11 - Confronti locali e formula di Taylor

Ultimo aggiornamento: 26 febbraio 2025

1. Confronti locali tra funzioni

Definizione 1.1 (o piccolo)**.** *Sia $c \in \overline{\mathbf{R}}$, J un intorno di c, $f, g : J \to \mathbf{R}$ due funzioni definite in tale intorno. Diciamo che f è un "o piccolo" di g in c (e si scrive $f \in o_c(g)$ oppure f è $o_c(g)$) se esiste una funzione $\sigma : J \to \mathbf{R}$ tale che*

$$f(x) = \sigma(x)g(x) \qquad \textit{per ogni } x \in J \setminus \{c\}$$
$$e \ \lim_{x \to c} \sigma(x) = 0.$$

Nella definizione appena data si osservi che $c \in \overline{\mathbf{R}}$: se $c \in \mathbf{R}$ possiamo pensare che $J = B_\delta(c)$ per qualche $\delta > 0$, se $c = +\infty$ J sarà una semiretta $(M, +\infty)$.

Proposizione 1.2. *Nelle condizioni della definizione precedente e se $g(x) \neq 0$ per $x \in J \setminus \{c\}$ si ha che*

$$f \text{ è } o_c(g) \quad \textit{se e solo se} \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dimostrazione - Basta considerare $\sigma(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. □

Solitamente, quando è chiaro dal contesto chi sia c, si scrive semplicemente

$$f \text{ è } o(g)$$

Esempi 1.3. - Vediamo qualche esempio.

1. Date $f(x) = (x - c)^m$ e $g(x) = (x - c)^n$ con $m > n$ si ha che f è $o(g)$ (in c). In particolare se $c = 0$ si ha che (scrivendo più impropriamente, ma più efficamente)
$$x^m \ \text{ è } \ o(x^n) \quad \text{se } m > n.$$
2. Date $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ si ha che f è $o(g)$ a $+\infty$.
Più in generale, date $f(x) = \frac{1}{x^m}$ e $g(x) = \frac{1}{x^n}$ si ha che f è $o(g)$ a $+\infty$ se $m > n$ o
$$\frac{1}{x^m} \ \text{ è } \ o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{se } m > n.$$
3. Se $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $g \equiv 1$ si ha ovviamente che $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 0$. Allora f è $o(g)$. In questi casi a volte si scrive che f è $o(1)$ per denotare che $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

© Fabio Paronetto

Si considerino $f, f_1, g, g_1 : J \to \mathbf{R}$, J intorno ci $c \in \overline{\mathbf{R}}$.
Se f_1 è $o(f)$ e g_1 è $o(g)$ (in c) allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si verifica facilmente scrivendo

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vediamo due casi particolari: nel primo consideriamo $c = 0$ e

$$f(x) = \operatorname{sen} x^3, f_1(x) = x^4, \quad g(x) = x^3, g_1(x) = \operatorname{tg} x^5.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3 + x^4}{x^3 + \operatorname{tg} x^4} = \lim_{x\to c} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}.$$

Nel secondo consideriamo $c = +\infty$ e

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^3}, f_1(x) = \frac{1}{x^4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^3}, g_1(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x^5}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3} + \operatorname{tg} \frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}.$$

Definizione 1.4 (funzioni asintotiche)**.** *Date due funzioni $f, g : J \to \mathbf{R}$, J intorno di $c \in \overline{\mathbf{R}}$, con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \neq c$, diciamo che f è asintotica a g in c se*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0. \tag{1}$$

I casi interessanti sono quelli nei quali

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \ \ (\text{o } -\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \ \ (\text{o } -\infty).$$

Ordine di infinitesimo e di infinito - Se $c \in \mathbf{R}$ e f soddisfa (1) con $g(x) = |x-c|^\alpha$, $\alpha > 0$ diciamo che

<u>f è infinitesima di ordine α in c.</u>

Si può anche distinguere e dire che f è infinitesima di ordine α in c se esistono, anche diversi, o esiste anche uno solo dei due limiti

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} = \lambda_1 \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} = \lambda_2 \in \mathbf{R}, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$$

© Fabio Paronetto

(ad esempio, i due limiti potrebbero avere segno diverso).
Se $c = +\infty$ e f soddisfa (1) con $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ diciamo che

$$\underline{f \text{ è infinitesima di ordine } \alpha \text{ a } +\infty}.$$

Si può anche dire che f è infinitesima di ordine α a $+\infty$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} f(x)x^\alpha = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Se una funzione f è infinitesima di ordine α in un punto $c \in \overline{\mathbf{R}}$ allora

$$f \ \text{ è } o(|x-c|^\beta) \quad \text{per ogni } \beta \in (0,\alpha) \quad \text{se } c \in \mathbf{R},$$

$$f \ \text{ è } o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \text{per ogni } \beta \in (0,\alpha) \quad \text{se } c = +\infty.$$

Infatti

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} |x-c|^{\alpha-\beta} = 0 \quad \text{se } c \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to+\infty} f(x)x^\alpha \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} = 0 \quad \text{se } c = +\infty.$$

Diciamo che ($\alpha > 0$)

$$\underline{f \text{ è un infinito di ordine } \alpha \text{ in } c}$$

se

$$c \in \mathbf{R}: \qquad \lim_{x\to c} f(x)|x-c|^\alpha = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$c = +\infty: \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Nuovamente: bisognerebbe precisare anche in questo caso, se $c \in \mathbf{R}$, che la definizione rimane valida se i due limiti, da destra e da sinistra (o uno solo dei due quando non è possibile fare l'altro), esistono finiti e non nulli. Si osservi che

$$f \text{ è un infinito di ordine } \alpha \text{ in } c \implies \frac{1}{f} \text{ è infinitesima di ordine } \alpha \text{ in } c,$$

$$f \text{ è un infinitesimo di ordine } \alpha \text{ in } c \implies \frac{1}{|f|} \text{ è infinito di ordine } \alpha \text{ in } c.$$

Esempi 1.5. -
La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ ha ordine di infinitesimo 2 in 0.

La funzione $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$ ha ordine di infinitesimo 2 a $+\infty$.

La funzione $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ ha ordine di infinitesimo 1/2 in 0 (! esiste solo il limite per $x \to 0^+$).

La funzione $f(x) = x^3$ ha ordine di infinitesimo 3 in 0. Si osservi però che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{|x|^3} = 1, \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{|x|^3} = -1.$$

© Fabio Paronetto

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ha ordine di infinitesimo 2 a $+\infty$.
La funzione $f(x) = x + x^2$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 e ordine di infinito 2 a $+\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x^{-1})}{x^2} = 1.$$

In generale (si suppongano $k, n \in \mathbf{N}^*$) $f(x) = x^k + x^n$ ha ordine di infinitesimo $\min\{k, n\}$ in 0 e ordine di infinito $\max\{k, n\}$ a $+\infty$.

Osservazione 1.6. - Si osservi che non tutte le funzioni hanno ordine di infinitesimo o di infinito.
Innazitutto si osservi che se una funzione f ha ordine di infinitesimo $\alpha > 0$ in $c \in \overline{\mathbf{R}}$ si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta} = 0 \qquad \text{per ogni } \beta \in (0, \alpha),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x-c|^\beta} = +\infty \qquad \text{per ogni } \beta \in (\alpha, +\infty).$$

e solo per $\beta = \alpha$ il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, o uno dei due limiti $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, è un numero diverso da zero.
Se consideriamo la funzione

$$f(x) = x^\alpha \log x$$

soddisfa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0 \qquad \text{per ogni } \beta \in (0, \alpha),$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta} = -\infty \qquad \text{per ogni } \beta \in (\alpha, +\infty).$$

però f <u>non ha alcun ordine di infinitesimo</u> in 0.

Operazioni con gli o piccoli del tipo potenza - Analizziamo qualche caso particolare, quello delle funzioni potenza $x \mapsto x^n$ con $n \in \mathbf{N}^*$.
Siano f un $o(x^n)$ in 0 e g un $o(x^k)$ in 0 con $n, k \in \mathbf{N}^*$.

1. Allora la funzione $f + g$ è un $o(x^m)$ dove m è il minore tra k ed n. Infatti, supponendo $k \leqslant n$,
$$\frac{f(x)+g(x)}{x^k} = \frac{f(x)}{x^k} + \frac{g(x)}{x^n}\,\frac{x^n}{x^k}$$
e passando al limite si ottiene 0, da cui la tesi. Più evocativamente possiamo scrivere
$$\boxed{o(x^n) + o(x^k) = o(x^m), \qquad m = \min\{k, n\}}.$$

© Fabio Paronetto

Si verifica anche facilmente che, se $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$

$$o(\lambda x^n) = o(x^n).$$

2. Allo stesso modo si verifica che

$$\boxed{o(x^n)o(x^k) = o(x^{n+k})}$$

dove con il prodotto si intende fg è un $o(x^{k+n})$ dove f è $o(x^n)$ e g è $o(x^k)$. Infatti

$$\frac{f(x)g(x)}{x^{n+k}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^k}$$

e passando al limite si conclude.

3. Dal punto 2. si ottiene anche che

$$\boxed{\big(o(x^n)\big)^k = o(x^{kn})}$$

4. Poiché la funzione $f(x) = x + x^2$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 una funzione che sia $o(x + x^2)$ è più semplicemente $o(x)$. Per verificarlo basta mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x + x^2)}{x} = 0.$$

Riscrivendo

$$\frac{o(x + x^2)}{x} = \frac{o(x + x^2)}{x + x^2}\frac{x + x^2}{x}$$

e passando al limite per $x \to 0$ si ha che il primo dei due fattori a destra tende a 0 per definizione, il secondo a 1. Quindi in generale si ha

$$\boxed{o(x^k + x^n) = o(x^m), \qquad m = \min\{k, n\}}.$$

5. Infine si osservi che

$$\boxed{o(x^n) \ \text{ è } o(x^k), \qquad \text{se } n > k}.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n}\frac{x^n}{x^k} = 0.$$

Definizione 1.7 (O grande)**.** *Sia $c \in \overline{\mathbf{R}}$, J un intorno di c, $f, g : J \to \mathbf{R}$ due funzioni definite in tale intorno. Diciamo che f è un "O grande" di g in c (e si scrive $f \in O_c(g)$ oppure f è $O_c(g)$) se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leqslant C\,|g(x)| \quad \textit{per } x \in J.$$

© Mario Paronetto

Esempio 1.8. - La funzione $f(x) = x^2$ è infinitesima in 0.
La funzione $f(x) = x^2$ è $o(|x|^\alpha)$ per ogni $\alpha \in (0, 2)$.
La funzione $f(x) = x^2$ ha ordine di infinitesimo 2 in 0.
La funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ è

è infinitesima in 0

è $o(|x|^\alpha)$ per ogni $\alpha \in (0, 2)$

è $O(x^2)$

non ha ordine di infinitesimo.

2. Sviluppi asintotici e formula di Taylor

Cominciamo con un'osservazione. Limitiamoci in questo paragrafo a fare confronti con potenze ad esponente intero.

Osservazione 2.1. - Si supponga che f abbia ordine di infinitesimo $m \in \mathbf{N}$ in un punto x_o e

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{(x - x_o)^m} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

In tal caso la funzione $\lambda(x - x_o)^m$ è detta *parte principale* di f. Allora la funzione

$$f_1(x) = f(x) - \lambda(x - x_o)^m \quad \text{è } o\big((x - x_o)^m\big).$$

Infatti

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - \lambda(x - x_o)^m}{(x - x_o)^m} = 0.$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x - x$ è infinitesima in 0.

Il ragionamento fatto nell'osservazione precedente può essere iterato. Ci si può chiedere allora se esiste $m_1 \in \mathbf{N}$ tale che f_1 ha ordine di infinitesimo. Se ce l'ha si supponga che sia m_1. In tal caso si avrebbe l'esistenza di $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, tale che

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{(x - c)^{m_1}} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^{m_1}} = \lambda_1.$$

Si osservi che se tale m_1 esiste si ha che $m_1 > m$. Infatti

$$\frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^{m_1}} = \frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^m}(x - c)^{m - m_1}$$

e questa quantità convergerebbe a 0 se si avesse $m_1 \leqslant m$.
Quindi la funzione

$$f_2(x) = f(x) - \lambda(x - c)^m - \lambda_1(x - c)^{m_1} \quad \text{è } o(x - c)^{m_1}.$$

© Fabio Paronetto

A questo punto ci si può chiedere se ha un ordine di infinitesimo e iterare il ragionamento fatto prima.
Questo ragionamento è quello che sta alla base degli svilupppi della formula di Taylor.

Formula di Taylor Si consideri $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo aperto, $x_o \in I$, f derivabile in x_o. Si è già visto che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)}{x - x_o} = 0.$$

Quindi, se definiamo

$$\begin{aligned} P_1(x; x_o) &= f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \\ R_1(x; x_o) &= f(x) - P_1(x; x_o) \end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - P_1(x; x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{R_1(x; x_o)}{x - x_o} = 0.$$

Il polinomio P_1 è un polinomio di primo grado apparente (apparente perché $f'(x_o)$ potrebbe essere nullo ed in tal caso P_1 avrebbe grado 0).
Supponendo che f sia derivabile due volte (sarà chiaro tra poco il perché) possiamo cercare un polinomio di secondo grado (secondo grado apparente)

$$P_2(x; x_o) = a_2(x - x_o)^2 + a_1(x - x_o) + a_0$$

tale che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - P_2(x; x_o)}{(x - x_o)^2} = \lim_{x \to x_o} \frac{R_2(x; x_o)}{(x - x_o)^2} = 0,$$

dove

$$R_2(x; x_o) = f(x) - P_2(x; x_o).$$

Trovati a_0, a_1, a_2 si può iterare il ragionamento aumentando il grado del polinomio (supponenedo f derivabile un numero sufficiente di volte).
Vediamo ora come sia possibile fare ciò e trovare chi sono i coefficienti di tali polinomi.

Lemma 2.2. *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni di classe $C^{m-1}(I)$ e derivabili m volte in x_o. Allora*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_o)^m} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} f(x_o) &= g(x_o) \\ f'(x_o) &= g'(x_o) \\ f''(x_o) &= g''(x_o) \\ &\vdots \\ f^{(m)}(x_o) &= g^{(m)}(x_o) \end{aligned}$$

© Fabio Paronetto

Dimostrazione - Per semplicità poniamo $F(x) = f(x) - g(x)$.
($\Leftarrow$) Supponiamo $F(x_o) = F'(x_o) = \ldots = F^{(m)}(x_o) = 0$. Applicando la regola di de l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^m} &= \lim_{x\to x_o} \frac{F'(x)}{m(x-x_o)^{m-1}} = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F''(x)}{m(m-1)(x-x_o)^{m-2}} = \\
&= \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_o)} = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F^{(m-1)}(x) - F^{(m-1)}(x_o)}{m!(x-x_o)} = \frac{F^{(m)}(x_o)}{m!}
\end{aligned}$$

e quindi tutti i limiti sono nulli.
($\Rightarrow$) Se per assurdo ci fosse $k \leqslant m$ tale che $F(x_o) = F'(x_o) = \ldots = F^{(k-1)}(x_o) = 0$ e $F^{(k)}(x_o) \neq 0$ si avrebbe, ragionando come sopra,

$$\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^k} = \overset{\text{de l'Hôpital}}{\cdots} = \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} \neq 0.$$

Ma d'altra parte

$$\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^k} = \lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^m}\,(x-x_o)^{m-k} = 0$$

e questo è impossibile. $\square$

Osservazione 2.3. - Per utilizzare la regola di de l'Hôpital una volta si ha bisogno che f e g siano derivabili in $I \setminus \{x_o\}$. Chiaramente se sono derivabili saranno anche continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Per usarlo due volte avremo bisogno che f' e g' siano derivabili in $I \setminus \{x_o\}$, cioè che f e g siano derivabili due volte in $I \setminus \{x_o\}$, il che implica f' e g' continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Nel lemma precedente si usa la regola $m-1$ volte per cui si avrà bisogno che f e g siano derivabili $m-1$ volte in $I \setminus \{x_o\}$, e come conseguenza tutte le loro derivate fino all'ordine $m-2$ saranno continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Inoltre nell'ultimo passaggio della prima parte della dimostrazione si usa il fatto che f e g siano derivabili m volte nel punto x_o, il che implica che $f^{(k)}$ e $g^{(k)}$ siano continue in x_o per tutti i k minori o uguali ad m.
In conclusione, avendo la derivabilità $m-1$ volte in $I \setminus \{x_o\}$, ma anche m volte in x_o si conclude che l'ipotesi minimale che si può richiedere nel lemma

© Fabio Paronetto

precedente è la seguente:

$$\begin{aligned}
&f, g \in C^{m-2}(I),\\
&f, g \text{ derivabili } m-1 \text{ volte in } I,\\
&f, g \text{ derivabili } m \text{ volte in } x_o.
\end{aligned}$$

Applichiamo ora il lemma ad una generica funzione f di classe C^{m-1} e derivabile m volte in un punto x_o e a

$$g(x) = P_m(x) = a_m(x-x_o)^m + a_{m-1}(x-x_o)^{m-1} + \ldots + a_1(x-x_o) + a_0.$$

Si ottiene che

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - P_m(x)}{(x-x_o)^m} = 0$$

se e solo se

$$\begin{aligned}
a_0 &= P_m(x_o) = f(x_o)\\
a_1 &= P_m'(x_o) = f'(x_o)\\
2a_2 &= P_m''(x_o) = f''(x_o)\\
&\vdots\\
m!\, a_m &= P_m^{(m)}(x_o) = f^{(m)}(x_o),
\end{aligned}$$

cioè se

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots m.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

Teorema 2.4 (formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^{m-1}(I)$ e derivabile m volte in x_o. Allora*

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x-x_o)^2 + \ldots +\\
+ \frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}(x-x_o)^m + R_m(x;x_o) =\\
= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k + R_m(x;x_o)
\end{aligned}$$

dove

$$\lim_{x\to x_o} \frac{R_m(x;x_o)}{(x-x_o)^m} = 0,$$

cioè $R_m(x;x_o) = o\big((x-x_o)^m\big)$.

Enunciamo ora un altro risultato, di cui non vediamo la dimostrazione. Si noti che in questo caso le ipotesi sono più restrittive rispetto al precedente.

© Fabio Paronetto

Teorema 2.5 (formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^{m+1}(I)$. Allora per ogni $x \in I$, $x \neq x_o$, esiste c compreso tra x e x_o tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_o)^{m+1}.$$

© Fabio Paronetto

3. Alcuni sviluppi

Vediamo alcuni sviluppi, arrestati ad un generico ordine che a volte sarà n, a volte sarà generico, ma diverso da n, a volte sarà un numero perché lo sviluppo è un po' più complicato e non ha una forma generale per l'n-esimo termine.
Sono tutti sviluppi fatti nel punto $x = 0$, ma, ovviamente, si potrebbero fare anche in altri punti.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{345} x^7 + o(x^8)$$

Alcuni casi particolari di $(1+x)^\alpha$ sono:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + o(x^n)$$

Limiti notevoli - Si osservi che utilizzando lo sviluppo di Taylor il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

© Fabio Paronetto

è immediato. Infatti

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}.$$

Analogamente

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

da cui

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}.$$

Tutti i limiti notevoli visti sono, a posteriori, sviluppi di Taylor al prim'ordine, tranne il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che usa lo sviluppo al secondo ordine. Infatti

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}.$$

Osservazione 3.1. - Si osservi che se si conosce lo sviluppo di Taylor di una funzione fino ad un certo ordine si conoscono molte informazioni riguardo quella funzione. Ad esempio sia

$$f(x) = 3 + 4(x - x_o) - \frac{1}{2}(x - x_o)^2 + (x - x_o)^3 + o\big((x - x_o)^3\big).$$

Da ciò si ricava, pur non conoscendo f, che

$$f(x_o) = 3, \quad f'(x_o) = 4, \qquad \frac{f''(x_o)}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{f'''(x_o)}{6} = 1$$

e quindi

$$f(x_o) = 3, \quad f'(x_o) = 4, \qquad f''(x_o) = -1, \qquad f'''(x_o) = 6.$$

© Fabio Paronetto

4. Punti stazionari e derivate seconde

Vediamo ora un risultato che può essere provato facilmente usando gli sviluppi di Taylor.

Teorema 4.1. *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in I$, $f \in C^1(I)$ e derivabile due volte in x_o. Se x_o è un punto stazionario per f, cioè $f'(x_o) = 0$, allora*

i) se x_o è un punto di minimo locale per f allora $f''(x_o) \geqslant 0$;
ii) se $f''(x_o) > 0$ allora il punto x_o è un punto di minimo locale stretto;
iii) se x_o è un punto di massimo locale per f allora $f''(x_o) \leqslant 0$;
iv) se $f''(x_o) < 0$ allora il punto x_o è un punto di massimo locale stretto.

Dimostrazione - Vediamo per semplicità soli punti *i*) e *ii*), essenso gli altri analoghi.
Punto ii) - Scriviamo lo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine per f. Ricordando che x_o è stazionario si ha

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f''(x_o)}{2}(x - x_o)^2 + o(|x - x_o|^2).$$

Per definizione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\left|o(|h|^2)\right| < \varepsilon|h|^2$ per ogni $h \in B_\delta(0)$ per cui

$$f(x) - f(x_o) \geqslant \left(\frac{f''(x_o)}{2} - \varepsilon\right)|x - x_o|^2.$$

Poiché ε è arbitrario, scegliendo $\varepsilon < f''(x_o)/2$ si conclude.
Punto i) - Supponendo di aver già mostrato il punto *iv*) se la tesi non fosse vera, cioè se $f''(x_o) < 0$, si avrebbe che x_o è di massimo locale stretto e quindi non potrebbe essere di minimo locale. □

In sostanza, suppondendo di essere nelle condizioni dei punti *ii*) o *iv*), si ha che la parte principale (si veda l'Osservazione 2.1) di $f(x) - f(x_o)$ in un opportuno intorno di x_o è

$$a(x - x_o)^2$$

con $a \neq 0$. Se $a > 0$ localmente la funzione $x \mapsto a(x - x_o)^2$, e quindi anche f, ha un minimo stretto, se $a < 0$ localmente la funzione $x \mapsto a(x - x_o)^2$, e quindi anche f, ha un massimo stretto.

Esempi 4.2. - La funzione $f(x) = x^2$ ha derivata prima nulla in 0, $f''(0) > 0$, 2 è di minimo locale stretto (in questo caso è anche il minimo assoluto).
La funzione $g(x) = x^4$ ha derivata prima nulla in 0, 0 è di minimo locale e $f''(0) > 0$, mentre $g''(0) = 0$.
La funzione

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ 0 & x \in (0,1) \\ (x-1)^2 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

ha sia minimo che massimo (locali) in ogni punto compreso tra 0 e 1.
Si osservi che h non è derivabile due volte in 0 e in 1 (lo si verifichi!).

Osservazione 4.3. - Si supponga che lo sviluppo di Taylor del primo ordine di una funzione f di classe C^1 in un punto x_o sia

$$f(x) = 3 + 2(x - x_o) + o(x - x_o).$$

Si può concludere che f è localmente (intorno ad x_o) invertibile. Infatti la derivata prima è 2, in particolare è non nulla. Di conseguenza per il teorema della permanenza del segno f' è positiva in un intorno di x_o, e quindi f invertibile.
Si supponga che lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di una funzione f in un punto x_o sia

$$f(x) = 3 + 2(x - x_o)^2 + o(x - x_o)^2$$

Si può concludere, utilizzando il teorema precedente (si veda anche l'Osservazione 3.1) che in x_o f ha un punto di minimo locale stretto.

Approfondimento - Il risultato del Teorema 4.1 può essere generalizzato. Si supponga che una certa funzione f sia di classe C^{m-1} in un intervallo e derivabile m volte in un punto x_o e si supponga che

$$f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(m-1)}(x_o) = 0, \quad f^{(m)}(x_o) \neq 0. \tag{2}$$

In particolare x_o è un punto critico. Come capire la natura di quel punto visto che anche la derivata seconda è nulla?
Sviluppando all'm-esimo ordine f si avrà

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}(x - x_o)^m + o\big((x - x_o)^m\big) = (x - x_o)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + \frac{o\big((x - x_o)^m\big)}{(x - x_o)^m}\right].$$

Come nella dimostrazione del Teorema 4.1 è sufficiente scegliere ε sufficientemente piccolo in modo che in un opportuno intorno $B_\delta(x_o)$ la quantità $\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + \frac{o((x-x_o)^m)}{(x-x_o)^m}$ abbia lo stesso segno di $\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}$.
Per cui si deduce che se m è dispari x_o è un punto di flesso a tangente orizzontale, se m è pari e $f^{(m)}(x_o) > 0$ il punto x_o è di minimo, se m è pari e $f^{(m)}(x_o) < 0$ il punto x_o è di massimo locale.

© Fabio Paronetto

5. Appendice - non svolto a lezione

Vediamo in questo paragrafo come sia possibile scrivere lo sviluppo di Taylor di f^{-1}, pur senza conoscerla, conoscendo però f e il suo sviluppo arrestato ad un ordine m.
Prima di tutto si supponga che $f : I \to \mathbf{R}$ sia invertibile in un intorno di un punto $x_o \in I$ e che in tale punto il suo sviluppo sia

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \ldots + a_m(x - x_o)^m + (x - x_o)^m$$

con a_k noti. Gli a_k ovviamente saranno

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}.$$

Si osservi che f è localmente invertibile intorno ad x_o se e solo se la sua derivata prima, cioè la quantità a_1, è non nulla. Vedremo infatti che non si troverebbero gli α_k se a_1 fosse 0.

Supponendo esista f^{-1}, si supponga che tale funzione abbia un suo sviluppo intorno al punto $y_o = f(x_o)$ del tipo

$$f^{-1}(y) = \alpha_0 + \alpha_1(y - y_o) + \alpha_2(y - y_o)^2 + \ldots + \alpha_m(y - y_o)^m + (y - y_o)^m$$

dove questa volta α_k sono ignoti. Come trovarli? Prima di tutto si osservi che $f^{-1}(y_0) = \alpha_0$ da cui $\alpha_0 = x_o$. Osservando che

$$\frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o} = \alpha_1 + \alpha_2(y - y_o) + \ldots$$

per trovare α_1 sarà sufficiente calcolare

$$\alpha_1 = \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o}.$$

Per calcolare tale limite usiamo il fatto che conosciamo f e α_0:

$$\alpha_1 = \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \frac{1}{a_1}.$$

Una volta trovato α_1 procediamo con il trovare α_2:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0 - \alpha_1(y - y_o)}{(y - y_o)^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(f(x) - f(x_o))}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2)}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - (x - x_o) - \frac{a_2}{a_1}(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2)}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= -\frac{a_2}{a_1} \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^2))}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= -\frac{a_2}{a_1} \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^2)}{(x - x_o)^2} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} = -\frac{a_2}{a_1^3}.
\end{aligned}$$

Ora per trovare α_3 si calcola

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0 - \alpha_1(y - y_o) - \alpha_2(y - y_o)^2}{(y - y_o)^3} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(f(x) - f(x_o)) + \frac{a_2}{a_1^3}(f(x) - f(x_o))^2}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + o((x - x_o)^3) + \frac{a_2}{a_1^3}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2))^2}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \left[\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right] \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^3}{(f(x) - f(x_o))^3} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^3))}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \left[\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right] \frac{1}{a_1^3} = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4}
\end{aligned}$$

Iterando il procedimento si possono trovare tutti i termini α_k. Alla fine si avrà lo sviluppo della funzione f^{-1} anche se non si riesce ad esprimere esplicitamente f^{-1}.

© Fabio Paronetto

Gli esercizi 11.34 e 11.35 riguardano questo calcolo, ma in quegli esempi la funzione inversa è nota.
Se si considera la funzione

$$g(x) = x + \log x$$

che è invertibile, ma di cui non riusciamo a scrivere esplicitamente l'inversa, la cosa è più interessante.
Si provi a scrivere lo sviluppo all'ordine 2 o 3 di g nel punto 1.

© Fabio Paronetto