nel paragrafo seguente.

4. Derivate di ordine successivo al primo

Se $f : I \to \mathbf{R}$ è derivabile si consideri la funzione $g = f'$. La derivata di g in $x_o \in I$, se esiste, è detta derivata seconda di f in x_o e si denota con

$$f''(x_o), \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_o), \qquad D^2 f(x_o).$$

Analogamente si possono definire le derivate di ordine successivo al secondo. Con $C(I)$ o con $C^0(I)$ si denota l'insieme delle funzioni continue nell'intervallo I. Con $C^1(I)$ si denota l'insieme delle funzioni continue, derivabili, la cui derivata è continua in I.
Con $C^k(I)$ si denota l'insieme delle funzioni continue, derivabili k volte, la cui derivata k-esima è continua in I. Si ha che

$$C^1(I) \subset \{\text{funzioni} : I \to \mathbf{R},\ \text{derivabili}\} \subset C^0(I).$$

Esempio: si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \,\mathrm{sen}\, \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

© Fabio Paronetto

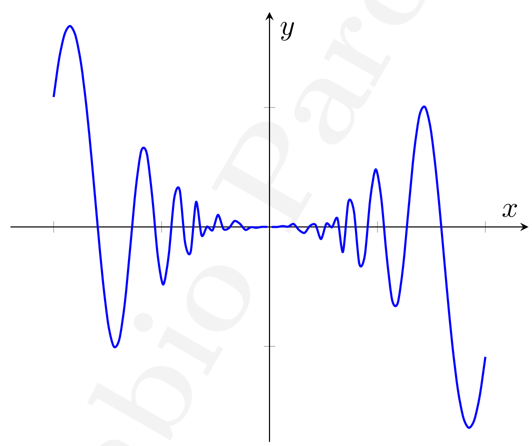
f è continua in 0; vediamo che è anche derivabile in 0, ma la sua derivata non è continua.
Per vedere se è derivabile in 0 valutiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

Vediamo ora di calcolare la derivata in un punto diverso da 0:

$$f'(x) = 2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Si osserva che il limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste, per cui in particolare non è 0. Ne concludiamo che f' non è continua in 0, quindi f è derivabile in ogni punto, ma non è $C^1(\mathbf{R})$.
Il grafico di f in un intorno di 0 è riportato in figura.



5. Asintoti

Si consideri una funzione f diciamo per semplicità definita in (a, b) o $(a, +\infty)$ e si supponga che

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

Si dirà che f ha un asintoto verticale in a.
Esempi: $f(x) = \operatorname{tg} x$ con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ha asintoti verticali in $-\pi/2$ e in $\pi/2$; $f(x) = e^{-1/x}$ ha un asintoto verticale in 0.
Si consideri una funzione f diciamo per semplicità definita in $(a, +\infty)$ (ma analoghe considerazioni valgono per una funzione definita in $(-\infty, a)$ o in $\mathbf{R}$) e si supponga che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

© Fabio Paronetto

Ci si può chiedere se f ha un asintoto a $+\infty$, cioè se esiste una retta $r(x) = mx + q$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - r(x)\big) = 0.$$

Se tale retta esiste si chiama asintoto orizzontale se $m = 0$, obliquo negli altri casi. Vediamo come ricavare tale asintoto. Se

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx - q\big) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$

da cui si deduce che

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

A questo punto, trovato m, si ricava che

$$q = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big).$$

Esempio 5.1. - $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = 0.$$

Attenzione! Non è detto che se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbf{R}$$

allora la funzione f abbia un asintoto. Cioè, in generale,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell_1 \in \mathbf{R} \quad \not\Longrightarrow \quad \exists\ \ell_2 \in \mathbf{R} \text{ tale che } \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = \ell_2.$$

Ad esempio le funzioni $f(x) = x + \log x$ o $g(x) = x + x^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$ non hanno asintoti all'infinito, ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

6. Funzioni convesse

Definizione 6.1. *Una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, si dice* convessa *se per ogni $x, y \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$ vale*

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y). \tag{5}$$

La funzione f è detta strettamente convessa *se la disuguaglianza sopra è stretta per ogni $t \in (0,1)$.*
Inoltre f si dice (strettamente) concava se $-f$ è (strettamente) convessa.

Vediamo di capire il significato della definizione.
Dati due numeri $x, y \in \mathbf{R}$ i punti dell'intervallo $[x, y]$, cioè tutti i valori compresi tra x e y, possono essere scritti nel modo che segue

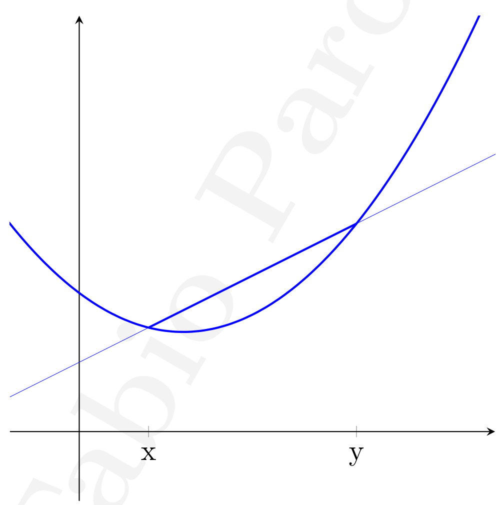
$$(1-t)x + ty, \qquad t \in [0,1].$$

© Fabio Paronetto

Tale espressione è detta combinazione convessa di x e y. Si noti che per $t = 0$ si ha l'estremo sinistro x, per $t = 1$ l'estremo destro y, per $t \in (0, 1)$ si ottengono tutti i punti interni all'intervallo.
Analizziamo la disuguaglianza (5): nel termine di sinistra si valutano i valori di f nell'intervallo $[x, y]$, il termine di destra può essere scritto come

$$f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big)$$

che, nella variabile t, rappresenta la retta passante per i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y)$. Limitandosi a $t \in [0, 1]$ abbiamo una parte della retta, un segmento, che unisce i due punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y)$. Vediamo una rappresentazione grafica: si noti che (5) significa che il grafico di f, limitatamente all'intervallo $[x, y]$, è fatto di punti con ordinata minore rispetto al corrispondente punto con la stessa ascissa che giace sul grafico della retta $t \mapsto f(x)+t\big(f(y)-f(x)\big)$.



Osservazione 6.2. - Si dimostri che se f è convessa in (a, b) allora per ogni $r, s, t \in (a, b)$ con $r < s < t$ si ha (si veda la dispensa di esercizi per la soluzione)

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leqslant \frac{f(t) - f(s)}{t - s}\,.$$

Teorema 6.3. *Se una funzione è convessa (concava) allora è continua.*

Dimostrazione - Presi $r, s, t, u \in (a, b)$ con $r < s < t < u$ dall'osservazione precedente si ha che

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leqslant \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(t)}{u - t}\,,$$

© Fabio Paronetto

da cui

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r}\big(t-s\big) \leqslant f(t)-f(s) \leqslant \frac{f(u)-f(t)}{u-t}\big(t-s\big)\,.$$

Mandando t a s si conclude. $\square$

Vediamo qualche esempio: la funzione $f(x) = |x|$ è convessa, le funzioni $x \mapsto x^{2k}$, $k \in \mathbf{N}$ sono convesse (strettamente se $k \geqslant 1$), la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ è convessa (strettamente se $a \neq 1$), la funzione $x \mapsto \log_a x$ è strettamente convessa se $a < 1$, è strettamente concava se $a > 1$.

La funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è strettamente convessa nell'intervallo $[0, \pi]$, è strettamente concava nell'intervallo $[\pi, 2\pi]$.

Vediamo di verificare che $x \mapsto x^2$ è strettamente convessa. Si fissino due valori distinti x, y e si supponga che $x < y$. Va verificato che

$$\big((1-t)x + ty\big)^2 \leqslant (1-t)x^2 + ty^2, \quad t \in [0,1]$$

e

$$\big((1-t)x + ty\big)^2 < (1-t)x^2 + ty^2, \quad t \in (0,1).$$

Per $t = 0$ e $t = 1$ la cosa è immediata, per cui limitiamoci a $t \in (0,1)$. Svolgendo il quadrato si ha

$$\begin{gathered}
(1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2(1-t)txy < (1-t)x^2 + ty^2 \\
\Updownarrow \\
2(1-t)txy < \big((1-t) - (1-t)^2\big)x^2 + (t-t^2)y^2 \\
\Updownarrow \\
2(1-t)txy < (1-t)tx^2 + (1-t)ty^2
\end{gathered}$$

e tale disuguaglianza è sempre vera. Infatti (ricordo: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$) dividendo per $t(1-t)$ basta prendere $a = x$ e $b = y$ per rendersene conto.

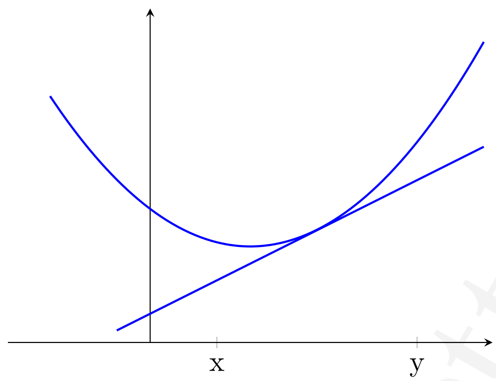
Da questo esempio ci si rende conto che non è immediato verificare la convessità, o la concavità, di una funzione usando (5). Vediamo ora, assumendo qualche ipotesi in più, condizioni che garantiscono la convessità.

Teorema 6.4. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, f derivabile in I. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) f è convessa;
b) $f(x) \geqslant f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ per ogni $x, x_o \in I$;
c) f' è crescente in I.

Si osservi che graficamente il punto b) significa che il grafico di f è "sopra" il grafico della retta tangente al grafico di f.

© Fabio Paronetto



© Fabio Paronetto

Dimostrazione - Mostriamo le tre implicazioni $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$, $c) \Rightarrow a)$, da cui avremo le tre equivalenze.
$a) \Rightarrow b)$ - Dall'ipotesi si ha

$$f\big((1-t)x_o + t\,x\big) \leqslant (1-t)f(x_o) + tf(x) = f(x_o) + t\big(f(x) - f(x_o)\big)$$

da cui, per $t \in (0,1)$,

$$f(x)-f(x_o) \geqslant \frac{f\big(x_o + t(x-x_o)\big) - f(x_o)}{t} = \frac{f\big(x_o + t(x-x_o)\big) - f(x_o)}{t(x-x_o)}\,(x-x_o).$$

Passando al limite per $t \to 0$ si ottiene la tesi.
$b) \Rightarrow c)$ - Per ipotesi valgono

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \geqslant f'(y)(x-y) = -f'(y)(y-x), \\ &f(y) - f(x) \geqslant f'(x)(y-x) \end{aligned}$$

per ogni $x, y \in I$. Sommando si ottiene

$$\begin{gathered} 0 \geqslant \big(f'(x) - f'(y)\big)(y-x) \\ \Updownarrow \\ \big(f'(x) - f'(y)\big)(x-y) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Si osservi come questa disuguaglianza significa che f' è crescente.
$c) \Rightarrow a)$ - Dati $x, y \in I$ si supponga che $x < y$. Si consideri $z \in (x,y)$. Dal teorema di Lagrange si ha che esistono $a \in (x,z)$ e $b \in (z,y)$ tali che

$$f'(a) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \text{e} \quad f'(b) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Dall'ipotesi si ha che

$$
\begin{gathered}
\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \\
\Updownarrow \\
\big(f(z)-f(x)\big)(y-z) \leqslant \big(f(y)-f(z)\big)(z-x) \\
\Updownarrow \\
f(z)(y-x) \leqslant f(y)(z-x)+f(x)(y-z).
\end{gathered}
$$

Poiché z è compreso tra x e y esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$z=(1-t)x+ty.$$

Riscrivendo l'ultima disuguaglianza si ottiene

$$f\big((1-t)x+ty\big)(y-x) \leqslant f(y)(ty-tx)+f(x)(1-t)(x-y).$$

Dividendo per $y-x$ si conclude. □

Dalla dimostrazione si ricava anche

Teorema 6.5. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, f derivabile in I. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) f è strettamente convessa;
b) $f(x) > f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$ per ogni $x, x_o \in I$, $x \neq x_o$;
c) f' è strettamente crescente in I.

Inoltre si mostrano gli analoghi risultati per le funzioni concave, che non riportiamo.

Vediamo ora un'altra condizione equivalente alla convessità nel caso in cui f sia derivabile due volte.

Teorema 6.6. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, f derivabile due volte. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $f'' \geqslant 0$ per ogni $x \in I$;
b) f è convessa in I.

Inoltre se vale l'affermazione

c) $f'' > 0$ per ogni $x \in I$

allora vale l'affermazione

d) f è strettamente convessa in I.

Dimostrazione - Segue dal Teorema 3.8. Infatti (mostriamo l'equivalenza tra a) e b)), $f'' \geqslant 0$ in I se e solo se f' è crescente in I e questo è vero se e solo se (Teorema 6.5) f è convessa.
Per quanto riguarda i punti c) e d) abbiamo: se $f'' > 0$ in I allora f' è strettamente crescente in I (Teorema 3.8) e questo è vero se e solo se (Teorema 6.5) f è strettamente convessa. □

© Fabio Paronetto

Osservazione 6.7. - Come nel Teorema 3.8 non possiamo concludere che le affermazioni sono equivalenti. Infatti si consideri la funzione $f(x) = x^4$, $x \in \mathbf{R}$. È strettamente convessa, ma la sua derivata seconda si annulla in 0. Però, analogamente a quanto visto nell'osservazione 3.9, se $f'' \geqslant 0$ e si annulla in un solo punto allora è strettamente convessa (perché f' è strettamente crescente).

Osservazione 6.8. - Sia $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa di classe $C^1(I)$, I intervallo. Se un punto x_o è critico per f allora è di minimo globale.
Infatti, dal punto b) del Teorema 6.5 si ha che $f(x_o) \leqslant f(x)$ per ogni $x \in I$.
Inoltre se f è strettamente convessa e x_o è critico allora questo è l'unico punto di minimo.
Infatti se ce ne fossero due, x_o e y_o, si avrebbe che

$$f\left(\frac{x_o + y_o}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x_o) + \frac{1}{2} f(y_o) = \min f$$

e questo non è possibile.

Definizione 6.9 (Flesso)**.** *Data $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo aperto, un punto $x_o \in I$ è detto di flesso per f se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset I$$

e

$$\begin{aligned} &f \quad \textit{concava in} \quad (x_o - \delta, x_o), \\ &f \quad \textit{convessa in} \quad (x_o - \delta, x_o), \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} &f \quad \textit{convessa in} \quad (x_o - \delta, x_o), \\ &f \quad \textit{concava in} \quad (x_o - \delta, x_o). \end{aligned}$$

In particolare, dai due ultimi risultati, si avrà che x_o è di flesso per f funzione derivabile se f' è crescente (rispettivamente decrescente) in un intorno sinistro di x_o e decrescente (rispettivamente crescente) in un intorno di x_o oppure, se f derivabile due volte, se $f'' \geqslant 0$ (rispettivamente $f'' \leqslant 0$) in un intorno sinistro di x_o e $f'' \leqslant 0$ (rispettivamente $f'' \geqslant 0$) in un intorno destro di x_o.

Esempio Il punto 0 è di flesso per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

© fabio Paronetto