13 - Integrali generalizzati o impropri

Ultimo aggiornamento: 17 dicembre 2023

Nel seguito considereremo funzioni integrabili secondo Riemann e per brevità scriveremo R-integrabile (se non lo scriveremo è solo per dimenticanza).

1. Integrali generalizzati

Parleremo di integrali generalizzati o impropri di una funzione f quando il sottografico di f del quale si intende calcolare l'area risulta essere una figura illimitata. Ricordiamo che con il simbolo $\overline{\mathbf{R}}$ si intende $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Definizione 1.1. *Data una funzione*

$$f : [a, b) \to \mathbf{R}, \qquad b \in \overline{\mathbf{R}}, \qquad f \text{ } R\text{-integrabile in } [a, c] \text{ per ogni } c < b,$$

si dice che f è integrabile in senso improprio (o generalizzato) *se esiste ed è finito il limite*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \tag{1}$$

e tale limite è detto integrale improprio (o generalizzato) *di f in $[a, b)$. In tal caso l'integrale improprio si denota semplicemente con*

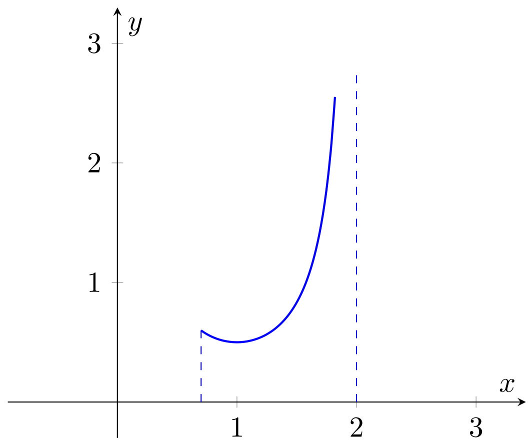
$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

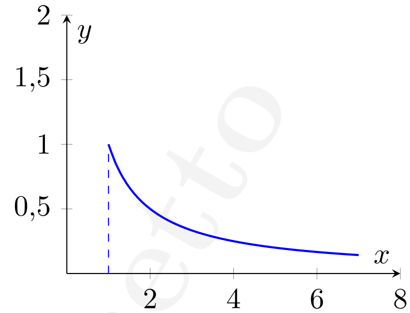
Spesso si usa la stessa terminologia delle serie, per cui se il limite (1) esiste finito di dice che

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad\qquad \text{converge.}$$

Allo stesso modo si parla di carattere per il limite (1), convergente, divergente o indeterminato a seconda che il limite esista finito, infinito o non esista.

I due casi interessanti che si possono presentare sono i seguenti: nel primo $b \in \mathbf{R}$ (in figura $b = 2$) e il sottografico è illimitato perché la funzione ha un asintoto verticale, nel secondo $b = +\infty$.





In maniera analoga si può estendere l'integrale di f in $[c, b]$ all'intervallo $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Noi enunceremo i risultati per funzioni definite in $[a, b)$ con $b \in \mathbf{R}$ o $b = +\infty$, ma tutti gli analoghi risultati potranno essere enunciati per funzioni definite in $(a, b]$ con $a \in \mathbf{R}$ o $a = -\infty$.

Esempio 1.2. - La funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, è integrabile in senso generalizzato. Infatti

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^c \right) = \lim_{c \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{c} \right) = 1\,.$$

D'altra parte, invece, la funzione $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, non è integrabile in senso generalizzato. Infatti

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\Big|_c^1 \right) = \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = +\infty\,.$$

Consideriamo la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Si ha

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \log x \Big|_1^c = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty\,.$$

In generale (lo si mostri per esercizio) valgono

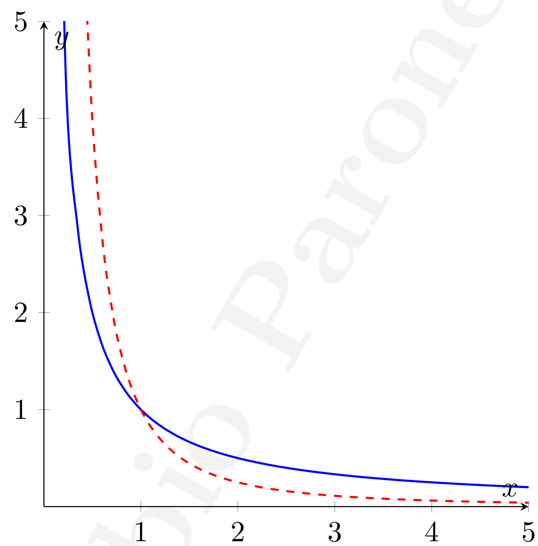
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \text{per } \alpha > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty \qquad \text{per } 0 < \alpha \leqslant 1,$$

mentre

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \text{per } 0<\alpha<1,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty \qquad \text{per } \alpha \geqslant 1\,.$$

Nella figura che segue sono mostrati due grafici di funzioni tipo quelle appena viste, $x^{-\alpha}$ in blu, $x^{-\beta}$ tratteggiata in rosso, con $0<\alpha<\beta$.



Osservazione 1.3. - Data una funzione $f:(a,b]\to \mathbf{R}$ che sia Riemann integrabile in $[c,b]$ per ogni $c\in(a,b)$ si può passare dallo studio dell'integrale improprio sull'intervallo limitato $(a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

allo studio di un integrale improprio su una semiretta. Ad esempio effettuando i due cambi di variabile

$$s=\frac{x-a}{b-a} \qquad t=\frac{1}{s}$$

si passa dall'intervallo $(a,b]$ all'intervallo $(0,1]$ e da questo a $[1,+\infty)$.

EX - Dato $\alpha>0$, si effettui il cambio di variabile $y=x^{-\alpha}$ per trasformare il problema di studiare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ in un integrale improprio su $[1,+\infty)$. Cosa si deduce?

Definizione 1.4. *Una funzione* $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $a,b\in\overline{\mathbf{R}}$ *è integrabile in senso generalizzato in* (a,b) *se*

$$f \text{ R-integrabile in } [c_1,c_2] \text{ per ogni } c_1,c_2 \text{ con } a<c_1<c_2<b$$

e inoltre, preso $\xi\in(a,b)$, *si ha che*

$$f \text{ è integrabile in senso generalizzato in } (a,\xi] \text{ e in } [\xi,b)$$

ed in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Osservazione 1.5. - Si osservi che la definizione appena data è ben posta, nel senso che non dipende dalla scelta di ξ.

Osservazione 1.6. - Si osservi che entrambi gli integrali a destra di (2) sono integrali impropri, cioè vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1\to a^+}\int_{c_1}^\xi f(x)\,dx + \lim_{c_2\to b^-}\int_\xi^b f(x)\,dx$$

cioè per definire il termine a sinistra in (2) i due limiti a destra devono esistere separatamente ed essere entrambi finiti! Vediamo un esempio per capire cosa si intende: si consideri la funzione

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad f(x)=\frac{x}{1+x^2}\,. \tag{3}$$

Si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\log(1+c^2) = +\infty\,.$$

Analogamente

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = -\infty\,.$$

In realtà si ha che per ogni $\xi\in\mathbf{R}$ valgono

$$\int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^\xi f(x)\,dx = -\infty\,.$$

Allora la funzione f non è integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}$.

EX - Si osservi come, presa f definita in (3),

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^c f(x)\,dx = 0 \qquad (\text{poiché } f \text{ è dispari})$$

e

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c^2} f(x)\,dx = +\infty.$$

Domanda: dato $a \in \mathbf{R}$, è possibile trovare una funzione $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{g(c)} f(x)\, dx = a?$$

Si faccia attenzione al seguente fatto: si supponga di avere $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ Riemann integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, +\infty)$ e che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{sia convergente.}$$

Non è detto (non lo mostriamo) che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Ciò che invece è vero sono le due seguenti cose (che non mostriamo):

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{è convergente} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{esiste} \end{array} \right| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0;$$

se il limite esiste e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{non è convergente.}$$

2. Integrali generalizzati per funzioni non negative

Vediamo ora qualche criterio che ci aiuti a studiare la convergenza nel caso di funzioni non negative (analoghe conclusioni si potranno trarre per funzioni non positive).
Si osservi come, data una funzione $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ con $b \in \overline{\mathbf{R}}$ e definita la sua funzione integrale $F(c) := \displaystyle\int_a^c f(x)\, dx$, si abbia

$$f \geqslant 0 \ \text{ in } [a, b) \quad \Longrightarrow \quad F \ \text{ crescente in } [a, b) \quad \Longrightarrow \quad \text{esiste } \lim_{c \to b^-} F(c),$$

ma la stessa conclusione vale anche per funzioni non positive:

$$f \leqslant 0 \ \text{ in } [a, b) \quad \Longrightarrow \quad F \ \text{ decrescente in } [a, b) \quad \Longrightarrow \quad \text{esiste } \lim_{c \to b^-} F(c).$$

Teorema 2.1 (Criterio del confronto)**.** *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, localmente integrabili in I e supponiamo valga*

$$0 \leqslant f \leqslant g \qquad \text{in } I.$$

Se g è integrabile in senso generalizzato in I allora anche f lo è.
Se f non è integrabile in senso generalizzato in I allora neanche g lo è.

Dimostrazione - Supponiamo che $I = [a, b)$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$. Allora
$$0 \leqslant \int_a^c f(x)\,dx \leqslant \int_a^c g(x)\,dx\,.$$
I limiti, per $c \to b^-$, di queste due quantità esistono, come osservato precedentemente, e quindi passando al limite si conclude. □

I seguenti risultati sono un corollario del teorema appena visto e si dimostrano in maniera simile agli analoghi risultati per le serie. Lasciamo quindi le verifiche per esercizio (**EX**). Di seguito useremo la stessa nomenclatura usata per le serie.

Criterio del confronto asintotico - Siano $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $f, g \geqslant 0$, f, g localmente R-integrabili in $[a, b)$, cioè integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$. Allora

- se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty) \quad \Longrightarrow$
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{hanno lo stesso carattere;}$$
- se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx < +\infty$.

Idea della dimostrazione: sia $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, +\infty]$. Se

$\ell \in (0, +\infty)$ si ottengono le stime $\dfrac{\ell}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3\ell}{2}\, g(x) \quad x \in I_1$,

$\ell = 0$ si ottiene la stima $f(x) \leqslant g(x) \quad x \in I_2$,

$\ell = +\infty$ si ottiene la stima $g(x) \leqslant f(x) \quad x \in I_3$,

dove I_1, I_2, I_3 sono opportuni intorni sinistri di b.

Analoghi risultati si possono enunciare se $f, g : (a, b] \to \mathbf{R}$ con $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Osservazione 2.2. - I criteri asintotici appena visti valgono anche se $f : [a_1, b) \to \mathbf{R}$ e $g : [a_2, b) \to \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, con $a_1 \neq a_2$. Infatti, si supponga $a_1 < a_2$, si ha che
$$\int_{a_1}^c f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^c f(x)\,dx$$

e a questo punto, considerando il limite per $c \to b^-$, si confrontano $\int_{a_2}^b f(x)\,dx$ e $\int_{a_2}^b g(x)\,dx$, mentre la quantità $\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$ è sicuramente finita.

Esempio 2.3. - Si dica se il seguente integrale è finito o meno:

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{dove } f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 7}.$$

Sappiamo che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$, si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

per cui $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

Parallelismo con le serie - Si consideri una serie $\sum a_n$ a termini positivi. Questa può essere vista come un integrale nel modo seguente. Definiamo una funzione $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (costante a tratti)

$$f(x) = a_i \qquad \text{per } x \in [i, i+1).$$

Poiché la quantità

$$F(c) = \int_0^c f(x)\,dx \qquad \text{è crescente}$$

la somma della serie è il limite $\lim_{c \to +\infty} F(c)$.
D'altra parte, data una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f \geqslant 0$, si ha che la quantità

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{è crescente}$$

per cui per ogni successione $x_n \to +\infty$ esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{x_n} f(x)\,dx \qquad \text{ed è uguale a } \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(x)\,dx$$

Per cui definendo

$$a_n := \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. Esempi

In questo paragrafo vediamo alcuni esempi.

1. Si consideri un polinomio di secondo grado $P(x) = x^2 + 2px + q$ e si studi l'integrabilità di

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\, dx\,.$$

i) Se P non ha radici reali ($q - p^2 > 0$) si può scrivere (in questo caso il grafico sarà tipo quello in Figura 1)

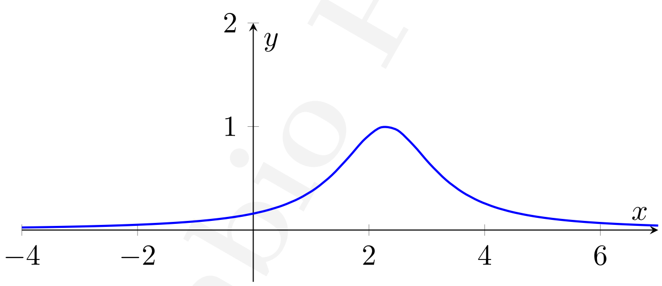
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\, dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\, dx + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\, dx$$

con α arbitrario e confrontare i due integrali rispettivamente con

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

(si veda l'Osservazione 2.2) per concludere che l'integrale dato è finito (o convergente).

Figura 1



In questo caso possiamo facilmente anche calcolarne il valore: scrivendo

$$P(x) = (x + p)^2 + q - p^2$$

e scegliendo $\alpha = -p$ e facendo i cambi di variabile $y = x + p$ e $z = y/\sqrt{q - p^2}$ si ha

$$\int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + q - p^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - p^2}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{z^2 + 1}\, dz = \frac{1}{\sqrt{q - p^2}}\, \frac{\pi}{2}\,.$$

Per simmetria il risultato è $\dfrac{\pi}{\sqrt{q - p^2}}$.

ii) Se P ha un solo zero (due radici coincidenti) si può scrivere

$$x^2 + 2px + q = (x + p)^2$$

per cui l'integrale diventa (si veda la Figura 2)

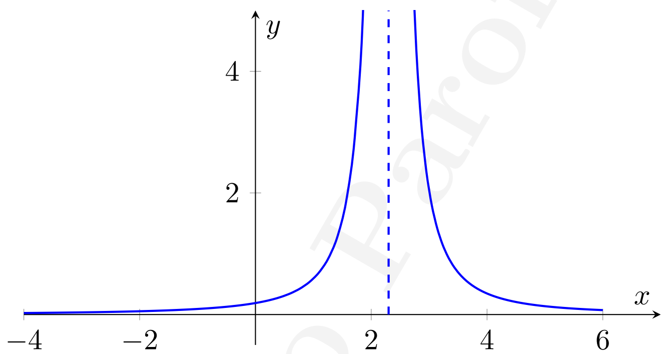
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2+2px+q}\,dx = \int_{-\infty}^{-p} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx + \int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx\,.$$

Ognuno dei due integrali è divergente: infatti scegliendo $\alpha \in (-p,+\infty)$ arbitrariamente

$$\int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx = \lim_{c_1\to -p^+} \int_{c_1}^{\alpha} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx + \lim_{c_2\to +\infty} \int_{\alpha}^{c_2} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx$$

si ha che il secondo limite è finito, ma il primo è $+\infty$. Analogamente diverge $\int_{-\infty}^{-p} \frac{1}{(x+p)^2}\,dx$.

Figura 2



iii) Nel caso in cui P avesse due radici (reali) distinte, α e β, e supponiamo $\alpha < \beta$, la funzione $\frac{1}{P}$, il cui possibile grafico è mostrato in Figura 3, non è integrabile in senso improprio, ma si noti che, dalla definizione che abbiamo dato, la questione non ha senso (si veda la Definizione 1.4).
In questo caso si ha che

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Può aver senso porsi la domanda se $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio separatamente nei tre intervalli

$$(-\infty,\alpha), \quad (\alpha,\beta), \quad (\beta,+\infty).$$

Ciò che si può dire è che in nessuno dei tre intervalli $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio e, nelle due semirette, l'integrale diverge positivamente, mentre nell'intervallo limitato diverge negativamente.
Ma si osservi la cosa seguente:

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = +\infty$$

per un motivo diverso dal caso *ii*). Infatti scrivendo (con $\xi < \alpha$ arbitrario)

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx + \int_{\xi}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx$$

si ha che il primo dei due integrali a destra converge poiché la funzione è limitata in $(-\infty, \xi]$ e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

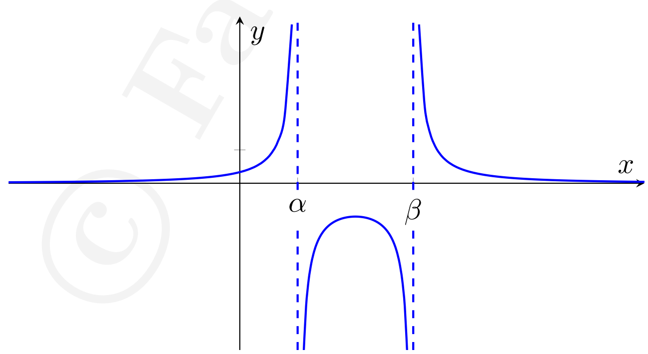
il secondo diverge per confronto con $-(x-\alpha)^{-1} > 0$. Infatti

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}}{-\frac{1}{x-\alpha}} = \frac{1}{\beta-\alpha},$$

quindi l'ordine di infinito è 1 e non 2 come nel caso *ii*). In conclusione

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = +\infty,\\
&\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = -\infty,\\
&\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = +\infty,\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx \qquad \text{è indeterminato.}
\end{aligned}$$

Figura 3



2. Se P è un polinomio ci si può chiedere se $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio in un intervallo del tipo (a, b) dove a e b sono due zeri di P, oppure $a = -\infty$ e b uno zero, oppure a è uno zero e $b = +\infty$, oppure infine in un intervallo che sia un sottointervallo di uno dei tre casi precedenti.

Fattorizzando P il problema si può quindi ridurre a studiare i casi (h e k

sono interi)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-x_o)^k}\,dx,$$
$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k(b-x)^h}\,dx\,.$$

Nel primo caso l'integrale esiste in senso improprio (converge) se e solo se $a > x_o$ (e quindi per $a = x_o$ è $+\infty$) e $k \geqslant 2$, nel secondo non esiste e l'integrale diverge a $+\infty$, perché h e k sono interi. Attenzione che se il secondo fosse

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k(x-b)^h}\,dx\,.$$

potrebbe divergere a $-\infty$ (a seconda che h sia pari o dispari).

In generale, dati $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, si che

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta}\,dx$$

converge (solo!) per $\alpha < 1$ e $\beta < 1$.

3. Gaussiana - Si studi

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,dx$$

dove la funzione integranda è nota con il nome di funzione di Gauss. Per vedere che l'integrale è finito è sufficiente osservare che la funzione è pari e studiarla solo per $x \geqslant 0$, dopodiché scrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,. \tag{4}$$

Si tratta di capire se il secondo integrale a destra è finito oppure no. Possiamo stimare in uno dei modi seguenti la funzione $g(x) = e^{-x^2}$ in $[1, +\infty)$:

i) usando il confronto asintotico si ha che per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to+\infty} x^n\,e^{-x^2} = 0$$

per cui, poiché per $n \geqslant 2$ l'integrale $\int_1^{+\infty} x^{-n}dx$ è finito, si conclude che è finito anche (4). In realtà si ha che $e^{-x^2} \leqslant x^{-n}$ per ogni x, ma non è immediato mostrarlo.

ii) e *iii*) Si usino, dopo averle dimostrate per esercizio, le seguenti stime

$$e^{-x^2} \leqslant e^{-x} \qquad \text{in } [1, +\infty),$$
$$e^{-x^2} \leqslant 2\,x\,e^{-x^2} \qquad \text{in } [1, +\infty) \text{ (anche in } [1/2, +\infty))$$

e integrando direttamente si ottiene, in entrambi i casi, che

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant 1\,.$$

Curiosità - Ricordiamo il valore dell'integrale della gaussiana:

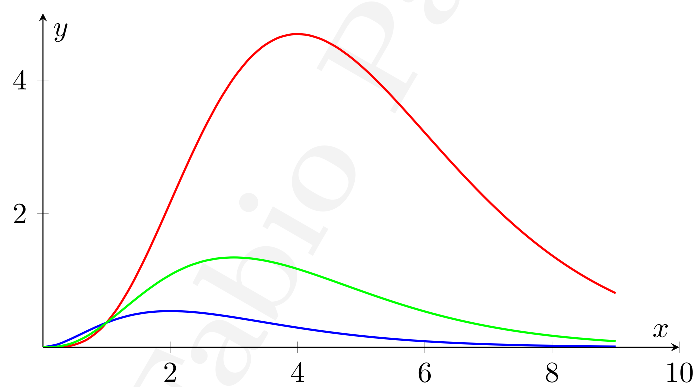
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \tag{5}$$

valore che può essere calcolato con diverse tecniche, utilizzando anche solo strumenti del primo corso di analisi, anche se in maniera alquanto laboriosa. A tal proposito, se interessati, si veda l'appendice a questo capitolo.
Un modo, sorprendente per la sua semplicità, passa dall'utilizzo degli integrali in più variabili.

4. La gamma di Eulero - Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx\,. \tag{6}$$

Il grafico della funzione integranda è mostrato in figura per tre valori positivi di t:



Si noti che $f_t(x) = x^t e^{-x}$ ha massimo in $x = t$ e il valore massimo è $\left(\frac{t}{e}\right)^t$.
Facendo il confronto all'infinito con $1/x^\alpha$, $\alpha > 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_t(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{t+\alpha}\,e^{-x} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0 \text{ (e per ogni } t \in \mathbf{R}).$$

Nell'origine se $t < 0$ la funzione non è definita in $x = 0$ e l'integrale (6) converge solo se $t > -1$.
Definiamo ora

$$F(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx \qquad \text{per } t \in (-1, +\infty)$$

ed effettuiamo ora il seguente calcolo (valido quindi solo per $t > -1$):

$$F(t+1) = \int_0^{+\infty} x^{t+1} e^{-x}\, dx = -x^{t+1} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (t+1)\, x^t (-e^{-x})\, dx =$$
$$= (t+1) \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx = (t+1) F(t)\,.$$

Ricorda qualcosa l'espressione

$$F(t+1) = (t+1)F(t)?$$

Valutiamo $F(0)$:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1\,.$$

Con quest'ulteriore informazione si deduce che

$$F(n) = n! \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

Curiosità - La funzione F è utile, facendo una sorta di sviluppo di Taylor all'infinito, per dare una buona approssimazione di $n!$, cosa molto utile quando non esistevano calcolatrici o calcolatori (e anche quelle o quelli all'inizio avrebbero avuto parecchia difficoltà). Tramite la funzione F si può ottenere la cosiddetta formula di Stirling, che in prima approssimazione può essere espressa come segue:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1))$$

dove con $o(1)$ si intende una successione che soddisfa $\lim_{n\to+\infty} o(1) = 0$. Equivalentemente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

La funzione F, traslata, è nota come gamma di Eulero, precisamente si ha

$$\Gamma(t) := F(t-1) \qquad t > 0\,.$$

Curiosità - Si possono calcolare valori di Γ, o di F, anche per t non intero. Ad esempio, si osservi come, ponendo $x^2 = t$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = F\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Da (5) si ricava

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Da questo e dal fatto che $\Gamma(t+1) = (t+1)\Gamma(t)$ si ricavano i valori di $\Gamma(n + 1/2)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Curiosità - La funzione Γ può essere definita anche per $t < 0$, ma t non intero, e anche essere estesa al piano complesso tranne che in 0 e nei punti interi negativi.

4. Convergenza assoluta

Consideriamo in questo paragrafo il caso in cui una funzione $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ con $b \in \overline{\mathbf{R}}$, non ha un segno costante in $[a, b)$. Come per le serie, anche in questo caso c'è un criterio generale tramite il quale ci si riconduce a studiare integrali di funzioni non negative.

Teorema 4.1. *Sia* $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ *tale che* $|f|$ *risulti integrabile in senso generalizzato in* $[a,b)$. *Allora anche* f *è integrabile in senso generalizzato in* $[a,b)$ *e si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx\,. \tag{7}$$

Dimostrazione - Si considerino le due funzioni

$$f^+(x) := \max\big\{f(x), 0\big\}, \qquad f^-(x) := \max\big\{-f(x), 0\big\}.$$

Si osservi che si hanno

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \qquad \text{e} \qquad 0 \leqslant f^- \leqslant |f|,$$

per cui, utilizzando le ipotesi e il criterio del confronto, si deduce che

$$f^+ \quad \text{e} \quad f^- \qquad \text{sono integrabili in senso improprio in } [a, +\infty)$$

e quindi anche

$$f^+ - f^- \qquad \text{è integrabile in senso improprio in } [a, +\infty)\,.$$

Di conseguenza, poiché $f = f^+ - f^-$, si ha che f è integrabile in senso improprio e inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| &= \left| \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \int_a^b f^+(x)\, dx \right| + \left| \int_a^b f^-(x)\, dx \right| = \int_a^b |f(x)|\, dx\,. \end{aligned}$$

$\square$

Esempio 4.2. - Si dica se la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato in $[3, +\infty)$.
Poiché

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right| \leqslant \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

e $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile in $[3, +\infty)$ si conclude che f è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, in senso generalizzato e

$$\left| \int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \right| \leqslant \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx\,.$$

Analogamente (**EX**) le funzioni $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$ sono assolutamente integrabili per $\alpha > 1$ in $[3, +\infty)$ e in qualunque altro intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ e

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \right| dx < +\infty, \qquad a > 0,\ \alpha > 1\,.$$

Esempio 4.3. - La funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$. Infatti

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \frac{2}{n\pi}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi} = +\infty\,.$$

Esempio 4.4. - La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(0, 1]$ se $\alpha < 1$. Infatti

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^\alpha}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx\,.$$

Ad ogni modo si osservi che, con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ ci si riduce a

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{2-\alpha}}\operatorname{sen} y\, dy$$

e la funzione $y \mapsto \frac{1}{y^{2-\alpha}}\operatorname{sen} y$ è assolutamente integrabile in $(1, +\infty)$ se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$, ma è integrabile in senso improprio se $2 - \alpha > 0$, cioè $\alpha < 2$ (per questo si veda il paragrafo 6).

Grafico di $x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ per $x > 0$

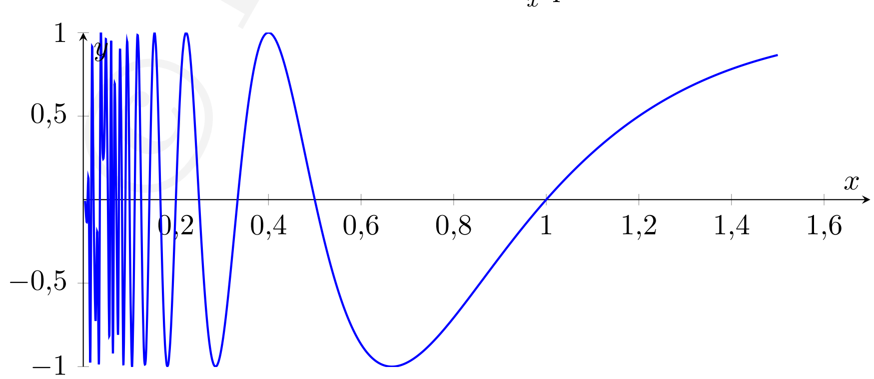
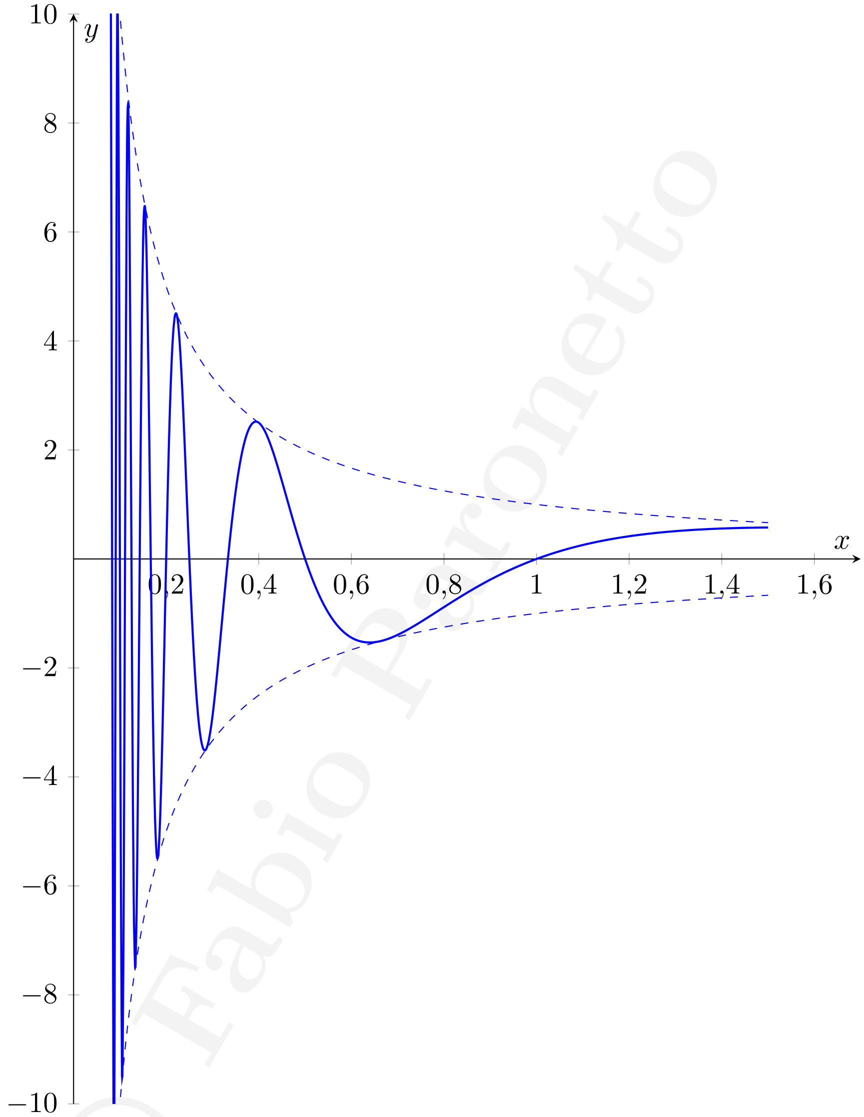


Grafico di $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e, tratteggiati, di $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ e $x \mapsto -\frac{1}{x^\alpha}$ per $x > 0$



5. Integrali generalizzati e serie numeriche

Vediamo ora come gli integrali generalizzati di funzioni definite su intervalli illimitati (semirette) siano strettamente connessi alle serie numeriche. Il seguente risultato è spesso chiamato *Criterio integrale per la convergenza delle serie*, ma ovviamente è anche un criterio per la convergenza degli integrali impropri.

Teorema 5.1. *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *positiva e decrescente. Allora*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{è convergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \quad \text{è convergente},$$

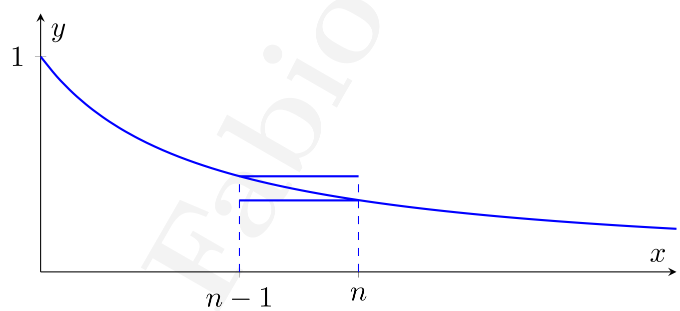
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{è divergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \quad \text{è divergente}.$$

Dimostrazione - Dalla monotonia di f si ottiene che

$$f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n-1) \qquad \text{per } x \in [n-1, n]\,.$$

Integrando tra $n-1$ e n questa serie di disuguaglianze si ottiene (si veda anche la figura più in basso)

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \leqslant f(n-1)\,. \tag{8}$$



Sommando (8) per $n = 1, \ldots, N$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant \int_0^{N} f(x)\, dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n-1) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,. \tag{9}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 5.2. - Si osservi che analogamente a (8) si ricava

$$\int_n^{n+1} f(x)\, dx \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

da cui

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Osservazione 5.3. - Si supponga f sia decrescente e mettiamoci nel caso che

$$\sum_n f(n) \quad \text{diverga}\,. \tag{10}$$

Si osservi allora come dalla stima (9) si ricava

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} = 1\,. \tag{11}$$

Infatti considerando le disuguaglianze (9) e dividendo per $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)$ si ottiene

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n) - f(0)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n) - f(N)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)}$$

Dalle ipotesi (10) passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene (11). Infatti la quantità $f(N)$ è limitata e, anzi, converge poiché f decrescente (ipotesi del teorema). Si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = L \geqslant 0.$$

Vediamo ora alcuni esempi di serie o integrali il cui comportamento è già noto, solo per vedere come possa essere utile il confronto: talvolta può risultare più semplice effettuare un calcolo esplicito di un integrale anziché studiare il carattere di una serie, talvolta invece può essere più semplice il contrario.

Esempi -

1. Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$.

Utilizzando il criterio appena visto si può calcolare

$$\lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{1}{x\log x} = \lim_{c\to+\infty} \big[\log(\log c) - \log(\log 2)\big] = +\infty$$

per cui si conclude che la serie data diverge.

2. Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Utilizzando il criterio appena visto si può calcolare

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x} = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty$$

per cui si conclude che la serie data diverge.

3. Si studi l'integrale $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ dove $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}$.

Innanzitutto si osservi che la funzione integranda è sempre positiva (perlomeno nell'intervallo in cui va integrata) e limitata (non ci sono punti in cui $x^5 - 7x^2 + 3$ si annulla o cambia segno). Inoltre si osservi che f è, almeno definitivamente, decrescente (è sufficiente calcolare f'). Di conseguenza possiamo semplicemente studiare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{n^2+1}{n^5-7n^2+3}\,.$$

Il termine generico di questa serie può essere confrontato con $\dfrac{1}{n^3}$ e, poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, converge anche l'integrale dato.

Si osservino ora le due seguenti cose, che possono essere interessanti. Per far ciò utilizziamo l'Osservazione 5.3.

Serie divergenti - Problema: data una serie divergente è possibile dire quale sia il suo andamento all'infinito? Vediamo un esempio.

Si osservi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ soddisfa le ipotesi (10), per cui vale (11). Questo significa che siamo in grado di dare una stima dell'andamento a $+\infty$ delle somme parziali $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ e, poiché $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \log N$, concludere che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}{\log N} = 1$$

e quindi possiamo dire che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $N \geqslant \nu$ vale

$$(1-\varepsilon)\log N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant (1+\varepsilon)\log N\,.$$

Si confronti a tal proposito la formula (6) del capitolo sulle serie numeriche. Altro esempio semplice: consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p \in (0,1)$. Poiché

$$\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\,N^{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

l'andamento all'infinito delle somme parziali $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$ sarà quello di N^{1-p}.

Si consideri la serie dell'esempio 1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$. Essendo divergente si ha che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\log n}}{\log\log N} = 1.$$

Un ultimo esempio che facciamo è quello della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$. Poiché

$$\int_1^N \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log^2 x\bigg|_1^N = \frac{1}{2}\log^2 N$$

si ha che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n}}{\log^2 N} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'andamento a $+\infty$ di $\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n}$ è quello di $\frac{1}{2}\log^2 N = \left(\log\sqrt{N}\right)^2$.

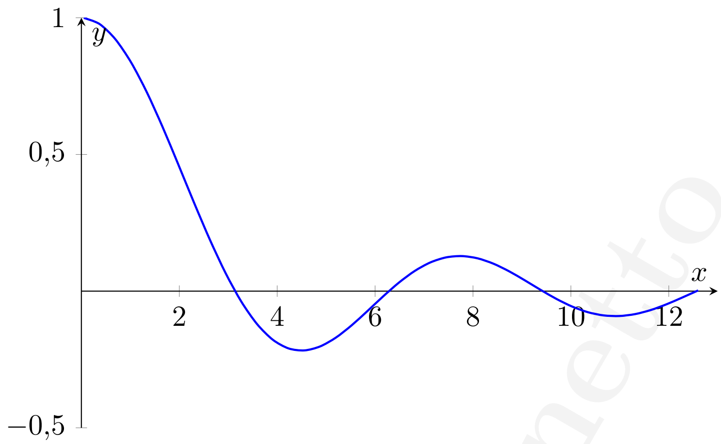
6. Integrali oscillanti

Abbiamo visto nell'Esempio 4.3 che la funzione $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è assolutamente integrabile in $(0,+\infty)$. Ma è integrabile in senso generalizzato? Esiste, cioè, finita la quantità

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad ? \tag{12}$$

Innanzitutto si osservi che la funzione è limitata (il grafico è mostrato in figura), infatti

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$



Quindi possiamo concentrarci sul limite all'infinito

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

Per ogni $c>0$ esiste un unico naturale $n=n(c)$ per cui

$$(13)\quad n\pi \leqslant c < (n+1)\pi, \qquad \left(\text{è la parte intera di } \frac{c}{\pi} \text{ denotata da } \left[\frac{c}{\pi}\right]\right),$$

per cui, se per semplicità poniamo $f(x)=1/x$, possiamo scrivere

$$\int_0^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{n\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx + \int_{n\pi}^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx\,.$$

Ora per ogni $k\in\mathbf{N}$ definiamo

$$(14)\qquad a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,|\operatorname{sen} x|\,dx$$

dimodoché si abbia

$$\int_0^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k + E(c)$$

dove E è un errore, funzione del punto c, ed è

$$E(c) := \int_{n\pi}^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{con } n \text{ soddisfacente (13)}\,.$$

Si osservi che

$$(15)\quad |E(c)| \leqslant \sup_{x\in[n\pi,c]} f(x)\int_{n\pi}^c |\operatorname{sen} x|\,dx \leqslant f(n\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{n\pi}\,.$$

A questo punto si osservi che la somma

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k$$

non è altro che la somma parziale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$, che converge per il criterio di Leibniz perché, dalle proprietà di f, si deduce

$$(16)\qquad \begin{array}{lcl} f \text{ positiva} & \Longrightarrow & a_k > 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}, \\ f \text{ decrescente} & \Longrightarrow & a_{k+1} \leqslant a_k \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 & \Longrightarrow & \lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,. \end{array}$$

Ricordandoci che

$$n = \left[\frac{c}{\pi}\right]$$

possiamo passare al limite per $c \to +\infty$ e scrivere

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \lim_{c\to+\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{c}{\pi}]-1}(-1)^k a_k + \lim_{c\to+\infty} E(c)$$

e poiché, usando (15) e il fatto che la serie converge, i due limiti a destra esistono, finiti, si conclude che esiste finito anche il limite a sinistra e

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k\,.$$

EX - Si mostri che l'integrale (12) converge integrando per parti.

L'esempio appena visto è un tipico esempio di integrale oscillante, caso particolare di

$$(17)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,\cos x\,dx\,.$$

Si osservi come il ragionamento fatto non dipende dalla scelta della funzione $x \mapsto 1/x$, ma da alcune sue proprietà. Possiamo quindi generalizzare quanto appena visto ai due integrali (17) con una generica funzione f. In generale si dovrà dividere lo studio di (17) in due parti scrivendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^{a+1} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx + \lim_{c\to+\infty}\int_{a+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx\,.$$

A questo punto servono due condizioni che garantiscano l'esistenza dei due limiti separatamente, ma in questo paragrafo concentriamo la nostra attenzione sul problema di studiare il secondo dei due limiti, che è la parte cosiddetta oscillante, essendo il primo un problema già affrontato nei paragrafi precedenti (si veda a tal proposito anche l'osservazione che segue).
Affinché esistano i due integrali in (17) richiederemo allora che

(H.1) esista finito $\lim_{x\to a^+} f(x)\,\mathrm{sen}\,x$ nel primo caso,
esista finito $\lim_{x\to a^+} f(x)\,\cos x$ nel secondo caso;

(H.2) f positiva, decrescente e infinitesima all'infinito, cioè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Osservazione 6.1. - Si noti che la condizione richiesta in (H.1), come già detto, serve solo a garantire l'esistenza dell'integrale $\int_a^{a+1} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$ o $\int_a^{a+1} f(x) \cos x\, dx$. Se f fosse illimitata ($\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$) si può dividere il problema in due e studiare separatamente l'integrale in $(a, a+1]$ e in $[a+1, +\infty)$ e in quest'ultimo intervallo la funzione risulta limitata.
Sia ad esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{definita in } (0, +\infty).$$

Come già visto nell'Esempio 4.2 l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$ esiste, ma $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$ non esiste perché

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} x\, dx = +\infty\,.$$

Osservazione 6.2. - Se la funzione f in (17) è limitata in $[a, +\infty)$ l'ipotesi (H.1) è superflua e l'unica cosa da verificare (analogamente al criterio di Leibniz per le serie numeriche) è l'ipotesi (H.2).

Detto quanto appena osservato, possiamo enunciare il seguente risultato, già dimostrato.

Teorema 6.3. *Data $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ limitata in $[a, +\infty)$ e inoltre positiva, decrescente e infinitesima all'infinito, gli integrali impropri* (17) *esistono.*

Osservazione 6.4. - Ovviamente se f è negativa e crescente il Teorema 6.3 continua a valere. Si può adattare la dimostrazione o più semplicemente, cambiando segno all'integrale, considerare $-f$.

Esempio 6.5. - Consideriamo $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ e gli integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx \qquad\qquad \alpha > 0\,.$$

È abbastanza immediato convincersi che le cose funzionano in maniera simile a quanto visto precedentemente; altrimenti è sufficiente porre $y := \alpha x$ e

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx &= \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx = \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{c \to +\infty} \int_a^{\alpha c} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \operatorname{sen} y\, dy = \frac{1}{\alpha} \int_a^{+\infty} f_\alpha(y) \operatorname{sen} y\, dy\end{aligned}$$

dove $f_\alpha(y) = f(y/\alpha)$. Se f_α verifica le ipotesi (H.1) e (H.2) oppure se è limitata e verifica (H.2) gli integrali sono convergenti.

EX - Si mostri che f_α verifica tali ipotesi se e solo se le verifica f.

7. Appendice: calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Vediamo qui *un* modo di calcolare il valore di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, fra quelli che conosco il meno immediato, valore che già sappiamo essere finito, per cui chiamiamo $2p$ tale valore, cioè

$$p = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Lo ripetiamo, questo è un modo fra tanti, l'unico di mia conoscenza che usa solo strumenti del primo corso di analisi matematica.
Il calcolo può essere diviso in vari passi, che elenchiamo qui di seguito per sintetizzare i vari passaggi:
1^o *passo* - $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \frac{(m-1)!!}{m!!}\,\frac{\pi}{2}$ se m è pari,
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \frac{(m-1)!!}{m!!}$ se m è dispari.
2^o *passo* - $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{\pi}$.
3^o *passo* - $2p = \sqrt{\pi}$.
1^o) Tralasciando $m = 1$, per $m \geqslant 2$, si ha

$$\cos^m t = \cos^{m-2} t\ \cos^2 t = \cos^{m-2} t\,\big(1 - \operatorname{sen}^2 t\big)$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t\,dt\,.$$

Integrando per parti $\cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t = \frac{d}{dt}\big(\frac{1}{m-1}\cos^{m-1} t\big)\operatorname{sen} t$ otteniamo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t\,dt = -\frac{1}{m-1}\cos^{m-1} t\operatorname{sen} t\,\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{m-1}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt$$

quindi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt + \frac{1}{m-1}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt &= \frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt = \\ &= \qquad \cdots \qquad = \frac{(m-1)!!}{m!!}A\end{aligned}$$

dove

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 1 \quad \text{se } m \text{ dispari}, \qquad A = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } m \text{ pari.}$$

Il calcolo è analogo per $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt$.
2^o) Poiché $0 < \operatorname{sen} x < 1$ per $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} t\,dt < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} t\,dt < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} t\,dt$$

da cui si ricava, usando il primo punto, che

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\,.$$

Passando ai reciproci e dopodiché moltiplicando per $\pi/2$ e per $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ si ottiene

$$\frac{\pi}{2}\,(2m) < \left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2}\,(2m+1).$$

A questo punto dividendo per m e passando al limite per $m \to +\infty$ si conclude.
3^o) Introducendo una nuova variabile t e ponendo $rt = x$ per $r > 0$ si ha

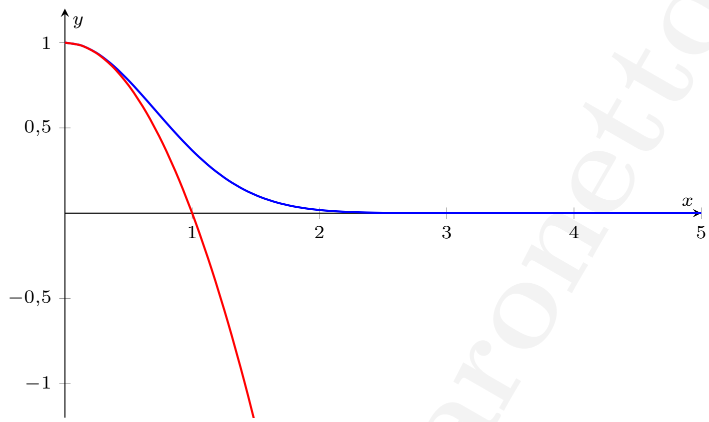
$$p = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-x^2}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_0^1 r e^{-r^2t^2}\,dt\,. \tag{18}$$

Dalla disuguaglianza $e^y - 1 \geqslant y$ si deduce che $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$, per cui $e^{-x^2} \leqslant (1 + x^2)^{-1}$ e infine

$$e^{-mx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^m}\,, \qquad m \in \mathbf{N}\,.$$

Sempre dalla disuguaglianza $e^y - 1 \geqslant y$ si deduce anche che $e^{-x^2} \geqslant 1 - x^2$.

Grafici per $x \geqslant 0$ di $x \mapsto e^{x^2}$ in blu e di $x \mapsto 1 - x^2$ in rosso



Allora, per $1 - x^2 \geqslant 0$, cioè $x^2 \leqslant 1$, si deduce che

$$e^{-mx^2} \geqslant (1 - x^2)^m\,, \qquad m \in \mathbf{N}\,.$$

Usando entrambe le disuguaglianze ottenute ne segue che

$$\int_0^1 (1-x^2)^m\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx\,.$$

Nel primo integrale a sinistra dell'ultima disuguaglianza si faccia il cambio di variabile $x = \cos t$, nell'ultimo $x = \operatorname{tg} t$: si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} t\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} t\,dt\,,$$

per cui, usando il primo punto,

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Moltiplicando per $\sqrt{m}$, usando il secondo punto, si ottiene: a sinistra

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2m+1}\,\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,\sqrt{m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{2m+1}\,\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;$$

a destra, considerandone il reciproco,

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(2m-2)!!}{(2m-3)!!}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,;$$

di conseguenza il termine centrale ammette limite e

$$\lim_{m\to+\infty} \sqrt{m} \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Infine si conclude poiché, per (18), vale anche

$$\lim_{m\to+\infty} \sqrt{m} \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx = p\,.$$