11 - Confronti locali e formula di Taylor

Ultimo aggiornamento: 28 novembre 2022

1. Confronti locali tra funzioni

Definizione 1.1 (o piccolo)**.** *Sia $c \in \overline{\mathbf{R}}$, J un intorno di c, $f, g : J \to \mathbf{R}$ due funzioni definite in tale intorno. Diciamo che f è un "o piccolo" di g in c (e si scrive $f \in o_c(g)$ oppure f è $o_c(g)$) se esiste una funzione $\sigma : J \to \mathbf{R}$ tale che*

$$\begin{aligned} & f(x) = \sigma(x)g(x) \qquad \textit{per ogni } x \in J \setminus \{c\} \\ & \textit{e } \lim_{x\to c} \sigma(x) = 0. \end{aligned}$$

Nella definizione appena data si osservi che $c \in \overline{\mathbf{R}}$: se $c \in \mathbf{R}$ possiamo pensare che $J = B_\delta(c)$ per qualche $\delta > 0$, se $c = +\infty$ J sarà una semiretta $(M, +\infty)$.

Proposizione 1.2. *Nelle condizioni della definizione precedente e se $g(x) \neq 0$ per $x \in J \setminus \{c\}$ si ha che*

$$f \text{ è } o_c(g) \qquad \textit{se e solo se} \qquad \lim_{c\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dimostrazione - Basta considerare $\sigma(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. □

Solitamente, quando è chiaro dal contesto chi sia c, si scrive semplicemente

$$f \text{ è } o(g)$$

Esempi 1.3. - Vediamo qualche esempio.

1. Date $f(x) = (x-c)^m$ e $g(x) = (x-c)^n$ con $m > n$ si ha che f è $o(g)$ (in c). In particolare se $c = 0$ si ha che (scrivendo più impropriamente, ma più efficamente)
$$x^m \text{ è } o(x^n) \quad \text{se } m > n.$$
2. Date $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ si ha che f è $o(g)$ a $+\infty$.
Più in generale, date $f(x) = \frac{1}{x^m}$ e $g(x) = \frac{1}{x^n}$ si ha che f è $o(g)$ a $+\infty$ se $m > n$ o
$$\frac{1}{x^m} \text{ è } o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{se } m > n.$$
3. Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e $g \equiv 1$ si ha ovviamente che $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = 0$. Allora f è $o(g)$. In questi casi a volte si scrive che f è $o(1)$ per denotare che $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

Si considerino $f, f_1, g, g_1 : J \to \mathbf{R}$, J intorno ci $c \in \overline{\mathbf{R}}$.
Se f_1 è $o(f)$ e g_1 è $o(g)$ (in c) allora

$$\lim_{c\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{c\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si verifica facilmente scrivendo

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+\frac{g_1(x)}{g(x)}\right)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vediamo due casi particolari: nel primo consideriamo $c = 0$ e

$$f(x) = \operatorname{sen} x^3, f_1(x) = x^4, \quad g(x) = x^3, g_1(x) = \operatorname{tg} x^5.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3 + x^4}{x^3 + \operatorname{tg} x^4} = \lim_{x\to c} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}.$$

Nel secondo consideriamo $c = +\infty$ e

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^3}, f_1(x) = \frac{1}{x^4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^3}, g_1(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x^5}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3} + \operatorname{tg} \frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}.$$

Definizione 1.4 (funzioni asintotiche)**.** *Date due funzioni $f, g : J \to \mathbf{R}$, J intorno di $c \in \overline{\mathbf{R}}$, con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \neq c$, diciamo che f è asintotica a g in c se*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0. \tag{1}$$

I casi interessanti sono quelli nei quali

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \;\; (\text{o } -\infty) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty \;\; (\text{o } -\infty).$$

Ordine di infinitesimo e di infinito - Se $c \in \mathbf{R}$ e f soddisfa (1) con $g(x) = |x-c|^\alpha$, $\alpha > 0$ diciamo che

$$\underline{f \text{ è infinitesima di ordine } \alpha \text{ in } c.}$$

Si può anche distinguere e dire che f è infinitesima di ordine α in c se esistono, anche diversi, o esiste anche uno solo dei due limiti

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} = \lambda_1 \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha} = \lambda_2 \in \mathbf{R}, \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$$

(ad esempio, i due limiti potrebbero avere segno diverso).
Se $c = +\infty$ e f soddisfa (1) con $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ diciamo che

$$\underline{f \text{ è infinitesima di ordine } \alpha \text{ a } +\infty}.$$

Si può anche dire che f è infinitesima di ordine α a $+\infty$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} f(x)x^\alpha = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Se una funzione f è infinitesima di ordine α in un punto $c \in \overline{\mathbf{R}}$ allora

$$f \;\text{ è } o(|x-c|^\beta) \quad \text{per ogni } \beta \in (0,\alpha) \quad \text{se } c \in \mathbf{R},$$
$$f \;\text{ è } o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad \text{per ogni } \beta \in (0,\alpha) \quad \text{se } c = +\infty.$$

Infatti

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^\alpha}\,|x-c|^{\alpha-\beta} = 0 \quad \text{se } c \in \mathbf{R},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to+\infty} f(x)x^\alpha \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} = 0 \quad \text{se } c = +\infty.$$

Diciamo che ($\alpha > 0$)

$$\underline{f \text{ è un infinito di ordine } \alpha \text{ in } c}$$

se

$$c \in \mathbf{R}: \qquad \lim_{x\to c} f(x)|x-c|^\alpha = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0,$$
$$c = +\infty: \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Nuovamente: bisognerebbe precisare anche in questo caso, se $c \in \mathbf{R}$, che la definizione rimane valida se i due limiti, da destra e da sinistra (o uno solo dei due quando non è possibile fare l'altro), esistono finiti e non nulli. Si osservi che

$$f \text{ è un infinito di ordine } \alpha \text{ in } c \implies \frac{1}{f} \text{ è infinitesima di ordine } \alpha \text{ in } c.$$

Esempi 1.5. -
La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ ha ordine di infinitesimo 2 in 0.

La funzione $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$ ha ordine di infinitesimo 2 a $+\infty$.

La funzione $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ ha ordine di infinitesimo $1/2$ in 0 (! esiste solo il limite per $x \to 0^+$).

La funzione $f(x) = x^3$ ha ordine di infinitesimo 3 in 0. Si osservi però che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{|x|^3} = 1, \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{|x|^3} = -1.$$

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ha ordine di infinitesimo 2 a $+\infty$.

La funzione $f(x) = x + x^2$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 e ordine di infinito 2 a $+\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+x^{-1})}{x^2} = 1.$$

In generale (si suppongano $k, n \in \mathbf{N}^*$) $f(x) = x^k + x^n$ ha ordine di infinitesimo $\min\{k,n\}$ in 0 e ordine di infinito $\max\{k,n\}$ a $+\infty$.

Osservazione 1.6. - Si osservi che non tutte le funzioni hanno ordine di infinitesimo o di infinito. Infatti se una funzione f ha ordine di infinitesimo $\alpha > 0$ in $c \in \overline{\mathbf{R}}$ si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta} = 0 \qquad \text{per ogni } \beta \in (0,\alpha),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x-c|^\beta} = +\infty \qquad \text{per ogni } \beta \in (\alpha,+\infty).$$

e solo per $\beta = \alpha$ il limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, o uno dei due limiti $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{|x-c|^\beta}$, è un numero diverso da zero.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = x^\alpha \log x \quad \text{è infinitesima per ogni } \alpha > 0 \text{ in 0 (da destra)}$$

però f <u>non ha alcun ordine di infinitesimo</u> in 0.

Operazioni con gli o piccoli del tipo potenza - Analizziamo qualche caso particolare, quello delle funzioni potenza $x \mapsto x^n$ con $n \in \mathbf{N}^*$.
Siano f un $o(x^n)$ in 0 e g un $o(x^k)$ in 0 con $n, k \in \mathbf{N}^*$.

1. Allora la funzione $f + g$ è un $o(x^m)$ dove m è il minore tra k ed n. Infatti, supponendo $k \leqslant n$,
$$\frac{f(x)+g(x)}{x^k} = \frac{f(x)}{x^k} + \frac{g(x)}{x^n}\,\frac{x^n}{x^k}$$
e passando al limite si ottiene 0, da cui la tesi. Più evocativamente possiamo scrivere
$$\boxed{o(x^n) + o(x^k) = o(x^m), \qquad m = \min\{k,n\}}.$$
Si verifica anche facilmente che, se $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$
$$o(\lambda x^n) = o(x^n).$$
2. Allo stesso modo si verifica che
$$\boxed{o(x^n)o(x^k) = o(x^{n+k})}$$

dove con il prodotto si intende fg è un $o(x^{k+n})$. Infatti

$$\frac{f(x)g(x)}{x^{n+k}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^k}$$

e passando al limite si conclude.

3. Dal punto 2. si ottiene anche che

$$\boxed{\big(o(x^n)\big)^k = o(x^{kn})}$$

4. Poiché la funzione $f(x) = x + x^2$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 una funzione che sia $o(x + x^2)$ è più semplicemente $o(x)$. Per verificarlo basta mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x + x^2)}{x} = 0.$$

Riscrivendo

$$\frac{o(x + x^2)}{x} = \frac{o(x + x^2)}{x + x^2}\frac{x + x^2}{x}$$

e passando al limite per $x \to 0$ si ha che il primo dei due fattori a destra tende a 0 per defiinizione, il secondo a 1. Quindi in generale si ha

$$\boxed{o(x^k + x^n) = o(x^m), \qquad m = \min\{k, n\}}.$$

5. Infine si osservi che

$$\boxed{o(x^n) \text{ è } o(x^k), \qquad \text{se } n > k}.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n}\frac{x^n}{x^k} = 0.$$

Definizione 1.7 (O grande)**.** *Sia $c \in \overline{\mathbf{R}}$, J un intorno di c, $f, g : J \to \mathbf{R}$ due funzioni definite in tale intorno. Diciamo che f è un "O grande" di g in c (e si scrive $f \in O_c(g)$ oppure f è $O_c(g)$) se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leqslant C\,|g(x)| \quad \textit{per } x \in J.$$

Esempio 1.8. - La funzione $f(x) = x^2$ è infinitesima in 0.
La funzione $f(x) = x^2$ è $o(|x|^\alpha)$ per ogni $\alpha \in (0, 2)$.
La funzione $f(x) = x^2$ ha ordine di infinitesimo 2 in 0.

La funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ è

è infinitesima in 0
è $o(|x|^\alpha)$ per ogni $\alpha \in (0,2)$
è $O(x^2)$
non ha ordine di infinitesimo.

2. Sviluppi asintotici e formula di Taylor

Cominciamo con un'osservazione. Limitiamoci in questo paragrafo a fare confronti con potenze ad esponente intero.

Osservazione 2.1. - Si supponga che f abbia ordine di infinitesimo $m \in \mathbf{N}$ in un punto x_o e

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{(x - x_o)^m} = \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

In tal caso la funzione $\lambda(x - x_o)^m$ è detta *parte principale* di f. Allora la funzione

$$f_1(x) = f(x) - \lambda(x - x_o)^m \quad \text{è } o\big((x - x_o)^m\big).$$

Infatti

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - \lambda(x - x_o)^m}{(x - x_o)^m} = 0.$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha ordine di infinitesimo 1 in 0 poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x - x$ è infinitesima in 0.

Il ragionamento fatto nell'osservazione precedente può essere iterato. Ci si può chiedere allora se esiste $m_1 \in \mathbf{N}$ tale che f_1 ha ordine di infinitesimo. Se ce l'ha si supponga che sia m_1. In tal caso si avrebbe l'esistenza di $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, tale che

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{(x - c)^{m_1}} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^{m_1}} = \lambda_1.$$

Si osservi che se tale m_1 esiste si ha che $m_1 > m$. Infatti

$$\frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^{m_1}} = \frac{f(x) - \lambda(x - c)^m}{(x - c)^m}(x - c)^{m - m_1}$$

e questa quantità convergerebbe a 0 se si avesse $m_1 \leqslant m$.
Quindi la funzione

$$f_2(x) = f(x) - \lambda(x - c)^m - \lambda_1(x - c)^{m_1} \quad \text{è } o(x - c)^{m_1}.$$

A questo punto ci si può chiedere se ha un ordine di infinitesimo e iterare il ragionamento fatto prima.
Questo ragionamento è quello che sta alla base degli svilupppi della formula di Taylor.

$\boxed{\text{Formula di Taylor}}$ Si consideri $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo aperto, $x_o \in I$, f derivabile in x_o. Si è già visto che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)}{x - x_o} = 0.$$

Quindi, se definiamo

$$\begin{aligned} P_1(x; x_o) &= f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \\ R_1(x; x_o) &= f(x) - P_1(x; x_o) \end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - P_1(x; x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{R_1(x; x_o)}{x - x_o} = 0.$$

Il polinomio P_1 è un polinomio di primo grado apparente (apparente perché $f'(x_o)$ potrebbe essere nullo ed in tal caso P_1 avrebbe grado 0).
Supponendo che f sia derivabile due volte (sarà chiaro tra poco il perché) possiamo cercare un polinomio di secondo grado (secondo grado apparente)

$$P_2(x; x_o) = a_2(x - x_o)^2 + a_1(x - x_o) + a_0$$

tale che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - P_2(x; x_o)}{(x - x_o)^2} = \lim_{x \to x_o} \frac{R_2(x; x_o)}{(x - x_o)^2} = 0,$$

dove

$$R_2(x; x_o) = f(x) - P_2(x; x_o).$$

Trovati a_0, a_1, a_2 si può iterare il ragionamento aumentando il grado del polinomio (supponenedo f derivabile un numero sufficiente di volte).
Vediamo ora come sia possibile fare ciò e trovare chi sono i coefficienti di tali polinomi.

Lemma 2.2. *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni di classe $C^{m-1}(I)$ e derivabili m volte in x_o. Allora*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_o)^m} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} f(x_o) &= g(x_o) \\ f'(x_o) &= g'(x_o) \\ f''(x_o) &= g''(x_o) \\ &\vdots \\ f^{(m)}(x_o) &= g^{(m)}(x_o) \end{aligned}$$

Dimostrazione - Per semplicità poniamo $F(x) = f(x) - g(x)$.
($\Leftarrow$) Supponiamo $F(x_o) = F'(x_o) = \ldots = F^{(m)}(x_o) = 0$. Applicando la

regola di de l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^m} &= \lim_{x\to x_o} \frac{F'(x)}{m(x-x_o)^{m-1}} = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F''(x)}{m(m-1)(x-x_o)^{m-2}} = \\
&= \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F^{(m-1)}(x)}{m!(x-x_o)} = \\
&= \lim_{x\to x_o} \frac{F^{(m-1)}(x) - F^{(m-1)}(x_o)}{m!(x-x_o)} = \frac{F^{(m)}(x_o)}{m!}
\end{aligned}$$

e quindi tutti i limiti sono nulli.
$(\Rightarrow)$ Se per assurdo ci fosse $k \leqslant m$ tale che $F(x_o) = F'(x_o) = \ldots = F^{(k-1)}(x_o) = 0$ e $F^{(k)}(x_o) \neq 0$ si avrebbe, ragionando come sopra,

$$\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^k} = \overset{\text{de l'Hôpital}}{\cdots} = \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} \neq 0.$$

Ma d'altra parte

$$\lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^k} = \lim_{x\to x_o} \frac{F(x)}{(x-x_o)^m}\,(x-x_o)^{m-k} = 0$$

e questo è impossibile. $\square$

Osservazione 2.3. - Per utilizzare la regola di de l'Hôpital una volta si ha bisogno che f e g siano derivabili in $I \setminus \{x_o\}$. Chiaramente se sono derivabili saranno anche continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Per usarlo due volte avremo bisogno che f' e g' siano derivabili in $I \setminus \{x_o\}$, cioè che f e g siano derivabili due volte in $I \setminus \{x_o\}$, il che implica f' e g' continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Nel lemma precedente si usa la regola $m-1$ volte per cui si avrà bisogno che f e g siano derivabili $m-1$ volte in $I \setminus \{x_o\}$, e come conseguenza tutte le loro derivate fino all'ordine $m-2$ saranno continue in $I \setminus \{x_o\}$.
Inoltre nell'ultimo passaggio della prima parte della dimostrazione si usa il fatto che f e g siano derivabili m volte nel punto x_o, il che implica che $f^{(k)}$ e $g^{(k)}$ siano continue in x_o per tutti i k minori o uguali ad m.
In conclusione, avendo la derivabilità $m-1$ volte in $I \setminus \{x_o\}$, ma anche m volte in x_o si conclude che l'ipotesi minimale che si può richiedere nel lemma precedente è la seguente:

$$\begin{aligned}
&f, g \in C^{m-2}(I), \\
&f, g \text{ derivabili } m-1 \text{ volte in } I, \\
&f, g \text{ derivabili } m \text{ volte in } x_o.
\end{aligned}$$

Applichiamo ora il lemma ad una generica funzione f di classe C^{m-1} e derivabile m volte in un punto x_o e a

$$g(x) = P_m(x) = a_m(x - x_o)^m + a_{m-1}(x - x_o)^{m-1} + \ldots + a_1(x - x_o) + a_0.$$

Si ottiene che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - P_m(x)}{(x - x_o)^m} = 0$$

se e solo se

$$\begin{aligned} a_0 &= P_m(x_o) = f(x_o) \\ a_1 &= P'_m(x_o) = f'(x_o) \\ 2a_2 &= P''_m(x_o) = f''(x_o) \\ &\vdots \\ m!\, a_m &= P_m^{(m)}(x_o) = f^{(m)}(x_o), \end{aligned}$$

cioè se

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots m.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

Teorema 2.4 (formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^{m-1}(I)$ e derivabile m volte in x_o. Allora*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x - x_o)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}(x - x_o)^m + R_m(x; x_o) = \\ = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k + R_m(x; x_o) \end{aligned}$$

dove

$$\lim_{x \to x_o} \frac{R_m(x; x_o)}{(x - x_o)^m} = 0,$$

cioè $R_m(x; x_o) = o\big((x - x_o)^m\big)$.

Enunciamo ora un altro risultato, di cui non vediamo la dimostrazione. Si noti che in questo caso le ipotesi sono più restrittive rispetto al precedente.

Teorema 2.5 (formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Siano I un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^{m+1}(I)$. Allora per ogni $x \in I$, $x \neq x_o$, esiste c compreso tra x e x_o tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_o)^{m+1}.$$

3. Alcuni sviluppi

Vediamo alcuni sviluppi, arrestati ad un generico ordine che a volte sarà n, a volte sarà generico, ma diverso da n, a volte sarà un numero perché lo sviluppo è un po' più complicato e non ha una forma generale per l'n-esimo termine.
Sono <u>tutti</u> sviluppi fatti <u>nel punto $x = 0$</u>, ma, ovviamente, si potrebbero fare anche in altri punti.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{345} x^7 + o(x^8)$$

Alcuni casi particolari di $(1+x)^\alpha$ sono:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + o(x^n)$$

Limiti notevoli - Si osservi che utilizzando lo sviluppo di Taylor il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

è immediato. Infatti

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}.$$

Analogamente

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

da cui

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}.$$

Tutti i limiti notevoli visti sono, a posteriori, sviluppi di Taylor al prim'ordine, tranne il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che usa lo sviluppo al secondo ordine. Infatti

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}.$$

Osservazione 3.1. - Si osservi che se si conosce lo sviluppo di Taylor di una funzione fino ad un certo ordine si conoscono molte informazioni riguardo quella funzione. Ad esempio sia

$$f(x) = 3 + 4(x - x_o) - \frac{1}{2}(x - x_o)^2 + (x - x_o)^3 + o(x - x_o)^3.$$

Da ciò si ricava, pur non conoscendo f, che

$$f(x_o) = 3, \quad f'(x_o) = 4, \qquad \frac{f''(x_o)}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{f'''(x_o)}{6} = 1$$

e quindi

$$f(x_o) = 3, \quad f'(x_o) = 4, \qquad f''(x_o) = -1, \qquad f'''(x_o) = 6.$$

4. Punti stazionari e derivate seconde

Vediamo ora un risultato che può essere provato facilmente usando gli sviluppi di Taylor.

Teorema 4.1. *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in I$, $f \in C^1(I)$ e derivabile due volte in x_o. Se x_o è un punto stazionario per f, cioè $f'(x_o) = 0$, allora*

i) se x_o è un punto di minimo locale per f allora $f''(x_o) \geqslant 0$;
ii) se $f''(x_o) > 0$ allora il punto x_o è un punto di minimo locale stretto;
iii) se x_o è un punto di massimo locale per f allora $f''(x_o) \leqslant 0$;
iv) se $f''(x_o) < 0$ allora il punto x_o è un punto di massimo locale stretto.

Dimostrazione - Vediamo per semplicità soli punti i) e ii), essenso gli altri analoghi.
Punto ii) - Scriviamo lo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine per f. Ricordando che x_o è stazionario si ha

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f''(x_o)}{2}(x - x_o)^2 + o(|x - x_o|^2).$$

Per definizione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\left|o(|h|^2)\right| < \varepsilon |h|^2$ per ogni $h \in B_\delta(0)$ per cui

$$f(x) - f(x_o) \geqslant \left(\frac{f''(x_o)}{2} - \varepsilon\right)|x - x_o|^2.$$

Poiché ε è arbitrario, scegliendo $\varepsilon < f''(x_o)/2$ si conclude.
Punto i) - Supponendo di aver già mostrato il punto iv) se la tesi non fosse vera, cioè se $f''(x_o) < 0$, si avrebbe che x_o è di massimo locale stretto e quindi non potrebbe essere di minimo locale. □

In sostanza, suppondendo di essere nelle condizioni dei punti ii) o iv), si ha che la parte principale (si veda l'Osservazione 2.1) di $f(x) - f(x_o)$ in un opportuno intorno di x_o è

$$a(x - x_o)^2$$

con $a \neq 0$. Se $a > 0$ localmente la funzione $x \mapsto a(x - x_o)^2$, e quindi anche f, ha un minimo stretto, se $a < 0$ localmente la funzione $x \mapsto a(x - x_o)^2$, e quindi anche f, ha un massimo stretto.

Esempi 4.2. - La funzione $f(x) = x^2$ ha derivata prima nulla in 0, $f''(0) > 0$, 2 è di minimo locale stretto (in questo caso è anche il minimo assoluto).
La funzione $g(x) = x^4$ ha derivata prima nulla in 0, 0 è di minimo locale e $f''(0) > 0$, mentre $g''(0) = 0$.
La funzione

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ 0 & x \in (0,1) \\ (x-1)^2 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

ha sia minimo che massimo (locali) in ogni punto compreso tra 0 e 1.
Si osservi che h non è derivabile due volte in 0 e in 1 (lo si verifichi!).

Osservazione 4.3. - Si supponga che lo sviluppo di Taylor del primo ordine di una funzione f di classe C^1 in un punto x_o sia

$$f(x) = 3 + 2(x - x_o) + o(x - x_o).$$

Si può concludere che f è localmente (intorno ad x_o) invertibile. Infatti la derivata prima è 2, in particolare è non nulla. Di conseguenza per il teorema della permanenza del segno f' è positiva in un intorno di x_o, e quindi f invertibile.
Si supponga che lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di una funzione f in un punto x_o sia

$$f(x) = 3 + 2(x - x_o)^2 + o(x - x_o)^2$$

Si può concludere, utilizzando il teorema precedente (si veda anche l'Osservazione 3.1) che in x_o f ha un punto di minimo locale stretto.

Approfondimento - Il risultato del Teorema 4.1 può essere generalizzato. Si supponga che una certa funzione f sia di classe C^{m-1} in un intervallo e derivabile m volte in un punto x_o e si supponga che

$$f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(m-1)}(x_o) = 0, \quad f^{(m)}(x_o) \neq 0. \tag{2}$$

In particolare x_o è un punto critico. Come capire la natura di quel punto visto che anche la derivata seconda è nulla?
Sviluppando all'm-esimo ordine f si avrà

$$f(x) - f(x_o) = \frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}(x - x_o)^m + o\big((x - x_o)^m\big) = (x - x_o)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + \frac{o\big((x - x_o)^m\big)}{(x - x_o)^m}\right].$$

Come nella dimostrazione del Teorema 4.1 è sufficiente scegliere ε sufficientemente piccolo in modo che in un opportuno intorno $B_\delta(x_o)$ la quantità $\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + \frac{o((x-x_o)^m)}{(x-x_o)^m}$ abbia lo stesso segno di $\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!}$.
Per cui si deduce che se m è dispari x_o è un punto di flesso a tangente orizzontale, se m è pari e $f^{(m)}(x_o) > 0$ il punto x_o è di minimo, se m è pari e $f^{(m)}(x_o) < 0$ il punto x_o è di massimo locale.

5. Appendice - non svolto a lezione

Vediamo in questo paragrafo come sia possibile scrivere lo sviluppo di Taylor di f^{-1}, pur senza conoscerla, conoscendo però f e il suo sviluppo arrestato ad un ordine m.
Prima di tutto si supponga che $f : I \to \mathbf{R}$ sia invertibile in un intorno di un punto $x_o \in I$ e che in tale punto il suo sviluppo sia

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \ldots + a_m(x - x_o)^m + (x - x_o)^m$$

con a_k noti. Gli a_k ovviamente saranno

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}.$$

Si osservi che f è localmente invertibile intorno ad x_o se e solo se la sua derivata prima, cioè la quantità a_1, è non nulla. Vedremo infatti che non si troverebbero gli α_k se a_1 fosse 0.
Supponendo esista f^{-1}, si supponga che tale funzione abbia un suo sviluppo intorno al punto $y_o = f(x_o)$ del tipo

$$f^{-1}(y) = \alpha_0 + \alpha_1(y - y_o) + \alpha_2(y - y_o)^2 + \ldots + \alpha_m(y - y_o)^m + (y - y_o)^m$$

dove questa volta α_k sono ignoti. Come trovarli? Prima di tutto si osservi che $f^{-1}(y_0) = \alpha_0$ da cui $\alpha_0 = x_o$. Osservando che

$$\frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o} = \alpha_1 + \alpha_2(y - y_o) + \ldots$$

per trovare α_1 sarà sufficiente calcolare

$$\alpha_1 = \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o}.$$

Per calcolare tale limite usiamo il fatto che conosciamo f e α_0:

$$\alpha_1 = \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0}{y - y_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \frac{1}{a_1}.$$

Una volta trovato α_1 procediamo con il trovare α_2:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0 - \alpha_1(y - y_o)}{(y - y_o)^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(f(x) - f(x_o))}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2)}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - (x - x_o) - \frac{a_2}{a_1}(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2)}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= -\frac{a_2}{a_1} \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^2))}{(f(x) - f(x_o))^2} = \\
&= -\frac{a_2}{a_1} \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^2)}{(x - x_o)^2} \frac{(x - x_o)^2}{(f(x) - f(x_o))^2} = -\frac{a_2}{a_1^3}.
\end{aligned}$$

Ora per trovare α_3 si calcola

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - \alpha_0 - \alpha_1(y - y_o) - \alpha_2(y - y_o)^2}{(y - y_o)^3} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(f(x) - f(x_o)) + \frac{a_2}{a_1^3}(f(x) - f(x_o))^2}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o - \frac{1}{a_1}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + o((x - x_o)^3) + \frac{a_2}{a_1^3}(a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + o((x - x_o)^2))^2}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \left[\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right] \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)^3}{(f(x) - f(x_o))^3} + \lim_{x \to x_o} \frac{o((x - x_o)^3))}{(f(x) - f(x_o))^3} = \\
&= \left[\frac{2a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}\right] \frac{1}{a_1^3} = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4}
\end{aligned}$$

Iterando il procedimento si possono trovare tutti i termini α_k. Alla fine si avrà lo sviluppo della funzione f^{-1} anche se non si riesce ad esprimere esplicitamente f^{-1}.

Gli esercizi 11.34 e 11.35 riguardano questo calcolo, ma in quegli esempi la funzione inversa è nota. Se si considera la funzione

$$g(x) = x + \log x$$

che è invertibile, ma di cui non riusciamo a scrivere esplicitamente l'inversa, la cosa è più interessante. Si provi a scrivere lo sviluppo all'ordine 2 o 3 di g nel punto 1.