12 - Integrale secondo Riemann

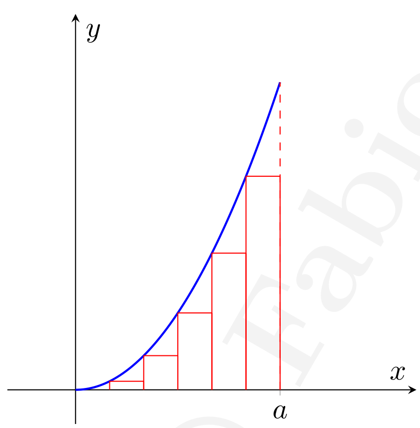
Ultimo aggiornamento: 1° dicembre 2024

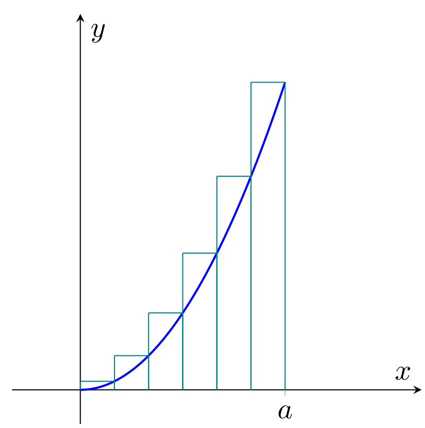
1. Introduzione

Si consideri la funzione $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2$, come illustrato nelle due figure seguenti. Si vuole calcolare l'area del sottografico. Per far ciò faremo due stime, una dal basso e una dall'alto.
Si divida l'intervallo $[0, a]$ in n parti uguali, ognuna di lunghezza a/n, in modo da ottenere n intervalli

$$\left[0, \frac{a}{n}\right], \left[\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}\right], \left[\frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}\right], \ldots \left[\frac{(n-1)a}{n}, a\right].$$

Si vuole calcolare la somma delle aree dei rettangoli rossi e quella delle aree dei rettangoli verde acqua.





Cominciamo dalla prima: il k-esimo intervallino è $\left[(k-1)\frac{a}{n}, k\frac{a}{n}\right]$ e la sua altezza è $(k-1)^2 \left(\frac{a}{n}\right)^2$, quindi la somma delle aree dei rettangoli rossi a sinistra, che denotiamo con A_i, è data da

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}(k-1)^2 \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 .$$

Per quanto riguarda la somma delle aree dei rettangoli a destra, che denoteremo con A_s, si ha che l'unica differenza è l'altezza del k-esimo intervallino che risulta essere $k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2$, per cui si ottiene

$$A_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} k^2 \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Di conseguenza, denotata con A l'area del sottografico della funzione f si ha che

$$A_i \leqslant A \leqslant A_s$$

qualunque sia il numero n di rettangolini che vengono considerati. Ricordiamo ora che (si rivedano i capitoli di teoria e di esercizi sull'induzione)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Di conseguenza

$$\left(\frac{a}{n}\right)^3 \left[\frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)\right] \leqslant A \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^3 \left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right].$$

Poiché queste stime sono indipendenti dal numero n di triangolini, passando al limite si ottiene

$$A = \frac{a^3}{3}.$$

Se si considerasse la funzione

$$f : [0, a] \to \mathbf{R}, \qquad \text{definita da } f(x) = x^3$$

e procedendo in maniera analoga si arriverebbe a dover calcolare la somma $\sum_{k=1}^{n} k^3$ che è (si vedano gli esercizi sull'induzione)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

Il calcolo della aree dei corrispondenti triangolini porterebbe a

$$\left(\frac{a}{n}\right)^4 \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

il cui limite, per $n \to +\infty$, è $a^4/4$. Poiché si ha (si veda il capitolo di esercizi sull'induzione)

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\, n^{m+1} + b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots b_1 n + b_0$$

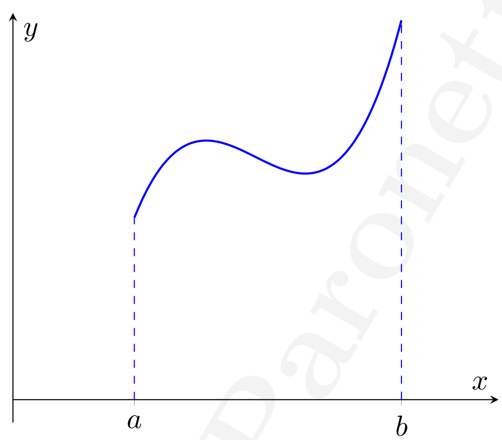
(non è importante conoscere i b_i ai fini di questo calcolo) si ricava che l'area del sottografico di $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^m$ è $a^{m+1}/(m+1)$.

2. Integrale secondo Riemann

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ il problema che ci poniamo è *misurare* l'area del sottografico di f, cioè misurare l'insieme

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant y \leqslant f(x) \right\}$$

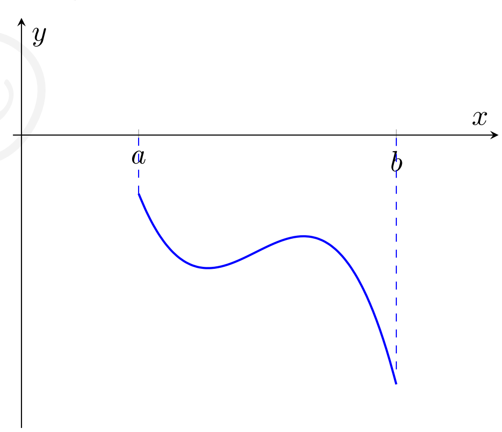
nel caso in cui $f \geqslant 0$, come nell'esempio illustrato nella figura che segue.



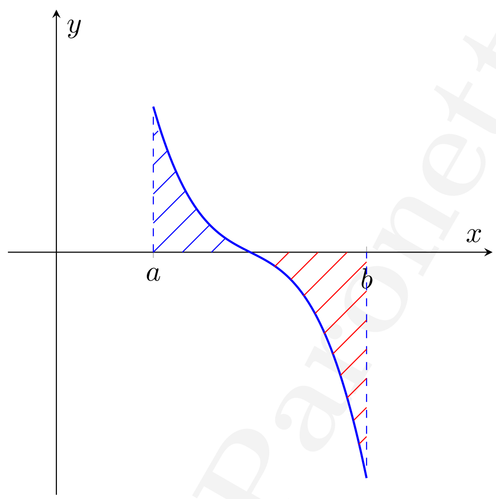
La misura che vogliamo introdurre avrà un segno nel senso seguente: se anziché positiva la funzione f fosse negativa o non positiva, cioè $f \leqslant 0$, come nella figura che segue, vogliamo assegnare all'area del sottografico un valore negativo che sarà la misura dell'area dell'insieme

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, f(x) \leqslant y \leqslant 0 \right\}$$

cambiata di segno.



In generale, se f non ha segno costante, vedremo come costruire questa misura che tenga conto di quanto appena detto. Ad esempio, data $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, nel caso rappresentato in figura



vorremmo che la misura che vogliamo definire, associata ad f e quindi dipendente anche dal dominio $[a, b]$, sia l'area della figura tratteggiata in azzurro meno l'area della figura tratteggiata in rosso.

Definizione 2.1 (Suddivisione)**.** *Dato un intervallo* $[a, b]$ *chiameremo* suddivisione *di* $[a, b]$ *un insieme di punti* $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *con la proprietà*

$$t_0 = a,\ t_N = b,\ t_i < t_{i+1} \quad \textit{per ogni } i \textit{ tra 0 ed } N$$

Definizione 2.2 (Somme inferiori e superiori)**.** *Dati* $m, M \in \mathbf{R}$*, una funzione* $f : [a, b] \to [m, M]$ *e una suddivisione* T *di* $[a, b]$ *chiameremo somma inferiore di* f *relativamente a* T *la quantità*

$$\mathcal{I}_-(f; T) := \sum_{i=1}^{N} \inf_{t \in (t_{i-1}, t_i)} f(t)\ \big(t_i - t_{i-1}\big),$$

chiameremo somma superiore di f *relativamente a* T *la quantità*

$$\mathcal{I}_+(f; T) := \sum_{i=1}^{N} \sup_{t \in (t_{i-1}, t_i)} f(t)\ \big(t_i - t_{i-1}\big)$$

Valgono i seguenti risultati, che non mostriamo.

Per ogni coppia di suddivisioni T, S di $[a,b]$ risulta

$$(1) \qquad \mathcal{I}_-(f;T) \leqslant \mathcal{I}_+(f;S).$$

Per ogni coppia di suddivisioni T, S di $[a,b]$ con $T \subset S$ si hanno

$$(2) \qquad \mathcal{I}_-(f;T) \leqslant \mathcal{I}_-(f;S), \qquad \mathcal{I}_+(f;S) \leqslant \mathcal{I}_+(f;T).$$

Definizione 2.3 (Integrali)**.** *Data una funzione $f : [a,b] \to [m,M]$ chiameremo* integrale inferiore *di f in $[a,b]$ la quantità*

$$\mathcal{I}_-(f) := \sup \big\{ \mathcal{I}_-(f;T) \,\big|\, T \text{ suddivisione di } [a,b] \big\},$$

e chiameremo integrale superiore *di f in $[a,b]$ la quantità*

$$\mathcal{I}_+(f) := \inf \big\{ \mathcal{I}_-(f;T) \,\big|\, T \text{ suddivisione di } [a,b] \big\}.$$

A questo punto diciamo che $f : [a,b] \to [m,M]$ è integrabile secondo Riemann, o Riemann-integrabile (*qualche volta per brevità R-integrabile*)*, se*

$$\mathcal{I}_-(f) = \mathcal{I}_+(f).$$

Chiamiamo <u>*integrale*</u> *di f in $[a,b]$ la quantità*

$$\mathcal{I}(f) := \mathcal{I}_-(f) = \mathcal{I}_+(f).$$

che denoteremo con uno dei seguenti simboli

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_{[a,b]} f, \quad \int_a^b f.$$

Osservazione 2.4. - La definizione di $\mathcal{I}_-(f)$ e $\mathcal{I}_+(f)$ sono motivate da (2). Si osservi come da (1) e dalla definizione di $\mathcal{I}_-(f)$ e $\mathcal{I}_+(f)$ si ha

$$\mathcal{I}_-(f) \leqslant \mathcal{I}_+(f).$$

Può accadere che la disuguaglianza sia stretta, cioè esistono funzioni funzioni non integrabili secondo Riemann. Vediamo un esempio.
Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = 1 \quad \text{se } x \in \mathbf{Q}, \qquad f(x) = 0 \quad \text{se } x \notin \mathbf{Q}.$$

Allora, dalla densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$, qualunque suddivisione $T = \{t_0, t_1, \dots t_N\}$ di $[0,1]$ si consideri si ha che

$$\inf_{t \in (t_{i-1}, t_i)} f(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{t \in (t_{i-1}, t_i)} f(t) = 1.$$

Per cui $\mathcal{I}_-(f;T) = 0$ e $\mathcal{I}_+(f;T) = 1$ per ogni suddivisione T di $[0,1]$ e quindi

$$\mathcal{I}_-(f) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{I}_+(f) = 1.$$

Di conseguenza f non è integrabile.

Osservazione 2.5. - Si osservi che se $f : [a,b] \to [m,M]$ è costante, ad esempio $f(x) = \alpha \in \mathbf{R}$ per ogni $x \in [a,b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a)\,.$$

Proprietà dell'integrale - Siano $f, g : [a,b] \to [m,M]$ due funzioni integrabili secondo Riemann, $\lambda, \mu \in R$. Valgono le seguenti proprietà:

$a\,)$ $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu\, g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$ (linearità)

$b\,)$ $\displaystyle f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (positività)

$c\,)$ $\displaystyle f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$ (isotonìa)

$d\,)$ Se anche $|f|$ è Riemann-integrabile allora $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx.$

Non le mostriamo, ma $a\,)$ e $b\,)$ si verificano facilmente.

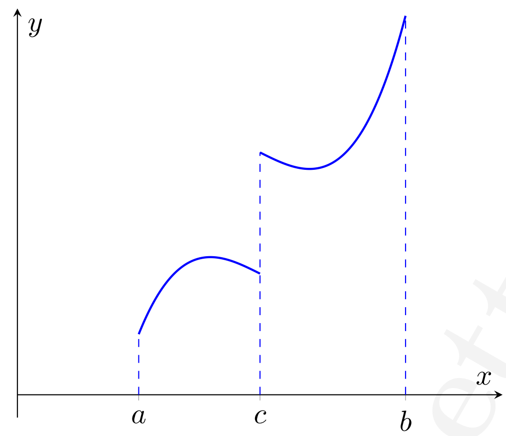
EX - Si osservi che per il punto $d\,)$ si è assunto che sia f che $|f|$ siano integrabili secondo Riemann.
Può capitare che $|f|$ sia integrabile secondo Riemann e f non lo sia?
(Suggerimento: si veda l'esempio nell'Osservazione 2.4. Se il suggerimento non basta si veda l'esempio a fine paragrafo.)

Teorema 2.6. *Se una funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è continua allora è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Osservazione 2.7. - Si osservi che la quantità $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ non dipende dal fatto che l'intervallo dove si va ad integrare sia chiuso. Se si integra la funzione f nell'intervallo $[a,b)$ o (a,b) il risultato è il medesimo vista la definizione di integrali superiore ed inferiore. L'importante è che f sia definita in un intervallo chiuso e limitato più grande, altrimenti potrebbe capitare che il sottografico che si vuole misurare sia una figura illimitata. Ad esempio, le funzioni $f : (0,1] \to \mathbf{R}$ e $g : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ definite da $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x$.

Si può dare un senso all'integrale di Riemann anche per funzioni discontinue, perlomeno se hanno discontinuità di prima specie (di tipo salto). Per esempio se $c \in (a,b)$ è un punto di discontinuità per f di tipo salto, come nella rappresentazione in figura, si definisce



$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Si osservi come questa somma è ben definita, vista l'Osservazione 2.7, e prescinde dal valore di f in c.
Quindi non solo le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato saranno integrabili, ma anche le funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato all'interno del quale abbiano un numero finito di discontinuità di tipo salto.

A questo punto si può dar senso all'espressione (3) anche per $c \notin [a, b]$. Il primo passo è considerare $a = b$ e, ad esempio, $c > a$. Poiché

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

se vogliamo che valga

$$\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx \qquad \text{per ogni } c > a$$

si deve avere necessariamente

$$\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx.$$

Con questa definizione l'espressione (3) ha senso anche per $c \notin [a, b]$. Infatti se $c > b$ si ha

$$\begin{aligned}
&\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \\
&\qquad = \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\right) + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

se invece $c < a$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$
$$\int_a^c f(x)\,dx + \left(\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Un esempio di una funzione non integrabile il cui valore assoluto è integrabile.
Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = 1 \quad \text{se } x \in \mathbf{Q}, \qquad f(x) = -1 \quad \text{se } x \notin \mathbf{Q}.$$

Come visto nell'Osservazione 2.4 f non è integrabile, ma $|f|$ è la costante 1 ed è chiaramente integrabile.

3. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a,b] \to [m,M]$ definiamo media (integrale) di f in $[a,b]$ la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lemma 3.1 (della media integrale)**.** *Data una funzione $f : [a,b] \to [m,M]$ si ha che*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,.$$

Inoltre, se f è continua, esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.$$

Dimostrazione - Data $f : [a,b] \to [m,M]$ si ha che $m \leqslant f(x) \leqslant M$ per ogni $x \in [a,b]$. Per cui, integrando in $[a,b]$ e dividendo per $b-a$ (si veda anche l'Osservazione 2.5),

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M$$

e in particolare la tesi.
Sia ora f continua in $[a,b]$. Per il teorema di Weierstrass l'immagine di f è un intervallo chiuso (e limitato). Supponiamo per semplicità che sia $[m,M]$ (altrimenti si avrà che l'imagine è $[\ell,L] \subset [m,M]$, ma a patto di modificare il codominio possiamo sempre supporre che il codominio sia l'immagine).
Per quanto appena visto, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è un valore nell'immagine e quindi per il teorema dei valori intermedi esiste $c \in [a,b]$ tale che

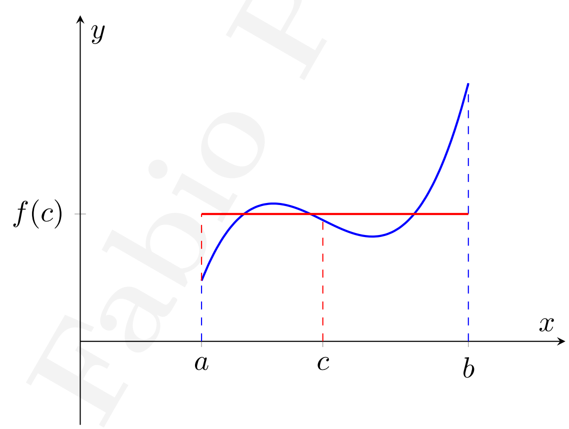
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,. \qquad \square$$

Osservazione 3.2. - Si osservi come la continuità è fondamentale per avere che la media coincide con il valore di f in qualche punto. Si consideri ad esempio la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = -1 \quad \text{se } x \leqslant 0, \qquad f(x) = 1 \quad \text{se } x \geqslant 0.$$

Chiaramente la media di f in $[-1, 1]$ è 0, ma non c'è alcun punto in cui f assume il valore 0.

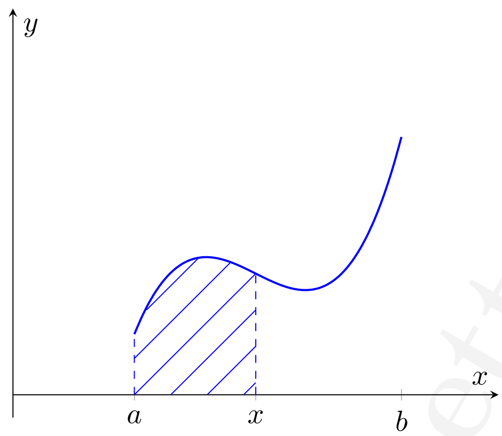
Possiamo leggere il lemma della media integrale, nel caso di funzioni continue, in due modi leggermente diversi. Da una parte ci dice che esiste (almeno) un punto all'interno di un intervallo $[a, b]$ nel quale f assume la sua media nell'intervallo $[a, b]$, dall'altra che esiste un rettangolo, di base $[a, b]$ e altezza il valore di f in un opportuno punto c, che ha la stessa area del sottografico di f.



Funzione integrale - Data una funzione $f : [a, b] \to [m, M]$ è possibile definire una funzione, detta funzione integrale di f, definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \tag{4}$$

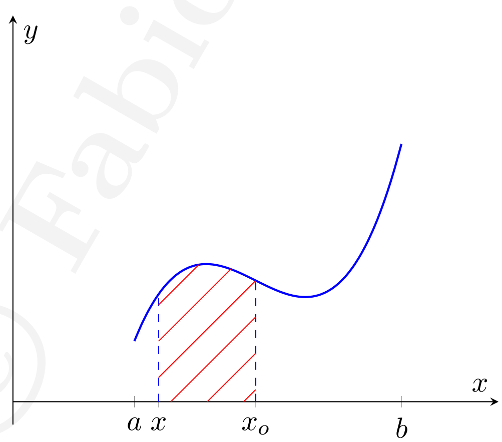
che rappresenta l'area (con segno) del sottografico di f nell'intervallo $[a, x]$. A tal proposito si veda la figura seguente.



È possibile definire una funzione integrale anche a "partire" da un generico $x_o \in [a, b]$, cioè

$$F_{x_o}(x) := \int_{x_o}^{x} f(t)\, dt. \tag{5}$$

In questo caso x potrà anche essere minore di x_o, con la solita convenzione sul segno. Ad esempio, nella figura che segue e con il valore di x indicato in figura, la quantità $\int_{x_o}^{x} f(t)\, dt$ risulterà negativa.



Teorema 3.3 (teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to$ **R** una funzione continua. Allora la sua funzione integrale* (4) *è derivabile e*

$$F'(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in [a, b].$$

Inoltre se $G : [a,b] \to \mathbf{R}$ è una funzione derivabile tale che $G' = f$ in $[a,b]$ allora

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Dimostrazione - Mostriamo che la derivata di F è f, da cui risulterà anche che F è derivabile.
Valutiamo il rapporto incrementale di F in $x_o \in [a,b]$. Dato h tale che $x_o + h \in [a,b]$ si ha

$$\frac{F(x_o+h) - F(x_o)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_o+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_o} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h} f(t)\,dt\,.$$

Per il lemma della media integrale esiste c_h compreso tra x_o e $x_o + h$ tale che

$$\frac{F(x_o+h) - F(x_o)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h} f(t)\,dt = f(c_h).$$

Passando al limite per $h \to 0$ e poiché f è continua

$$\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x_o).$$

Dalle due uguaglianze precedenti si deduce che esiste il limite del rapporto incrementale di F, e quindi F è derivabile, e inoltre

$$F'(x_o) = f(x_o).$$

Sia ora una funzione G tale che $G' = f$. Allora $F' = G'$, cioè $(F - G)' = 0$, di conseguenza $F(x) - G(x) = c$ per ogni $x \in [a,b]$, per una qualche costante $c \in \mathbf{R}$. Allora in particolare

$$F(a) - G(a) = c$$

ed essendo $F(a) = 0$ si ha che $c = -G(a)$, da cui la tesi. $\square$

Commenti

1. Il teorema precedente ci dice che la funzione integrale di una funzione continua non solo è derivabile, ma è di classe $C^1([a,b])$. Infatti la derivata prima di F è continua.

2. Si supponga di voler calcolare $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, dove f è una funzione continua in $[a,b]$. Il teorema precedente ci fornisce una maniera pratica per farlo: trovata una funzione G tale che $G' = f$ (una tale funzione è detta *primitiva* di f) si ha che

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) - G(a),$$

cioè per calcolare l'integrale di f tra a e b è sufficiente trovare una G, valutarla in b, in a e poi farne la differenza.

3. Si osservi che considerata una funzione come quella definita in (5) si ha che

$$F_{x_o}(x) = F(x) - \int_a^{x_o} f(t)\,dt$$

ha come derivata f, visto che la quantità $\int_a^{x_o} f(t)\,dt$ è costante (rispetto ad x). Per cui esistono infinite primitive di f, una per ogni possibile valore di x_o e per il teorema fondamentale del calcolo integrale ogni primitiva G di f è del tipo F_{x_o} per un qualche x_o.
La classe delle (infinite) primitive di una certa f si denota con

$$\int f(x)\,dx \qquad\qquad \text{(integrale indefinito).}$$

Esempio 3.4. - Si vuole calcolare $\displaystyle\int_0^a t^2\,dt$. Una primitiva di $f(x) = x^2$ è la funzione $x \mapsto x^3/3$. Valutandola in a e poi in 0 e sottraendo i due valori si ottiene il risultato già ottenuto ad inizio capitolo.
Se si vuole calcolare $\displaystyle\int_a^b t^2\,dt$ si ottiene $b^3/3 - a^3/3$. L'integrale indefinito di x^2, cioè l'insieme delle primitive, è

$$\frac{x^3}{3} + c, \qquad \text{al variare di } c \in \mathbf{R}.$$

4. Alcune primitive e alcune tecniche di integrazione

$$\begin{aligned}
&\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \text{se } \alpha \neq -1,\\
&\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c,\\
&\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x} + c \qquad \text{se } \alpha \neq 0,\\
&\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c,\\
&\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c,\\
&\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c \quad (= -\arccos x + c),
\end{aligned}$$

Le funzioni delle quali si riesce a scrivere una primitiva esplicita sono pochissime, per la maggior parte delle funzioni non esiste una primitiva esplicita. Un esempio è il seguente:

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

L'unico modo di scriverne una primitiva è
$$\int_a^x e^{-t^2}\,dt.$$
Nonostante questo ora vedremo una serie di tecniche che permettono in molti casi di scrivere esplicitamente una primitiva.

Integrazione per parti - Siano date due funzioni f, g di classe C^1 (omettiamo in questo caso di precisare il dominio) Si ha
$$(fg)' = f'g + fg'\,.$$
Consideriamo l'insieme delle primitive (l'integrale indefinito) di $(fg)'$:
$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx + c$$
al variare di $c \in \mathbf{R}$, cioè
$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$
Questa formula è utile se devo integrare una funzione h e mi accorgo che h è il prodotto di due funzioni, g_1 e g_2, una delle quali è a sua volta la derivata di un'altra funzione f.

Vediamo alcuni esempi nei quali è utile applicare la formula di integrazione per parti.

1. - Il primo è il caso in cui una delle due funzioni è un polinomio. In questo caso derivando il polinomio un numero di volte sufficiente (pari al grado del polinomio) si fa "sparire" il polinomio stesso. Si supponga di dover integrare
$$\int x\cos x\,dx.$$
Osservando che $\cos x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$, chiamando $g(x) = x$ e $f'(x) = \cos x$ possiamo applicare la formula di integrazione per parti e si ottiene
$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c\,.$$
In questo caso la formula risulta utile in quanto la derivata di g è 1. Si osservi che possiamo anche reiterare l'applicazione della formula. Ad esempio
$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= x^2\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x\,dx = \\ &= x^2\operatorname{sen} x - 2\left[-x\cos x + \int \cos x\,dx\right] + c = \\ &= x^2\operatorname{sen} x + 2\,x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c\,.\end{aligned}$$
Si integri $\displaystyle\int x^k\cos x\,dx$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 3$.

2. - A volte si guarda una funzione f come il prodotto fg' dove $g(x) = x$. Ad esempio $f(x) = \log x$.

$$\int \log x \, dx = x \, \log x - \int \frac{1}{x} \, x \, dx + c = x \, \log x - x + c \, .$$

Altro esempio di applicazione di questa tecnica:

$$\begin{aligned} \int \text{arcsen} \; dx &= x \, \text{arcsen} \, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + c = \\ &= x \, \text{arcsen} \, x - \sqrt{1-x^2} + c \, . \end{aligned}$$

Se si vuole calcolare l'integrale definito che segue si avrà:

$$\int_0^1 \text{arcsen} \; dx = \Big(x \, \text{arcsen} \, x - \sqrt{1-x^2} \Big) \Big|_0^1 = 1 \text{arcsen} \, 1 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

3. - A volte integrando per parti si può ottenere lo stesso termine, cambiato di segno, a destra e a sinistra. Questo permette di trovare le primitive senza di fatto integrare.
Ad esempio, considerando $f(x) = \text{sen} \, x$ e $g'(x) = e^x$,

$$\begin{aligned} \int e^x \, \text{sen} \, x \, dx &= e^x \, \text{sen} \, x - \int e^x \cos x \, dx + c = \\ &= e^x \, \text{sen} \, x - \left[e^x \cos x + \int e^x \, \text{sen} \, x \, dx \right] + c \end{aligned}$$

da cui

$$2 \int e^x \, \text{sen} \, x \, dx = e^x \, \text{sen} \, x - e^x \cos x + c \, .$$

Altro esempio: siano $g(x) = x$ e $f'(x) = \log x$. Dal primo esempio di **2.** si ha che, a meno di una costante, $f(x) = x \log x - x$. Integrando

$$\begin{aligned} \int x \log x \, dx &= x \big(x \log x - x \big) - \int \big(x \log x - x \big) \, dx + c = \\ &= x^2 \log x - x^2 - \int x \log x \, dx + \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

da cui

$$\int x \log x \, dx = \frac{1}{2} \, x^2 \log x - \frac{x^2}{4} + c \, .$$

Si osservi che in questo caso si poteva integrare anche scambiando i ruoli di f e g, cioè pensando $f(x) = \log x$ e $g'(x) = x$. Si avrebbe

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx + c = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c.$$

4. - $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, $n \in \mathbf{N}$. Per $n = 1$ è immediato. Vediamo il caso $n = 2$. Si osservi che

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

per cui

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \cos 2x\right)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int 2\, \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$$

Per $n \geqslant 3$ si ha

$$\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\, \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, \cos^2 x\, dx = \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\, \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = \\ &= -\operatorname{sen}^{n-1} x\, \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - \int \operatorname{sen}^n x\, dx\end{aligned}$$

da cui

$$n\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\, \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

Analogamente si risolve $\displaystyle\int \cos^n x\, dx$ che per $n = 2$ è

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(1 + \cos 2x\right) dx.$$

5. - $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \cos x^k\, dx$, $n, k \in \mathbf{N}$. Se $k = 1$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx = \frac{1}{n+1}\operatorname{sen}^{n+1} x + c \qquad \text{al variare di } c \in \mathbf{R}.$$

Se $k = 2$:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^2 x\, dx = \int \operatorname{sen}^n x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = \int \operatorname{sen}^n x\, dx - \int \operatorname{sen}^{n+2} x\, dx.$$

Ora se $k = 2h$ si scrive $\cos^{2h} x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^h$, se $k = 2h + 1$ si scrive $\cos^{2h+1} x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^h \cos x$.

6. - $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$. Cominciamo da $n = 2$. Scrivendo

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Allora

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \operatorname{arctg} x - \left[-\frac{x}{2}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right] = \\
&= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c
\end{aligned}
$$

Lo stesso procedimento si applica a $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ scrivendo

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^n}.$$

Il secondo addendo del termine di destra si integra per parti

$$\int \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{x}{2}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx$$

e sommando al primo addendo si ottiene

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{n-1}\,\frac{x}{2}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx.$$

A questo punto si itera.

Integrazione per sostituzione - Siano date due funzioni $f : I \to \mathbf{R}$ e $\varphi : J \to I$, f di classe $C^0(I)$ e φ di classe $C^1(J)$, I, J intervalli. Allora

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{6}$$

Premesso che $\int g(x)\,dx$ denota un insieme di (infinite) funzioni, le primitive di g, l'uguaglianza precedente va intesa nel modo seguente: l'insieme delle primitive di $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ è dato dall'insieme delle primitive di f composte poi con φ.

La dimostrazione è presto fatta. Se F è una primitiva di f, cioè $F' = f$, un elemento dell'insieme definito dall'elemento a sinistra nell'uguaglianza è $F \circ \varphi$. Derivandolo si ottiene

$$F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

La stessa cosa si ottiene evidentemente derivando il termine di sinistra.

Se $\varphi : J \to I$ è <u>invertibile</u> allora possiamo anche scrivere

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right) \circ \varphi^{-1}(x). \tag{7}$$

Nel caso di un integrale definito, ponendo $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$, poiché

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

(6) e (7) diventano

$$(8) \qquad \begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \\ \int_{a}^{b} f(x)\,dx &= \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \end{aligned}$$

che in questo caso sono uguaglianze vere e proprie.

Esempio 4.1. - 1 - Si calcoli

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}\,dt.$$

In questo caso è evidente che la funzione integranda è del tipo $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ con $f(x) = e^x$ e $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$. Allora possiamo integrare semplicemente f e poi comporla con φ, cioè l'insieme delle primitive è

$$f \circ \varphi(t) + c = e^{\operatorname{arctg} t} + c\,.$$

In questo caso abbiamo riconosciuto un termine del tipo di quello che c'è a destra nell'uguaglianza (6).

2 - Spesso la cosa non è così evidente e si ha a che fare con un termine tipo quello di sinistra nell'uguaglianza (6). In questi casi dobbiamo cercare (per tentativi) una funzione φ che faccia al caso nostro, utilizzando la formula (7). Si calcoli

$$\int \operatorname{sen} \log x\,dx.$$

In questo caso poniamo

$$x = \varphi(t) = e^t,$$

e sostituiamo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sen} t & \text{al posto di} & \operatorname{sen} \log x \\ e^t\,dt & \text{al posto di} & dx \end{array}$$

ottenendo

$$\int e^t \operatorname{sen} t\,dt$$

che può essere integrato per parti.

Si osservi che qualche volta la cosa è equivalente ad imporre una nuova variabile t, nel nostro caso $\log x = t$. La differenza è che, come prima, sostituiremo

$$\operatorname{sen} t \qquad \text{al posto di} \qquad \operatorname{sen} \log x,$$

ma per quanto riguarda dt si ha

$$dt = \frac{1}{x}\,dx.$$

Questo approccio equivale a imporre $t = \varphi^{-1}(x)$ e se si è fortunati si può evitare di trovare φ, altrimenti la relazione $t = \varphi^{-1}(x)$ va in qualche modo invertita. Si veda a tal proposito il prossimo esempio.
Si osservi che dalla posiziona fatta, $x = e^t$, si ricava (derivando formalmente)

$$dx = \varphi'(t)\, dt = e^t\, dt.$$

A questo punto proseguendo l'integrazione

$$\int e^t \operatorname{sen} t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t\ \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \left[e^t\ \cos t - \int e^t\,(-\operatorname{sen} t)\, dt\right]$$

da cui

$$2 \int e^t \operatorname{sen} t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - e^t\ \cos t.$$

A questo punto si torna indietro per trovare le primitive richieste sostituendo $\log x$ a t:

$$\int \operatorname{sen}\, \log x\, dx = \frac{1}{2}\big[x \operatorname{sen}\, \log x - x\ \cos \log x\big] + c$$

Si osservi che

$$\operatorname{sen}\, \log x = x \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen}\, \log x \right)$$

per cui il termine $\varphi'(t)$ che appare in (6) è "nascosto", nel senso che uno può pensare che ci sia, ma moltiplicato per il suo reciproco. Se scriviamo l'integranda come sopra ci si rende conto che nell'integrale rispetto alla nuova variabile

il fattore $\quad \dfrac{1}{x} \operatorname{sen}\, \log x \quad$ è quello che contribuisce a far apparire $\quad \operatorname{sen} t$,

il fattore $\quad x \quad$ è quello che contribuisce a far apparire $\quad e^t$.

A tal proposito si veda anche il prossimo esempio.

3 - Si calcoli

$$\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}\, \log x\, dx.$$

In questo caso anziché porre $x = e^t$ imponiamo la nuova variabile $t = \log x$ e si ottiene che $dx/x = dt$ per cui integriamo

$$\int \operatorname{sen} t\, dt = -\cos t + c$$

per cui le primitive cercate sono $-\cos \log x + c$.

4 - Se l'integrale fosse definito, ad esempio

$$\int_1^2 \operatorname{sen}\, \log x\, dx$$

si ha

$$\int_1^2 \operatorname{sen}\, \log x\, dx = \int_0^{\log 2} e^t \operatorname{sen} t\, dt.$$

Si osservi che, detta φ la funzione $\varphi(t) = e^t$, quindi $\varphi^{-1}(s) = \log s$, l'uguaglianza appena scritta è una delle due (si vedano (8))

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\log 2)} \operatorname{sen} \log x \, dx = \int_0^{\log 2} e^t \operatorname{sen} t \, dt,$$

$$\int_1^2 \operatorname{sen} \log x \, dx = \int_{\varphi^{-1}(1)}^{\varphi^{-1}(2)} e^t \operatorname{sen} t \, dt.$$

Quindi si integra

$$\int_0^{\log 2} e^t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{2}\big[e^t \operatorname{sen} t - e^t \cos t\big]\Big|_0^{\log 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big[2 \operatorname{sen} \log 2 - 2 \cos \log 2 + 1\big].$$

5. Integrali razionali

Si supponga di dover trovare le primitive di $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q sono polinomi, cioè di dover calcolare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \qquad \deg P < \deg Q.$$

Supponiamo il grado di P minore del grado di Q perché diversamente (se il grado di P fosse maggiore o uguale aal grado di Q) si può dividere P per Q e ci si riduce al caso $\deg P < \deg Q$.

Esempio 5.1. -

1. - Per calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 1} \, dx$ e dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene

$$x^3 - 2x^2 - x - 3 = (x^2 + 3x - 1)(x - 5) + 15x - 8.$$

Di conseguenza

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 1} \, dx = \int (x - 5) \, dx + \int \frac{15x - 8}{x^2 + 3x - 1} \, dx.$$

2. - Si divida $x^2 + 5x - 2$ per $2x^2 - 3x + 8$. Quando i polinomi hanno lo stesso grado si può evitare di eseguire la divisione perché il risultato è una costante che si trova facilmente. Infatti scrivendo x^2 come $2^{-1}2x^2$, e quindi moltiplicando per $1/2$ il divisore, si ottiene

$$x^2 + 5x - 2 = \frac{1}{2}\big(2x^2 - 3x + 8\big) + \frac{13}{2}x - 6.$$

Vediamo ora i diversi casi possibili.

$\boxed{\deg P = 0, \deg Q = 1}$ È il caso più semplice:
$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + k, \qquad k \in \mathbf{R}.$$
Più in generale
$$\int \frac{a}{bx-c}\,dx = \frac{a}{b}\int \frac{1}{x-\frac{c}{b}}\,dx = \frac{a}{b}\,\log\left|x-\frac{c}{b}\right| + k, \qquad k \in \mathbf{R}.$$

$\boxed{\deg P = 0, \deg Q = n\ (n \geqslant 2)}$
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + k = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + k, \qquad k \in \mathbf{R}.$$

$\boxed{\deg P \leqslant 1, \deg Q = 2}$ Si ha che $P(x) = \alpha x + \beta$, $Q(x) = x^2 + px + q$.
Qui distinguiamo tre sottocasi.

i) Q ha due radici reali distinte, $Q(x) = (x-a)(x-b)$, $a \neq b$. Si osservi che, dati $A, B \in \mathbf{R}$ si ha
$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{Ax - Ab + Bx - aB}{(x-a)(x-b)}.$$
Ora si osservi che
$$(A+B)x - Ab - aB = \alpha x + \beta$$
è equivalente a
$$\begin{cases} A + B = \alpha \\ -Ab - aB = \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
Poiché $a \neq b$ questo sistema ha sempre soluzione unica (il determinante della matrice 2×2 è diverso da 0). Quindi esistono A, B tali che
$$\frac{\alpha x + \beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$
Una volta trovati A e B si integra
$$\int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx.$$

ii) Q ha due radici reali coincidenti, cioè $Q(x) = (x-a)^2$. Allora possiamo scrivere
$$\frac{\alpha x + \beta}{(x-a)^2} = \frac{\alpha(x-a) + \alpha a + \beta}{(x-a)^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\alpha a + \beta}{(x-a)^2}$$

per cui

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x-a)^2}\,dx = \alpha \log|x-a| - \frac{\alpha a+\beta}{x-a} + k$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

iii) Q non ha radici reali. Allora

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= \Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \\ &= \Big(q-\frac{p^2}{4}\Big)\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

dove ovviamente $q - p^2/4 > 0$. Allora

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{q-\frac{p^2}{4}} \int \frac{\alpha x+\beta}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}\,dx\,.$$

Ponendo

$$y = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$$

ci si riduce ad integrare un termine del tipo

$$\int \frac{Ay+B}{1+y^2}\,dy = \frac{A}{2}\log(1+y^2) + B\,\mathrm{arctg}\,y + k\,.$$

Esempio 5.2. - Si trovino le primitive di $\dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$. Il polinomio x^2+2x+3 non ha radici reali. La cosa più conveniente è calcolare la derivata del denominatore, cioè

$$\frac{d}{dx}\big(x^2+2x+3\big) = 2x+2$$

dopodiché cercare di ottenere tale derivata a numeratore:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2+2x+3} &= \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\frac{2x+2-4}{x^2+2x+3} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{2}\frac{4}{x^2+2x+3} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx. \end{aligned}$$

Ora valutiamo il secondo integrale:

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$$

quindi

$$\int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx = 2\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

che ha come primitiva $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. In conclusione

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c\,.$$

Teorema 5.3 (Versione "reale" del teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Un polinomio P di grado n a coefficienti reali può essere fattorizzato* (*in* **R**) *in maniera unica nel modo seguente:*

$$P(x) = \big(x-a_1\big)^{h_1}\cdot\ldots\cdot\big(x-a_j\big)^{h_j}\big(x^2+p_1x-q_1\big)^{k_1}\cdot\ldots\cdot\big(x^2+p_mx-q_m\big)^{k_m},$$

dove i termini di grado 2 sono irriducibili, cioè non ulteriormente fattorizzabili come il prodotto di due termini di grado 1.
Ovviamente $\sum_{i=1}^{j} h_i + 2\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

La dimostrazione è presto fatta: una volta fattorizzato P in **C** avremo alcune radici reali (gli a_i) e alcune radici complesse con parte immaginaria non nulla. Poiché il polinomio P è a coefficienti reali se $\alpha+i\beta$ ($\beta\neq 0$) è uno zero di P anche $\alpha-i\beta$ lo sarà. A questo punto si osservi che

$$\big(x-(\alpha+i\beta)\big)\big(x-(\alpha-i\beta)\big) = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

che è un polinomio di grado 2 non fattorizzabile in **R** come prodotto di due termini di grado 1.

L'esempio più semplice (già visto nel paragrafo sull'integrazione per parti) è

$$I_n(x) := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

Questo si integra ottenendo (per $n\geqslant 2$)

$$I_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}(x) + \frac{1}{n-1}\,\frac{x}{2}\,\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + c\,.$$

Ora siamo pronti per affrontare il caso generale $\boxed{\deg P < \deg Q}$.
Fatto: esistono delle costanti

$$A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1h_1}, A_{21}, A_{22}, \ldots A_{2h_2}, \ldots A_{j1}, A_{j2}, \ldots A_{jh_j},$$

$$B_{11}, C_{11}, B_{12}, C_{12}\ldots B_{1k_1}, C_{1k_1}, \ldots B_{m1}, C_{m1}, B_{m2}, C_{m2}\ldots B_{mk_m}, C_{mk_m}$$

tali che

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1h_1}}{(x-a_1)^{h_1}} + \\
& + \ldots + \\
& + \frac{A_{j1}}{x-a_{h_1}} + \frac{A_{j2}}{(x-a_{h_1})^2} + \ldots + \frac{A_{jh_1}}{(x-a_{h_1})^{h_1}} + \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1k_1}x + C_{1k_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}} + \\
& + \ldots + \\
& + \frac{B_{m1}x + C_{m1}}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{B_{m2}x + C_{m2}}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \ldots + \frac{B_{mk_m}x + C_{mk_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Si osservi come in questa scomposizione se al denominatore c'è un polinomio che ha una radice reale anche se con molteplicità più grande di 1, quindi un polinomio di grado 1 elevato anche ad una potenza maggiore di 1, a numeratore c'è una costante, cioè un polinomio di grado 0.
Se invece a denominatore c'è un polinomio senza radice reali, cioè un polinomio di grado 2 irriducibile elevato ad una qualche potenza, a numeratore c'è un polinomio di grado 1.

Esempi.

1. Si integri $\int \frac{dx}{x^3(x+1)^2}$

È sufficiente scrivere

$$\frac{1}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

e trovare A, B, C, D, E. Per farlo si sommano i cinque termini a destra

$$
\begin{aligned}
& \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} = \\
& \qquad = \frac{Ax^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Dx^3(x+1) + Ex^3}{x^3(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

e si impone che

$$\frac{1}{x^3(x+1)^2} = \frac{Ax^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Dx^3(x+1) + Ex^3}{x^3(x+1)^2}$$

cioè che il numeratore sia 1. A numeratore a destra si ottiene un polinomio di quarto grado ed uguagliando i coefficienti dei vari termini

$$
\begin{cases}
A + D = 0 \\
2A + B + D + E = 0 \\
A + 2B + C = 0 \\
B + 2C = 0 \\
C = 1
\end{cases}
$$

si ottengono i valori delle costanti A, B, C, D, E. A questo punto si integra.

2. Si integri $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$

Si osservi che $x^2 - 2x + 5$ non ha radici reali. Si osservi come in questo caso l'integranda è già nella forma (9).
Si procede nel modo seguente: si osservi che

$$\frac{d}{dx}(x^2-2x+5) = 2x-2$$

quindi scriviamo

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x-2)+2.$$

A questo punto

$$\frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{2}{(x^2-2x+5)^2}$$

per cui

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx + \int \frac{2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx = \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-2x+5} + \int \frac{2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Rimane da integrare solo un termine, che porterà ad un'arcotangente.

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 = 4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right]$$

e con il cambio di variabile $y = (x-1)/2$ ci si riduce ad integrare

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{16(y^2+1)^2}\,2\,dy &= \frac{1}{4}\int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy + \frac{1}{4}\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy.\end{aligned}$$

Il primo si integra direttamente

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} y + c,$$

il secondo si integra per parti, come già visto nel punto 6. della sezione dedicata all'integrazione per parti.
In generale, avendo

$$\int \frac{x+1}{(x^2-2x+5)^n}\,dx\,, \qquad n \in \mathbf{N}^*,$$

che è già nella forma (9), si procede in modo da ottenere a numeratore la derivata del polinomio di secondo grado che c'è a denominatore, cioè

$$\frac{x+1}{(x^2-2x+5)^n} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^n} + \frac{2}{(x^2-2x+5)^n}.$$

Il primo termine ora si integra immediatamente:

$$\int \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx = -\frac{1}{2}\log(x^2-2x+5) \qquad \text{se } n=1,$$

$$\int \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^n}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^{n-1}} \qquad \text{se } n>1.$$

Per il secondo si procede come prima (quando n era 2) tenendo presente quanto visto nell'esempio **6.** della sezione **Integrazione per parti**.

Se invece si deve integrare $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$, cioè se a numeratore non c'è un polinomio di primo grado, si cercano delle costanti A, B, C, D tali che

$$\frac{3x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Sommando a destra si ha

$$\frac{Ax^3+(B-2A)x^2+(5A-2B+C)x+5B+D}{(x^2-2x+5)^2}$$

e imponendo l'uguaglianza

$$\begin{cases} A=0 \\ B-2A=3 \\ 5A-2B+C=1 \\ 5B+D=1 \end{cases}$$

da cui $A=0, B=3, C=7, D=-14$.

3. Si integri $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

Cerchiamo A, B, C tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2+1)},$$

cioè che soddisfano

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

Si ottiene

$$A=-B=C=\frac{1}{2},$$

per cui
$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx.$$
Poiché
$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x,$$
scrivendo
$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$
si ottiene
$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c\,.$$

4. Si integri $\displaystyle\int \frac{5x^4-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

Vanno trovate A, B, C, D, E, F tali che
$$\int \frac{5x^4-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$
Una volta trovate le costanti (EX) si ottiene
$$\begin{aligned}
&\int \frac{A}{x+1}\,dx = A\,\log|x+1| + c,\\
&\int \frac{B}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{B}{x+1} + c,\\
&\int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx = \frac{C}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{D}{x^2+1}\,dx =\\
&\qquad\qquad = \frac{C}{2}\log(x^2+1) + D\operatorname{arctg}(x^2+1) + c,\\
&\int \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{E}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{F}{(x^2+1)^2}\,dx =\\
&\qquad\qquad = -\frac{E}{2}\frac{1}{x^2+1} + F\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =\\
&\qquad\qquad = -\frac{E}{2}\frac{1}{x^2+1} + F\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + F\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx
\end{aligned}$$
dove l'ultimo termine si integra per parti.

5. Si integri $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

Il polinomio x^4+1 non ha radici reali, ma può essere fattorizzato come prodotto di termini di grado 2. Cerchiamo allora tali polinomi imponendo
$$x^4+1 = (ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f).$$

Si osservi che si hanno sei incognite per un polinomio di grado quattro, quindi una costante può essere scelta liberamente. Poiché il termine di grado massimo ha come coefficiente 1 possiamo scegliere $a = d = 1$ per semplicità (in ogni caso una volta scelto a, d sarà a^{-1}). In tal modo ci si può limitare a cercare b, c, e, f tali che

$$x^4 + 1 = (x^2 + bx + c)(x^2 + ex + f).$$

Si ottiene che

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Si osservi che un altro modo di fattorizzare $x^4 + 1$ è risolvere l'equazione $x^4 + 1 = 0$ in $\mathbf{C}$, cosa che fornisce le quattro radici

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

a due a due coniugate. Infatti

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Moltiplicando si riottengono i fattori ottenuti precedentemente

$$\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = x^2 - \sqrt{2}x + 1,$$

$$\left(x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$$

A questo punto si procede come al solito cercando A, B, C, D tali che

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

e poi integrando i due addendi separatamente.

6. Si integri $\displaystyle\int \frac{1}{x^6 + 1}\, dx$

6. Alcune sostituzioni standard

$\boxed{\displaystyle\int R\,(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx}$ $(a \neq 0)$

dove R è una funzione razionale del tipo $R(u, v) = \dfrac{P(u, v)}{Q(u, v)}$, P e Q polinomi.

Quando posso svolgere questo integrale? Quando $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ per qualche valore di x. I casi sono tre.

1) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
2) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
3) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

Il caso $a > 0$ e $b^2 - 4ac = 0$ è banale, in quanto $ax^2 + bx + c$ è un quadrato. I prototipi sono

1) $1 - x^2$
2) $x^2 - 1$
3) $x^2 + 1$

Vediamo di risolvere questi tre casi, i casi più generali si riconducono poi a questi casi modello.

1) $\displaystyle\int R\,(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$

In questo caso abbiamo due possibili cambi di variabile che possono essere usati indifferentemente:

$$x = \operatorname{sen} t \qquad \text{oppure} \qquad x = \cos t.$$

Esempio: si calcoli $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$. In questo caso effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \cos t$$

e si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t)\,dt = \int \frac{|\operatorname{sen} t|}{\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t)\,dt.$$

Si osservi che per avere $1 - x^2 \geqslant 0$ si ha che $x \in [-1, 1]$ per cui il cambio di variabile ha senso, per esempio, per $t \in [0, \pi]$, dove la funzione seno è non negativa, per cui si continua ottenenedo

$$-\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = -\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt + \int dt = -\operatorname{tg} t + t + c$$

da cui

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{tg}\,(\arccos x) + \arccos x + c, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

Esempio: si calcoli $\displaystyle\int \sqrt{8 - 4x^2 - 4x}\,dx$. Scrivendo

$$8 - 4x^2 - 4x = 9\left[1 - \frac{4}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

e ponendo $y = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ci si riduce a calcolare

$$\int 3\sqrt{1-y^2}\,\frac{3}{2}\,dy = \frac{9}{2}\int \sqrt{1-y^2}\,dy.$$

A questo punto si procede come sopra. Le primitive dovrebbero essere

$$\frac{9}{8}\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+\frac{9}{4}\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c\,.$$

2) - 3) $\displaystyle\int R\,(x,\sqrt{x^2-1})\,dx$ e $\displaystyle\int R\,(x,\sqrt{x^2+1})\,dx$

In questi casi usiamo il fatto

$$\cosh^2 t-\mathrm{senh}^2\, t=1$$

Nel caso 2) poniamo $x=\cosh t$ cosicché

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x^2-1} & \text{diventa} & \sqrt{\cosh^2 t-1}=\mathrm{senh}\ t, \\ x & \text{diventa} & \cosh t, \\ dx & \text{diventa} & \mathrm{senh}\, t\, dt. \end{array}$$

Nel caso 3) poniamo $x=\mathrm{senh}\, t$ cosicché

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x^2+1} & \text{diventa} & \sqrt{\mathrm{senh}^{\,2} t+1}=\cosh\ t, \\ x & \text{diventa} & \mathrm{senh}\, t, \\ dx & \text{diventa} & \cosh t\, dt. \end{array}$$

Esempi: si calcoli $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$. Scriviamo

$$x^2-9=9\left(\frac{x^2}{9}-1\right).$$

Con il cambio di variabile $y=x/3$ trasformiamo l'integrale dato nel nuovo

$$\int\frac{3\,dy}{3y\sqrt{9(y^2-1)}}\,dy=\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

A questo punto poniamo $y=\cosh t$. Con questo ulteriore cambio di variabile si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{senh}\, t\, dt}{\cosh t\,\mathrm{senh}\, t}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cosh t}=\frac{1}{3}\int\frac{2\,dt}{e^t+e^{-t}}&=\\ =\frac{1}{3}\int\frac{2\,e^t\,dt}{1+e^{2t}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\, e^t+c\,.&\end{aligned}$$

Ora dobbiamo invertire il coseno iperbolico per scrivere la primitiva ottenuta prima in dipendenza da y e infine da x. Usiamo l'identità

$$\cosh t+\mathrm{senh}\, t=e^t$$

che fornisce

$$e^t=\cosh t+\sqrt{\mathrm{senh}^2\, t}=\cosh t+\sqrt{\cosh^2 t-1}$$

da cui si ricava

$$y = \cosh t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

Andando a ritrovo esprimiamo prima la primitiva rispetto ad y,

$$\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) + c,$$

e infine rispetto ad x

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9}-1}\right) + c\,.$$

Si calcoli $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+\sqrt{4x^2+8}}$. Scriviamo

$$4x^2+8 = 8\left(\frac{x^2}{2}+1\right).$$

Come al solito poniamo $y = x/\sqrt{2}$ e integriamo

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dy}{y+\sqrt{y^2+1}}.$$

In questo caso poniamo $y = \operatorname{senh} t$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\cosh t\,dt}{\operatorname{senh} t + \sqrt{\cosh^2 t}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\cosh t\,dt}{\operatorname{senh} t + \cosh t} = \frac{1}{2}\int \frac{e^t+e^{-t}}{2\,e^t}\,dt = \\ &= \frac{1}{4}\int (1+e^{-2t})\,dt = \frac{t}{4} - \frac{e^{-2t}}{8} + c.\end{aligned}$$

In maniera simile a prima si ricava

$$y = \operatorname{senh} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

per cui la primitiva espressa rispetto ad y è

$$\frac{1}{4}\,\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{(y+\sqrt{y^2+1})^2} + c$$

e infine rispetto ad x

$$\frac{1}{4}\,\log\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right)^2} + c\,.$$

$$\boxed{\int R\,(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx}$$

In questo caso si pone

$$x = 2\operatorname{arctg} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1\right)} = \frac{2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1\right)}$$

quindi

$$\operatorname{sen} x \qquad \text{in termini di } t \text{ è} \qquad \frac{2\,t}{1+t^2}.$$

Analogamente

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

quindi

$$\cos x \qquad \text{in termini di } t \text{ è} \qquad \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Infine

$$dx = \frac{d}{dt}\left(2\operatorname{arctg} t\right)\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

per cui

$$\int R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right) dx \qquad \text{diventa} \qquad \int R\left(\frac{2\,t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\,\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Esempio: si integri $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Con il cambio di variabile appena visto l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{\frac{2\,t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt.$$

Poiché il polinomio a denominatore ha due radici reali, $1+\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$, possiamo scrivere

$$\frac{2}{2t+1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{t-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}$$

la cui primitiva è

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\log\left(t-1-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\log\left(t-1+\sqrt{2}\right) + c$$

da cui

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\log\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right) + c\,.$$

Esercizio - Trova l'errore

1. Usiamo l'integrazione per parti per calcolare

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \operatorname{sen} x\,\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \int \operatorname{sen} x\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Eliminando il termine uguale a destra e sinistra si ottiene

$$0 = 1.$$

2. L'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\cos t)\,dt$$

è evidentemente positivo, in quanto la funzione integranda è sempre positiva nell'intervallo di integrazione. Sostituendo la quantità $\cos t$ con x l'integrale diventa

$$-\int_0^0 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

che è evidentemente nullo. Dove sta l'errore?

3. Sia data una funzione f positiva e vi vuole calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{f'(x)}{4\,f(x)}\,dx.$$

Procediamo in due modi. Il primo consiste nel raccogliere il 4 a denominatore:

$$\int \frac{f'(x)}{4\,f(x)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{4}\,\log\big(f(x)\big) + c.$$

Nel secondo caso moltiplichiamo e dividiamo per 4:

$$\int \frac{f'(x)}{4\,f(x)}\,dx = \frac{4}{4}\int \frac{f'(x)}{4\,f(x)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4\,f'(x)}{4\,f(x)}\,dx = \frac{1}{4}\,\log\big(4\,f(x)\big) + c.$$

Come mai abbiamo trovato due espressioni diverse?