14 - Equazioni differenziali ordinarie

Ultimo aggiornamento: 9 gennaio 2024

1. Introduzione

Un'equazione differenziale ordinaria di grado $n \in \mathbf{N}^*$ è un'equazione del tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad y^{(k)} \text{ derivata di ordine } k, \tag{1}$$

dove F è una funzione di $n + 2$ variabili e y è una funzione, che è incognita ed è *l'incognita* dell'equazione. Risolvere (1) significa trovare un intervallo I e una funzione $y \in C^n(I)$ tale che

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in I.$$

L'equazione è detta in forma *normale* se

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

con f funzione di $n + 1$ variabili, cioè un'equazione differenziale ordinaria di grado n è in forma normale se la derivata di ordine massimo, cioè n, è una funzione esplicita di t, y e di tutte le altre derivate fino all'ordine $n - 1$.
L'equazione è detta *autonoma* se F non dipende da t e l'equazione è

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Si osservi che se l'equazione è autonoma e y è una soluzione anche le sua traslate $T_c y$ sono soluzioni ($T_c y(t) = y(t - c)$), infatti è sufficiente porre $s = t - c$ per accorgesene.

Il più semplice esempio di equazione differenziale è

$$y' = f,$$

(cioè si deve trovare y tale che $y'(t) = f(t)$) che è un'equazione del primo ordine in forma normale, dove f dipende solo da t. Per trovare la soluzione è sufficiente (se ci si riesce) trovare le primitive di f. Da questo si capiscono alcune cose: primo, la difficoltà di risolvere un'equazione differenziale è la stessa di trovare le primitive di una funzione, cioè un'equazione differenziale si risolve in pochi casi particolari.

Secondo un'equazione differenziale ha, o può avere, infinite soluzioni (come f ha infinite primitive).
Infine, a volte anziché *risolvere* un'equazione differenziale si dice *integrare* un'equazione differenziale, proprio perché si cerca una funzione a partire da informazioni sulla sua derivata di un qualche ordine.

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un'equazione in forma normale del tipo

$$y' + a\,y = f \tag{2}$$

dove a sono f sono funzioni note e y la funzione incognita. La più semplice, o una delle più semplici dopo il caso con $a = 0$ visto nel paragrafo precedente, è ($a = -1$, $f = 0$)

$$y' = y$$

che è un'equazione in forma normale autonoma. Ci si accorge subito che la funzione $y(x) = e^x$ è soluzione di tale equazione, Per quanto osservato prima anche tutte le sue traslazioni lo sono, cioè una funzione del tipo

$$y(x) = e^{x-x_o} = e^{-x_o}\,e^x = c\,e^x, \qquad \text{dove } c = e^{-x_o}.$$

Anche $-e^x$ è soluzione e quindi infine lo sono tutti i multipli di e^x (compresa la funzione nulla, che si verifica facilmente essere soluzione).
A questo punto ci chiediamo: le funzioni

$$y(x) = c\,e^x, \qquad c \in \mathbf{R} \tag{3}$$

sono le uniche soluzioni o ce ne sono altre? Sia y una soluzione di $y' = y$ definita in un intervallo I e consideriamo

$$h(x) = y(x)e^{-x}.$$

Derivando si ottiene

$$h'(x) = y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = e^{-x}(y'(x) - y(x)) = 0$$

da cui si deduce che h è costante in I. Si deduce che esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$h(x) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(x) = c\,e^x \quad \text{e} \quad I = \mathbf{R}$$

e quindi, infine, le funzioni (3) sono tutte e sole le soluzioni di $y' = y$.
Vogliamo ora risolvere l'equazione generale (2).
Cominciamo dal caso omogeneo, cioè il caso in cui $f \equiv 0$.

$\boxed{y' + ay = 0}$ Sia data una funzione continua $a : I \to \mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che $y \equiv 0$ è soluzione dell'equazione. Cerchiamo ora una soluzione non nulla e si supponga per ora che sia diversa da zero in ogni punto del suo dominio. Allora si ha

$$\frac{y'}{y} = -a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log|y(x)| = -A(x) + k$$

dove k è una generica costante e A una primitiva di a. Da questo si ottiene

$$|y(x)| = e^{-A(x)+k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |y(x)| = c\, e^{-A(x)}, \quad c \in (0, +\infty)$$

dove c è una generica costante positiva ($c = e^k$) e quindi

$$y(x) = c\, e^{-A(x)}, \quad c \in \mathbf{R}\,.$$

Come prima ci chiediamo: queste sono tutte le soluzioni? E come prima si può verificare che lo sono ponendo

$$h(x) = y(x)e^{A(x)}, \qquad \text{dove } y \text{ è una generica soluzione,}$$

e derivando h (EX). A questo punto si ottiene che tutte e sole le soluzioni di $y' + ay$ sono del tipo

$$y(x) = c\, e^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbf{R}$$

e quindi o y è identicamente nulla o è diversa da zero ovunque.

$\boxed{y' + ay = f}$ Vediamo ora il caso non omogeneo. Siano date due funzioni continue $a, f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, si consideri y soluzione di $y' + ay = f$ (non sappiamo nemmeno se esiste) e

$$h(x) = y(x)e^{A(x)}.$$

Al solito deriviamo h:

$$h'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = f(x)e^{A(x)}.$$

Integrando si ottiene

$$h(x) + c_1 = y(x)e^{A(x)} + c_1 = \int f(x)e^{A(x)}\, dx + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R},$$

da cui

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[\int f(x)e^{A(x)}\, dx + c \right]} \tag{4}$$

dove c è una generica costante ($c = c_2 - c_1$). Si osservi come le soluzioni siano infinite, come d'altra parte si era osservato nei casi più semplici.

Si osservi anche come nei casi già presi in considerazione si riottenga: se $a \equiv 0$, e quindi $A = k$, $k \in \mathbf{R}$,

$$(5) \qquad y(x) = e^{-k}\left[\int f(x)e^{k}\,dx + c\right] = \int f(x)\,dx + c' \quad (c' = c\,e^{-k});$$

se $f \equiv 0$

$$y(x) = c\,e^{-A(x)}.$$

Problema di Cauchy - Date $a, f : I \to \mathbf{R}$ come sopra, cioè continue in I, si considerino anche $x_o, y_o \in \mathbf{R}$ con $x_o \in I$. Il problema

$$(PC) \qquad \begin{cases} y' + a\,y = f \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

è detto problema di Cauchy, e l'informazione $y(x_o) = y_o$ è detta *condizione iniziale*. Si cerca, cioè, una funzione che risolva l'equazione differenziale data e che in un certo punto x_o assuma il valore y_o.
Si consideri il problema di Cauchy nel caso $a \equiv 0$. Si ottiene che fra le infinite soluzioni (5) la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Quindi in questo caso la soluzione è unica. Questo ci può far congetturare che fissare una condizione iniziale forzi l'equazione ad avere una sola soluzione. In effetti

Teorema 2.1. *Esiste un intervallo J contenente x_o tale che il problema di Cauchy (PC) ammette un'unica soluzione $y : J \to \mathbf{R}$.*

Osservazione 2.2. - L'intervallo J può essere diverso dal dominio di a e/o di f. Si vedano gli esercizi 2.3.2. per un esempio in cui J è contenuto nel dominio di a e f, 2.3.3. per un esempio in cui J contiene il dominio di a e f.

Una formulazione equivalente al problema di Cauchy (PC) è la seguente: y di classe C^1 risolve (PC) se e solo se

$$(6) \qquad y(x) = e^{-A(x)}\left[\int_{x_o}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt + y_o\,e^{A(x_o)}\right].$$

Infatti si può partire da (4) integrando a partire da x_o e quindi considerando

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[\int_{x_o}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dx + c\right]$$

e, poiché se $x = x_o$, la funzione integrale di fe^A vale 0, la costante c deve essere $y_o e^{A(x_o)}$.
Rimane da vedere che la funzione definita in (6) è derivabile con derivata continua basta osservare che la sue derivata è $-a(x)e^{-A(x)} \int_{x_o}^{x} f(t)e^{A(t)}\,dt + e^{-A(x)} f(x) e^{A(x)}$, che è continua.

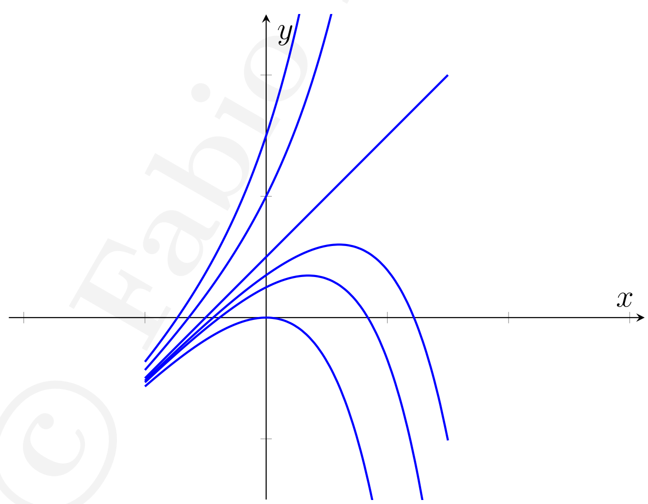
Esercizio 2.3. - 1. Si risolva (si integri) l'equazione $y' - y = -t$.
In (4) consideriamo $f(t) = -t$, $a(t) = -1$, da cui $A(t) = -t$. Si ha

$$\int f(t)e^{A(t)}\,dt = \int -t\,e^{-t}\,dt =$$
$$= t\,e^{-t} - \int e^{-t}\,dt = t\,e^{-t} + e^{-t} = e^{-t}(t+1).$$

Le soluzioni sono allora

$$y(t) = e^t\big[e^{-t}(t+1) + c\big] = t + 1 + c\,e^t \tag{7}$$

al variare di $c \in \mathbf{R}$. Alcuni grafici sono riportati nella figura seguente.



Si osservi come i grafici non si intersecano. Potrebbero farlo? Se esistesse un punto (x_o, y_o) nel quale i grafici di due possibili soluzioni si intersecassero si avrebbe che il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_o) = y_o$ avrebbe due soluzioni, e per il Teorema 2.1, questo non è possibile.

Risolviamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -t \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Come trovare la soluzione? Fra tutte le soluzioni trovate in (7) si cerca la costante c in modo tale che sia soddisfatta la condizione iniziale. Quindi si impone

$$y(1) = 1 + 1 + c\,e^1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = t + 1.$$

Altro modo è usare (6). Si ha:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \left[\int_1^x -t\,e^{-t}\,dt + 2\,e^{-1} \right] = e^x \left[e^{-t}(t+1)\Big|_1^x + 2\,e^{-1} \right] = \\ &= e^x \left[e^{-x}(x+1) - 2\,e^{-1} + 2\,e^{-1} \right] = x + 1. \end{aligned}$$

2. - Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1}\,y = \dfrac{x}{x+1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Le funzioni $a(x) = \frac{2}{x+1}$ ed $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sono definite in $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Dove andare a cercare la soluzione?
(Esercizio nell'esercizio: fra le soluzioni esiste una funzione definita in $\mathbf{R}$?)

Si osservi che la condizione iniziale è fornita nel punto 1 che appartiene a $(-1, +\infty)$. Questo significa che, a priori, la soluzione potrebbe essere definita solamente in $(-1, +\infty)$ o in un suo sottoinsieme. Procediamo con lo scrivere l'espressione della soluzione. Si ha

$$A(x) = \int a(x)\,dx = 2 \log|x+1| = \log(x+1)^2$$

$$\int f(x) e^{A(x)}\,dx = \int x(x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

Anche A non è definita in -1. Separiamo allora i calcoli per trovare la soluzione in ognuno dei due intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$. Si ha

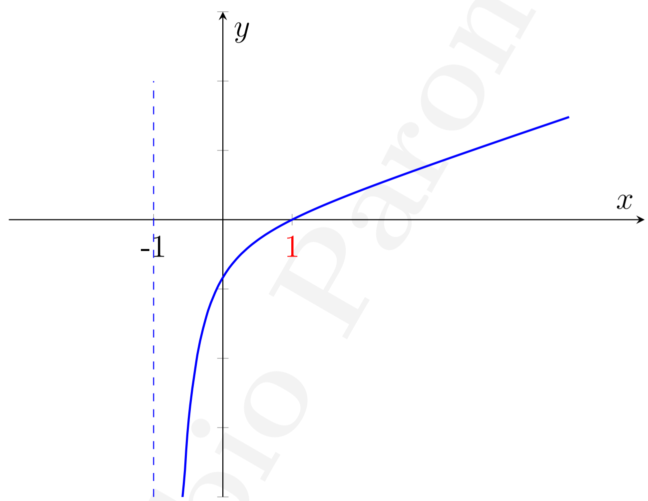
$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_1 \right] \qquad \text{in } (-\infty, -1),$$

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c_2 \right] \qquad \text{in } (-1, +\infty),$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Imponiamo ora la condizione iniziale: poiché 1 (il punto dove si fornisce il dato iniziale) appartiene all'intervallo $(-1, +\infty)$ sceglieremo come dominio della soluzione proprio l'intervallo $(-1, +\infty)$ e, imponendo $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c\right] = 0$, si trova la soluzione

$$y : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}\right]$$

il cui grafico è riportato in figura.



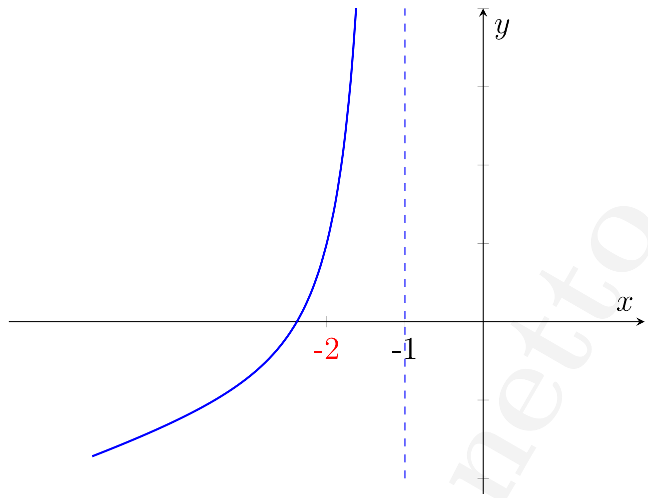
Se la condizione iniziale fosse stata

$$y(-2) = 1$$

la soluzione sarebbe stata (lo si verifichi)

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}\right]$$

definita in $(-\infty, -1)$ anziché in $(-1, +\infty)$ perché $-2 \in (-\infty, -1)$. Il grafico in questo caso è



Rispondiamo ora all'esercizio nell'esercizio: esistono dei valori per le costanti c_1 e c_2 per i quali la funzione è definita in $\mathbf{R}$?
L'unica possibilità è che non vi sia l'asintoto verticale in 1 e quindi la prima cosa è che la costante c (consideriamo $c = c_1 = c_2$) sia scelta in modo tale che

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c\right]=0 \qquad \text{e cioè} \qquad c=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}.$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right].$$

Utilizzando $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + b\,a^{n-2} + b^2 a^{n-3} + \ldots + b^{n-1})$ (oppure rendendosi conto che -1 è uno zero del polinomio dividendo il polinomio per $(x+1)$ due volte) si ottiene

$$\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(x+1)(x^2-x+1), \qquad \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)(x-1).$$

Quindi

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=(x+1)\,\frac{2x^2+x-1}{6}=\frac{1}{6}\,(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{4}.$$

Allora la funzione, anche se a priori non definita in -1,

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{è definita in tutto } \mathbf{R}$$

perché $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$ è un infinitesimo di ordine 2 nel punto -1.

3. - Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{t}\, y = t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che la funzione $a(t) = -1/t$ è definita in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Una generica soluzione è data da

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[\int t\, e^{A(t)}\, dt + c\right]$$

dove $A(t) = -\log|t|$. Se separiamo la scrittura di y nei due intervalli in cui è definita a si ha che

$$y(t) = -t\,(-t + c_1) = t^2 - c_1\, t \qquad \text{in } (-\infty, 0),$$
$$y(t) = t\,(t + c_2) = t^2 + c_2\, t \qquad \text{in } (0, +\infty)$$

con c_1, c_2 costanti. In realtà si osservi che in questo caso le soluzioni definite in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ si possono raccordare. Infatti se consideriamo $c_2 = -c_1 = c$ la funzione

$$y(t) = t^2 + c\, t \qquad \text{in } \mathbf{R}$$

è soluzione dell'equazione in $\mathbf{R}$ e il prodotto

$$a(t)y(t) = -\frac{1}{t}\left(t^2 + c\, t\right) = t + c$$

ha senso anche per $t = 0$. Possiamo quindi trovare in questo caso, a differenza dell'esempio precedente una soluzione definita in $\mathbf{R}$ e una sola soluzione per ogni dato iniziale $y(t_o) = y_o$, tranne che per $t_o = 0$. In questo caso infatti abbiamo "forzato" la funzione ad essere definita anche in 0, ma ogni generica soluzione $y(t) = t^2 + ct$ vale 0 in 0, quindi l'eventuale unica possibilità per dare un dato iniziale in 0 è chiedere $y(0) = 0$. Per quanto riguarda l'esempio considerato all'inizio si ha che la soluzione è

$$y(t) = t^2 - t \qquad \text{in } \mathbf{R}.$$

4. - Esiste una soluzione definita in $\mathbf{R}$ dell'equazione

$$y' + \frac{1}{t}\, y = t\,?$$

Svolgendo i conti si ottiene che una generica soluzione è

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t^2}{3} + \frac{c_1}{t}, && \text{in } (-\infty, 0), \\ y(t) &= \frac{t^2}{3} - \frac{c_2}{t}, && \text{in } (0, +\infty), \end{aligned}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$.
Quindi l'unica soluzione definita in $\mathbf{R}$ è quella che si ottiene per $c_1 = c_2 = 0$, $y(t) = \frac{t^2}{3}$.
Avendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{t}\, y = t \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

si considera

$$y(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{|t|}, \qquad y(-1) = \frac{1}{3} + \frac{c}{|-1|} = \frac{1}{3} + c = 1$$

e si ricava che

$$y : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}, \qquad y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{|t|} = \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{t}.$$

5. - Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2\cos t \operatorname{sen} t\, y = 3\, e^{\operatorname{sen}^2 t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

6. - Si trovino le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' + \operatorname{tg} t\, u = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\ y(2\pi) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u' + \operatorname{tg} t\, u = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\ y(\pi) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono equazioni del tipo $y' = h(t, y)$ dove $h(t, y) = f(t)g(y)$, con f e g funzioni di una variabile, cioè equazioni del tipo

$$y' = f(t)g(y).$$

<u>SE $g(y) \neq 0$</u> si può dividere per $g(y)$ ed integrare

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int f(t)\,dt.$$

Cambiando variabile ($y = y(t)$) si possono svolgere i due integrali (si osservi che non c'è il segno di uguaglianza)

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy, \qquad\qquad \int f(t)\,dt.$$

Si ottiene

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = G(y) + c_1, \qquad \int f(t)\,dt = F(t) + c_2$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, da cui

$$G\big(y(t)\big) = F(t) + c. \tag{8}$$

Per questo tipo di equazioni, oltre la difficoltà di integrare $1/g$ e f, c'è la difficoltà di dover invertire G se si vuole una scrittura esplicita per la soluzione, altrimenti, se G è invertibile, ma non si riesce a scrivere esplicitamente la sua inversa, bisogna accontentarsi della forma implicita (8).

Teorema 3.1. *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, $f \in C^0(I)$, e $g : J \to \mathbf{R}$, $g \in C^1(J)$, I e J intervalli. Allora per ogni $(t_o, y_o) \in I \times J$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases} \tag{9}$$

ha un'unica soluzione y di classe C^1 nel suo dominio.

Si torni per un momento a quanto osservato all'inizio: il trucco per risolvere l'equazione è basato sul fatto che $g(y)$ non si annulli. Se si ha il problema di Cauchy (9) con

$$g(y_o) \neq 0$$

dalla continuità di g e di y la soluzione rimarrà diversa da zero (per il teorema della permanenza del segno) in un intorno di t_o e quindi potremo procedere con la tecnica di prima in un qualche intervallo di t_o. Se invece

$$g(y_o) = 0$$

non si può dividere per $g(y)$, ma si osservi che la funzione costante

$$y \equiv y_o \qquad \text{è soluzione.}$$

Per l'unicità enunciata nel teorema, questa è *la* soluzione del problema di Cauchy.

Si consideri il problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

che è a variabili separabili. Per quanto appena detto la funzione

$$y(t) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbf{R}$$

è soluzione. Si osservi che però g non è di classe C^1 nel suo dominio, $[0, +\infty)$. Di conseguenza l'esistenza di una soluzione al problema è garantita dal fatto che ne abbiamo appena trovata una, ma il teorema non garantisce l'unicità.
Provando a dividere per $\sqrt{y}$ e ad integrare si ottiene

$$2\sqrt{y(t)} = t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2.$$

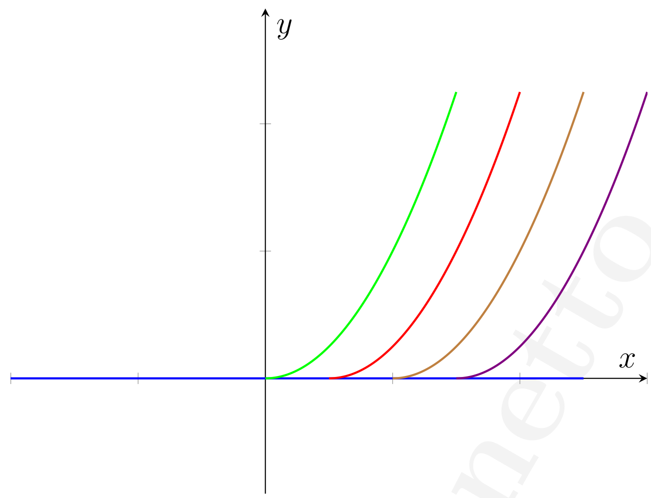
Si conclude quindi che esistono infinite soluzioni al problema di Cauchy appena visto, la funzione nulla (quella evidenziata in blu in figura) più tutte quelle che sono definite da

$$y(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t+c}{2}\right)^2 & t > -c \\ 0 & t \leqslant -c \end{cases}$$

con c costante negativa, in modo tale che in 0 valgano 0 e sia soddisfatta la condizione iniziale.
Si osservi che queste funzioni sono di classe $C^1(\mathbf{R})$, ma non di classe $C^2(\mathbf{R})$.
Si osservi inoltre che l'equazione è autonoma, quindi, trovata la soluzione

$$y(t) = \begin{cases} t^2/4 & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

altre soluzioni si possono cercare tra le sue traslazioni.



Ovviamente se g non è di classe C^1 non significa che esistano necessariamente più, o infinite, soluzioni.

Osservazione 3.2. - Il dominio può dipendere dal dato iniziale, anche nel caso autonomo. Vediamo un esempio. Risolvendo per $a > 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

si ottiene che la soluzione è

$$y(t) = \frac{a}{1 - a\,t} \qquad \text{definita in } (-\infty, 1/a).$$

Esercizio 3.3. - **1.** Si risolva

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Cominciamo ad integrare l'equazione. Si ha

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2}, \qquad \qquad \int dt = t + c$$

da cui

$$y^2(t) = 2(t + c).$$

A questo punto, se si può, si deve scrivere esplicitamente $y(t)$, cioè invertire $G(y) = y^2$, che non è invertibile in $\mathbf{R}$, ma lo è in $(-\infty, 0]$ e in $[0,+\infty)$. Poiché il dato iniziale è negativo si sceglierà la semiretta $(-\infty,0]$, quindi

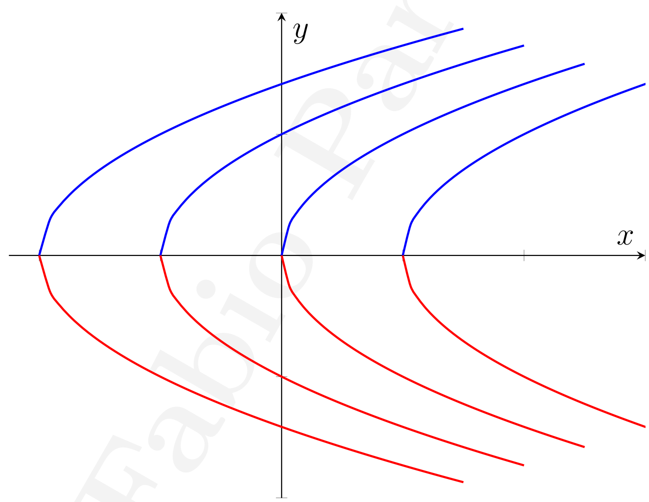
$$\begin{cases} y(t) = -\sqrt{2(t+c)} \\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = -\sqrt{2t+4}$$

Se il problema fosse

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

la soluzione sarebbe stata $y(t) = \sqrt{2t+4}$.

In figura alcuni esempi di soluzioni, in blu quelle in cui il dato iniziale è positivo, in rosso quelle che hanno dato iniziale negativo.



2. Si risolva

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\operatorname{arcsen} y(x) = x^2 + c \tag{10}$$

da cui $y(x) = \operatorname{sen}(x^2+c)$. Imponendo la condizione iniziale si ha

$$\operatorname{sen}(\pi + c) = \frac{1}{2}.$$

Si ha che $\pi + c$ deve appartenere all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, intervallo nel quale la funzione arcoseno assume valori. Per cui

$$\pi + c = \frac{\pi}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad c = -\frac{5\,\pi}{6}.$$

Da (10) si deduce che la soluzione è definita per

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x^2 - \frac{5\,\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

cioè per

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi}, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}\,\pi}\right].$$

Poiché il dato iniziale è dato in $\sqrt{\pi}$

$$\text{la soluzione è definita in } \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}\,\pi}\right].$$

3. Si risolva

$$\begin{cases} y' = (1+2x)e^{-y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Soluzione: $y(x) = \log(x + x^2 + e^2 - 2)$.
Quando la funzione g è invertibile (senza dover restringere il dominio) si può anche procedere valutando integrali definiti. In questo caso

$$\int_1^x e^{y(s)} y'(s)\, ds = \int_1^x (1+2s)\, ds$$

che può essere riscritto

$$\int_2^y e^z\, dz = \int_1^x (1+2s)\, ds$$

e infine

$$e^{y(x)} - e^2 = x + x^2 - 2$$

da cui si riottiene la soluzione trovata in precedenza.

4. Si risolva

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2y(1+x^2)} \\ y(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Come per l'esercizio **1.** la soluzione è

$$y(x) = \sqrt{\pi + \operatorname{arctg} x}.$$

Se il dato iniziale fosse stato $y(0) = -\sqrt{\pi}$ la soluzione sarebbe stata
$$y(x) = -\sqrt{\pi + \operatorname{arctg} x}.$$

5. Qualche volta può essere utile un cambio di variabile. Si risolva
$$y' = \frac{1}{2}(x + 2y - 1)^2.$$
Ponendo
$$z(x) = x + 2y - 1$$
si ottiene (usando l'equazione)
$$z'(x) = 1 + 2y'(x) = 1 + z^2.$$
A questo punto si ha un'equazione a variabili separabili, che integrata fornisce
$$z(x) = \operatorname{tg}(x + c) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\big(1 - x + \operatorname{tg}(x + c)\big).$$

6. Si risolva
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{y} \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$
Apparentemente la funzione $g(y) = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}$ non è definita per $y = 0$, però $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$ e, anzi, la funzione
$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$
è continua e derivabile in $\mathbf{R}$ (EX: $g'(0) = 1$). Quindi ha senso anche il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{y} \\ y(x_o) = 0 \end{cases}$$
Poiché $y \equiv 0$ è soluzione, $y \equiv 0$ è anche l'unica soluzione.

7. Si risolva
$$\begin{cases} y' = x\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
Detta g la funzione $g(y) = 1 + \frac{1}{y}$ si ha che g non è definita in 0 e si annulla per $y = -1$. Il valore nell'istante iniziale è 2, diverso da -1,

quindi $y \equiv -1$ non è soluzione. Procediamo dividendo l'equazione per g:

$$\int \frac{y}{1+y}\,dy = \int \left[1 - \frac{1}{1+y}\right]\,dy = y - \log|y+1| + c_1$$

Dall'altra parte

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_2$$

per cui infine

$$y(x) - \log|y(x)+1| = \frac{x^2}{2} + c.$$

A questo punto dobbiamo trovare c: valutando per $x = 1$ e imponendo la condizione iniziale

$$2 - \log|2+1| = 2 - \log 3 = \frac{1}{2} + c$$

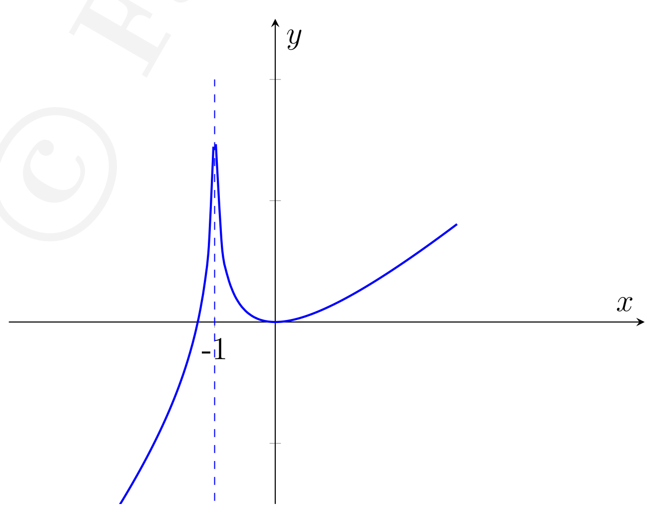
si ricava $c = \frac{3}{2} - \log 3$ e quindi la soluzione soddisfa

$$y(x) - \log|y(x)+1| = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \log 3. \tag{11}$$

Si osservi che la derivata di G in 0 è nulla e che localmente G non è invertibile attorno allo 0. Anche senza disegnare il grafico di G di questo ci si può accorgere sviluppandola in 0:

$$G(y) = y - \log(y+1) = y - \left(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) = \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Quindi in un intorno di 0 la funzione sarà convessa e avrà un minimo stretto in 0.
Il grafico della funzione $G(y) = y - \log|y+1|$ è riportato in figura:



Si osservi che G è localmente invertibile ovunque tranne che in un intorno di 0, dove g non è definita, per cui il valore $y(x_o) = 0$ non è assegnabile. Quindi G è invertibile in $(-\infty, -1)$, è invertibile in $(-1, 0)$, è invertibile in $(0, +\infty)$.
Nonostante questo l'espressione esplicita dell'inversa non si riesce a scrivere. In questo caso ci si accontenta della forma implicita.
Se il dato iniziale $y(x_o) = y_o > -1$ si ha

$$y(x) - \log\big(y(x) + 1\big) = \frac{x^2}{2} + c$$

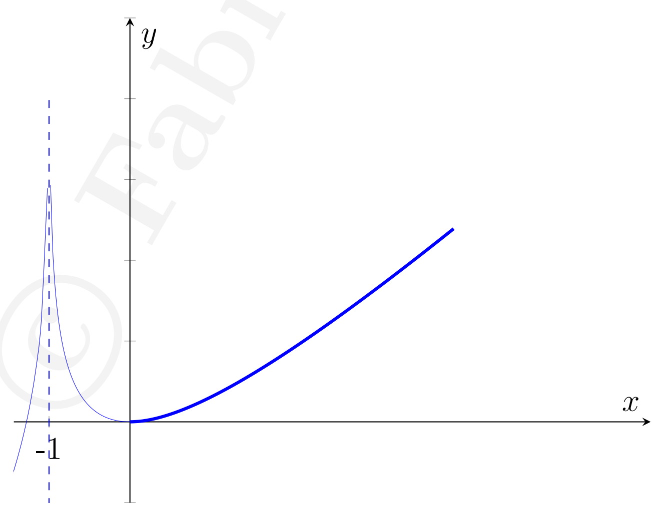
per un'opportuna c, se il dato iniziale $y(x_o) = y_o < -1$ si ha

$$y(x) - \log\big(-y(x) - 1\big) = \frac{x^2}{2} + c,$$

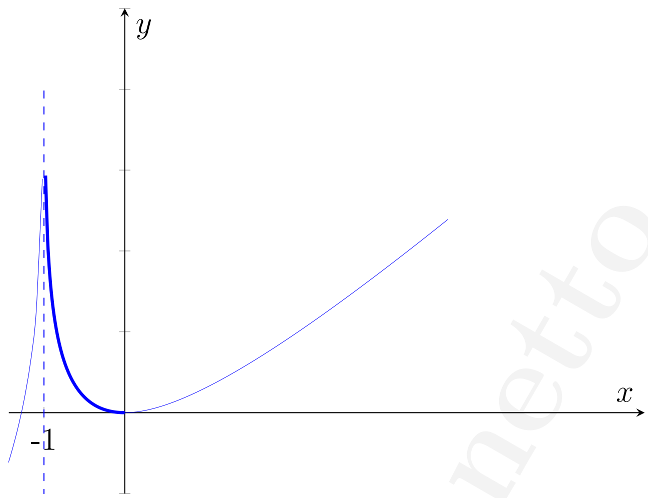
sempre per un'opportuna c che va trovata. Nell'esempio considerato, da (11), si ricava che la soluzione soddisfa l'equazione implicita

$$y(x) - \log(y(x) + 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \log 3$$

dove la G, $G(y) = y - \log(y + 1)$, sarà invertita nell'insieme $[0, +\infty)$, cioè si invertirà quel ramo evidenziato nella figura che segue.

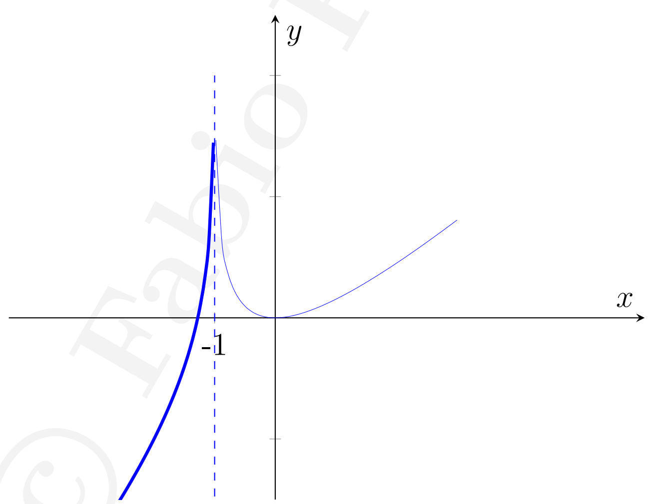


Se il dato iniziale fosse, ad esempio, $y(t_o) = -0{,}5$ si dovrebbe invertire il ramo evidenziato nella figura che segue (perché $-0{,}5 \in (-1, 0]$):



E infine se il dato iniziale fosse $y(t_o) = y_o < -1$ si dovrebbe invertire il ramo evidenziato nella figura seguente dove la funzione G è

$$G(y) = G(y) = y - \log(-(y+1)).$$



Infine si osservi che, tornando all'esercizio, che la soluzione deve soddisfare

$$y(x) - \log(y(x) + 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \log 3 \tag{12}$$

dove $y - \log(y + 1)$ per $y \geqslant 0$ è non negativa. Va verificato che anche la quantità $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \log 3$ sia non negativa, ed in effetti lo è perché

$\frac{3}{2} - \log 3 > 0$. Per verificarlo si osservi che

$$\frac{3}{2} - \log 3 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{3/2} > 3 \quad \Longleftrightarrow \quad e^3 > 9$$

e l'ultima disuguaglianza è vera perché, ad esempio, $e^3 > (2{,}5)^3 = (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8} > 9$. Quindi

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \log 3 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

e la funzione che soddisfa l'equazione implicita (12) è definita in $\mathbf{R}$.
Vediamo ora che succede se il dato iniziale è

$$y(4) = 1.$$

In questo caso si ha che il ramo da invertire (anche se non sappiamo farlo) è sempre lo stesso di prima, e la soluzione deve soddisfare

$$1 - \log(1+1) = \frac{16}{2} + c$$

da cui $c = 1 - \log 2 - 8 < 0$. Allora l'uguaglianza

$$y(x) - \log(y(x)+1) = \frac{x^2}{2} + 1 - \log 2 - 8$$

non può essere vera per ogni $x \in \mathbf{R}$, perché a sinistra abbiamo un termine non negativo, a destra un termine che può essere anche negativo. Poiché

$$\frac{x^2}{2} + 1 - \log 2 - 8 \geqslant 0 \iff x \in \big(-\infty, -\sqrt{14 + \log 4}\big] \cup \big[\sqrt{14 + \log 4}, +\infty\big)$$

si avrà, poiché il punto in cui è data la condizione iniziale è 4 e $4 \in \big[\sqrt{14 + \log 4}, +\infty\big)$, che la soluzione in questo caso è definita in $\big[\sqrt{14 + \log 4}, +\infty\big)$ (questo si verifica facilmente poiché

$$4 > \sqrt{14 + \log 4} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 > \log 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \log e^2 > \log 4$$

e $e^2 > (2{,}5)^2 = \frac{25}{4} > 4$).
Infine si osservi che in -1 G non è definita perché $g(-1) = 0$. Se il problema di Cauchy fosse

$$\begin{cases} y' = x\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \\ y(x_o) = -1 \end{cases}$$

la soluzione, indipendentemente da chi sia x_o, è la funzione costante $y \equiv -1$.

4. Equazioni differenziali ordinarie lineari di grado superiore al primo

Un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n è un'equazione del tipo

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = f \tag{13}$$

con $f, a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ sono funzioni continue in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$. L'equazione sarà detta *omogenea* se $f = 0$, cioè se l'equazione è

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0. \tag{14}$$

Si osservi come la derivata di ordine maggiore ha come coefficiente 1. Ci si può sempre riportare a questa situazione dividendo per il coefficiente della derivata *n-esima* di u (se questo è diverso da 0, ma se è 0 non è un'equazione di grado n).
Una equazione del tipo (13) se $n = 1$ si riduce a

$$u' + a_0 u = f,$$

se $n = 2$

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = f.$$

Osservazione 4.1. - Si osservino i seguenti fatti:
1°) se v e w sono soluzioni di $Lu = 0$ allora $av + bw$ è soluzione di $Lu = 0$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ (se ammettiamo anche soluzioni complesse lo stesso vale per ogni $a, b \in \mathbf{C}$);
2°) se v e w sono soluzioni di $Lu = f$ allora $v - w$ è soluzione di $Lu = 0$;
3°) se v e w soddisfano $Lv = f$ e $Lw = g$ allora $L(v + w) = f + g$;
4°) in particolare scegliendo $g = 0$ si ottiene che se v e w soddisfano $Lv = f$ e $Lw = 0$ allora $L(v + w) = f$.

5. Equazioni a coefficienti costanti omogenee

D'ora in poi ci concentreremo nel caso in cui i coefficienti a_j nell'equazione (13) sono costanti.
In questo paragrafo inoltre affronteremo il caso delle equazioni a coefficienti costanti e omogenee (si veda (14)). In base al Teorema 5.1 per trovare tutte le soluzioni dell'equazione (14) sarà sufficiente trovare n soluzioni di (14) linearmente indipendenti.

Noi ci concentreremo solamente sulle equazioni di grado 1 e 2, anche se qualcosa diremo anche su quelle di grado superiore.

Teorema 5.1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea* (14) *di grado n con $a_j \in \mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.*

Questo teorema ci dice prima di tutto che l'equazione ha infinite soluzioni. Non ci deve stupire dal momento che ciò si era già visto per le equazioni di primo grado.
Mentre per le equazioni di primo grado le infinite soluzioni dipendono da un solo parametro, e possono essere pensate come uno spazio vettoriale di dimensione 1, in questo caso esiste una base di n elementi, cioè n soluzioni linearmente indipendenti, le cui combinazioni lineari forniscono tutte le soluzioni dell'equazione omogenea. Ognuna di queste soluzioni dipende da n parametri, i coefficienti rispetto alla base.
La base, come per ogni spazio vettoriale, non è unica.

In base a ciò è sufficiente trovare n soluzioni di (14) che siano linearmente indipendenti: una generica soluzione di (14) sarà data da una combinazione lineare di queste n funzioni.
Anche l'equazione (13) ha infinite soluzioni: per trovarle tutte basterà trovare una sola soluzione di (13) e aggiungere una generica soluzione di (14), come già fatto notare nel quarto punto dell'Osservazione 4.1.

Con il termine *operatore* si intende semplicemente una funzione che come argomento ha una funzione e come risultato fornisce una funzione.
Esempi: la derivata, che denotiamo con D, è un operatore dall'insieme $C^1(\mathbf{R})$ in $C^0(\mathbf{R})$, cioè

$$D : C^1(\mathbf{R}) \to C^0(\mathbf{R}), \qquad Du = u';$$

l'integrale è un altro operatore che opera da $C^0(\mathbf{R})$ a $C^1(\mathbf{R})$, cioè data $f \in C^0(\mathbf{R})$

$$F(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\, dt, \qquad F \in C^1(\mathbf{R}).$$

Veniamo ora al problema di trovare esplicitamente le soluzioni di un'equazione lineare a coefficienti costanti di grado n.
Scriveremo d'ora in poi l'operatore lineare L come un polinomio nella variabile D (che poi sarà la derivata, ma per il momento possiamo pensarla come una variabile), cioè nella seguente forma

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0$$

dove D rappresenta la derivata $\frac{d}{dt}$. Questo modo di vedere l'operatore L avrà, come vedremo, un notevole vantaggio. Infatti ci permetterà di trovare le soluzioni dell'equazione omogenea e in qualche caso particolare anche le soluzioni di equazioni non omogenee.

Commenti sull'algebra degli operatori tipo $P(D)$ - Facciamo un breve commento riguardo gli operatori differenziali a coefficienti costanti. L'operatore

$$\frac{d}{dt} : C^1(I) \to C^0(I)$$

agisce sullo spazio delle funzioni $C^1(I)$, per un dato intervallo $I \subset \mathbf{R}$, come segue: ad una funzione $y \in C^1(I)$ associa la sua derivata, che è una funzione continua, cioè

$$\frac{d}{dt} y = y' .$$

Parallelamente a questo si può considerare l'operatore *identità* che denoteremo con Id

$$Id : C^1(I) \to C^1(I) \qquad Id\, y = y .$$

In particolare si possono considerare combinazione lineari di questi due operatori che sono definiti e agiscono come segue:

$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + \beta Id\right) : C^1(I) \to C^0(I) ,$$
$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + \beta Id\right) y := \alpha y' + \beta y .$$

Per semplicità da qui in avanti scriveremo solamente D per denotare l'operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$ e ometteremo di scrivere l'operatore Id, per cui l'operatore definito sopra sarà scritto d'ora in poi semplicemente come

$$\alpha D + \beta$$

con l'ovvio significato. Si consideri ora un'equazione del secondo ordine, ad esempio

$$y'' + ay + b = 0 .$$

Anche in questo caso il termine a sinistra può essere visto come l'applicazione alla funzione y di un opportuno operatore del secondo ordine, che sarà

$$\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + bId$$

che noi semplicemente scriveremo come

$$L = D^2 + aD + b .$$

Si osservi come questo operatore agisce dallo spazio $C^2(I)$ in $C^0(I)$. Consideriamo ora un esempio concreto: siano $a = -1$ e $b = -12$, cioè

$$L = D^2 - D - 12 ,$$

e si considerino i due operatori

$$L_1 = D - 4\,, \qquad L_2 = D + 3\,, \qquad L_j : C^1(I) \to C^0(I)\,.$$

Se applichiamo L_1 ad una funzione $y \in C^1(I)$ si ottiene

$$L_1 y = y' - 4y\,.$$

Se ora si suppone che y sia $C^2(I)$ e si applica L_2 a quanto ottenuto precedentemente si ottiene

$$L_2(y' - 4y) = D(y' - 4y) + 3(y' - 4y) = y'' - 4y' + 3y' - 12y$$

cioè, denotando con $\circ$ la composizione tra due operatori,

$$(L_2 \circ L_1)y = y'' - y' - 12y\,.$$

Analogamente si ottiene

$$(L_1 \circ L_2)y = y'' - y' - 12y\,.$$

Si è quindi ottenuto che

$$(L_2 \circ L_1) = (L_1 \circ L_2) = L\,.$$

Se scriviamo chi sono i due operatori $L_2 \circ L_1$ e $L_1 \circ L_2$ l'uguaglianza di sopra diventa

$$\begin{aligned} L_2 \circ L_1 &= (D - 4) \circ (D + 3) = D^2 - D - 12\,, \\ L_1 \circ L_2 &= (D + 3) \circ (D - 4) = D^2 - D - 12\,. \end{aligned}$$

Si osservi che l'operazione di composizione tra L_1 e L_2 commuta!
A questo punto si può pensare agli operatori differenziali L_j come polinomi nella variabile D e scrivere

$$D^2 - D - 12$$

indifferentemente come $(D - 4)(D + 3)$ o come $(D + 3)(D - 4)$.
Per un generico operatore $L = D^2 + aD + b$, dette $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ le sue due radici potremo quindi scrivere

$$L = D^2 + aD + b = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

usando semplicemente l'algebra dei polinomi, cioè moltiplicazione e somma dei numeri complessi (le radici sono a priori complesse), per cui varrà anche la commutazione, per cui L sarà anche

$$L = D^2 + aD + b = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)\,.$$

Più in generale un operatore differenziale di ordine n agirà sullo spazio $C^n(I)$ e restituirà una funzione in $C^0(I)$ e, dette $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ le n radici complesse (ripetendo eventualmente le radici multiple), si avrà che

$$\begin{aligned} D^n + a_{n-1}D^{n-1} &+ a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0 = \\ &= (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_n) \end{aligned}$$

dove l'ordine dei fattori a sinistra può essere cambiato.
In conclusione, gli operatori differenziali del tipo

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0$$

si comportano esattamente come i polinomi e noi d'ora in avanti ci riferiremo ad un operatore L come ad un polinomio P nella variabile D, cioè scriveremo

$$L = P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0 \,.$$

Equazioni di grado 1 - Abbiamo già visto le equazioni lineari di grado 1 nel caso più generale in cui il coefficiente non è necessariamente costante. Ad ogni modo per completezza vediamo anche questo semplice caso, anche perché utile per capire il metodo di abbinare ad un'equazione un polinomio. In questo caso l'insieme delle soluzioni sarà uno spazio vettoriale di dimensione 1 e a noi basterà trovare una soluzione non nulla per averle trovate tutte. L'equazione (14) sarà del tipo

$$u' + a_0 u = 0$$

per cui il polinomio P è dato da

$$P(D) = D + a_0.$$

Si osservi come una soluzione di $u' + a_0 u = 0$ è data da $u(t) = e^{-a_0 t}$. L'insieme delle soluzioni è dato da tutti i possibili multipli di questa funzione, cioè $c\,e^{-a_0 t}$ con $c \in \mathbf{R}$.
L'analogia con il polinomio (differenziale) è la seguente: partendo dal presupposto che la soluzione è un'esponenziale, risolvendo l'equazione polinomiale

$$D + a_0 = 0$$

la cui soluzione è $-a_0$ deduciamo che l'esponenziale cercata è $t \mapsto e^{-a_0 t}$.

Equazioni di grado 2 - Si supponga ora che l'equazione sia

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0 \tag{15}$$

per cui il polinomio P è dato da

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

In questo caso la soluzione dell'equazione è meno immediata, ma cercando le soluzioni del polinomio si può capire chi siano le soluzioni dell'equazione. Si supponga che λ_1 e λ_2 siano gli zeri di P, cioè

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2).$$

Allora una soluzione di $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$ dovrà soddisfare

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)u. \tag{16}$$

Abbiamo tre possibili casi.

1°) *le due radici di P sono reali e distinte* - In questo caso si noti che una soluzione di

$$(D - \lambda_2)u = 0$$

oppure una soluzione di

$$(D - \lambda_1)u = 0$$

sarà soluzione anche di (16) poiché la soluzione nulla è sempre una soluzione dell'equazione omogenea. Infatti, se $(D - \lambda_2)u = 0$, allora

$$P(D)u = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = (D - \lambda_1)\Big[(D - \lambda_2)u\Big] = 0.$$

Analogamente se $(D - \lambda_1)u = 0$ si ha

$$\begin{aligned} P(D)u =& (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)u = \\ =& (D - \lambda_2)\big[(D - \lambda_1)u\big] = 0. \end{aligned}$$

Per cui possiamo concludere che la funzione $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni dell'equazione $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$. Si osservi che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti: infatti se

$$au_1 + bu_2 = 0$$

si ha che $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Per esempio prendendo $t = 0$ e $t = 1$ si ha che $a + b = 0$ e $ae^{\lambda_1} + be^{\lambda_2} = 0$. Poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si conclude che l'unica possibilità è che $a = b = 0$.
Poiché abbiamo trovato due soluzioni lineramente indipendenti dell'equazione concludiamo che tutte le soluzioni sono date da tutte le combinazioni lineari di tali soluzioni, cioè tutte le soluzioni di (15) sono date da

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

2°) *le due radici di P sono reali e coincidenti* - Supponiamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, cioè

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D - \lambda)^2.$$

Una soluzione di (15) dovrà soddisfare

$$(D-\lambda)^2 u = 0.$$

Osservando che possiamo scrivere

$$(D-\lambda)^2 u = (D-\lambda)\Big[(D-\lambda)u\Big]$$

una possibile soluzione è data da una soluzione di

$$(D-\lambda)u = 0,$$

cioè da $u_1(t) = e^{\lambda t}$. Se invece u non risolvesse $(D-\lambda)u = 0$ si avrebbe $(D-\lambda)u \neq 0$. Chiamiamo v la funzione $(D-\lambda)u = u' - \lambda u$. Allora se vogliamo che u risolva $(D-\lambda)^2 u = 0$ si deve necessariamente avere

$$(D-\lambda)v = 0,$$

cioè la funzione v deve essere $e^{\lambda t}$ (o un suo multiplo). Cerchiamo allora la funzione u che risolve

$$(D-\lambda)u = u' - \lambda u = e^{\lambda t}.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni lineari del prim'ordine viste in precedenza si ha che l'espressione generale di una soluzione è data da

$$u(t) = e^{\lambda t}\Big[\int e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt + c\Big].$$

Scegliendo $c = 0$ otteniamo la soluzione

$$u_2(t) = t\, e^{\lambda t}.$$

Si osservi che

$$(D-\lambda)u_2 = e^{\lambda t} \tag{17}$$

e quindi $(D-\lambda)^2 u_2 = 0$. Si osservi che anche in questo caso u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti. Infatti

$$a\, e^{\lambda t} + b\, t\, e^{\lambda t} = 0$$

implica che $a = b = 0$ (basti prendere $t = 0$ e $t = 1$).

3°) *le due radici di P sono distinte, complesse e coniugate* - In questo caso possiamo denotare le due radici λ_1 e λ_2 con

$$\alpha + i\beta \qquad \text{e} \qquad \alpha - i\beta\,.$$

Ad ogni modo siamo sempre in presenza di due radici distinte ($\beta \neq 0$). Ragionando come nel primo caso avremo che due possibili soluzioni sono date da

$$e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad e^{\lambda_2 t}$$

e quindi una generica soluzione sarà data da una combinazione lineare di queste due, cioè da

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t}.$$

La differenza con il primo caso è che, essendo λ_1 e λ_2 complessi tale combinazione risulta essere

$$\begin{aligned}\gamma_1 \, e^{\alpha t} \, (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + \gamma_2 \, e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t) = \\ = (\gamma_1 + \gamma_2) \, e^{\alpha t} \cos \beta t + i \, (\gamma_1 - \gamma_2) \, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.\end{aligned}$$

A priori anche i coefficienti scelti per la combinazione lineare potranno essere complessi, per cui la combinazione di sopra è soluzione per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{C}$. Volendo limtarsi a soluzioni reali cerchiamo di scegliere γ_1 e γ_2 opportunamente in modo tale da limitarci a selezionare le funzioni reali. Scegliendo

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \, , \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \, , \end{array} \qquad \text{cioè } \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

si ottiene la funzione reale

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

mentre con la scelta

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \, , \\ i \, (\gamma_1 - \gamma_2) = 1 \, , \end{array} \qquad \text{cioè } \gamma_1 = -\gamma_2 = -\frac{i}{2}$$

si ottiene la funzione reale

$$u_2(t) = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.$$

Si osservi che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, per cui le soluzioni (reali) di (15) in questo caso sono

$$c_1 \, e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 \, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Equazioni di grado superiore al secondo - Data un'equazione lineare omogenea come (14) a coefficienti costanti si riescono a trovare le soluzioni se si riescono a trovare gli zeri del polinomio

$$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0.$$

Supponendo di conoscerli possiamo scrivere

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{h_1} (D - \lambda_2)^{h_2} \ldots (D - \lambda_k)^{h_k}$$

con $k \leqslant n$, λ_j distinte, $h_j \in \mathbf{N}$, $h_j \geqslant 1$, e $h_1 + h_2 + \dots h_k = n$.
Se $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ si avranno le h_1 soluzioni

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t}, \\ t\, e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots \\ t^{h_1 - 1}\, e^{\lambda_1 t}. \end{gathered}$$

Se h_1 fosse 1 o 2 abbiamo già visto quali sono le soluzioni. Se $h_1 = 3$ oltre a $e^{\lambda_1 t}$ e a $t\, e^{\lambda_1 t}$ si ha una eventuale funzione non nulla u per cui

$$(D - \lambda_1)^2 u \neq 0$$

e

$$(D - \lambda_1)^3 u = 0\,.$$

Per cui, chiamando v la funzione $(D - \lambda_1)^2 u$ dove u è la funzione che stiamo cercando, si ha che $v = e^{\lambda_1 t}$ (o un suo multiplo). A questo punto si deve risolvere

$$(D - \lambda_1)^2 u = e^{\lambda_1 t}.$$

Da (17) ricaviamo che

$$(D - \lambda_1) u = t\, e^{\lambda_1 t}.$$

Applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si ottiene

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} \Big[\int e^{-\lambda_1 t} t\, e^{\lambda_1 t} dt + c \Big].$$

Considerando, ad esempio, $c = 0$, si ottiene la soluzione $t^2\, e^{\lambda_1 t}$. Iterando il procedimento si ottengono tutte le altre soluzioni. Si osservi che il caso $\lambda_1 = 0$ fornisce le soluzioni

$$1, t, t^2, \dots t^{h_1 - 1}.$$

Nel caso di radice complessa si ragiona in maniera analoga. Ricordando che se λ_2 è complesso, diciamo $\alpha + i\beta$, allora un'altra radice, diciamo λ_3, sarà $\alpha - i\beta$ e $h_2 = h_3$. Si trovano le soluzioni

$$\begin{array}{rl} e^{\alpha t} \cos \beta t, & e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ t\, e^{\alpha t} \cos \beta t, & t\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ t^2\, e^{\alpha t} \cos \beta t, & t^2\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ \vdots & \vdots \\ t^{h_2 - 1}\, e^{\alpha t} \cos \beta t, & t^{h_2 - 1}\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \end{array}$$

Esempi

1 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 0.$$

Si risolva poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 3u' + 2u = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione può essere scritta come

$$(D^2 - 3D + 2)u = 0\,.$$

A questo punto la cosa importante è trovare le due radici dell'equazione $D^2 - 3D + 2 = 0$, oppure se si preferisce di

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$

Le due radici sono 1 e 2, quindi abbiamo due radici reali e distinte. Due soluzioni linearmente indipendenti (ma non è l'unica scelta) sono

$$u_1(t) = e^t \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{2t}\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$u(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per risolvere il problema di Cauchy valutiamo la derivata di una generica soluzione u:

$$u'(t) = c_1\, e^t + 2\, c_2\, e^{2t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha allora

$$\begin{cases} u'(0) = c_1 + 2\, c_2 = 1 \\ u(0) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

da cui $u(t) = 3\, e^t - e^{2t}$.

2 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 6u' + 9u = 0\,.$$

Il polinomio è allora $D^2 - 6D + 9 = (D - 3)^2$. Abbiamo quindi due radici reali e coincidenti. Due soluzioni linearmente indipendenti sono allora

$$u_1(t) = e^{3t} \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = t\, e^{3t}\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

3 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 4u' + 5u = 0\,.$$

I due zeri del polinomio $D^2 - 4D + 5$ sono $2 + i$ e $2 - i$, siamo quindi nel caso di due radici complesse e coniugate. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono allora

$$u_1(t) = e^{2t} \cos t \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{2t} \operatorname{sen} t\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$c_1\, e^{2t} \cos t + c_2\, e^{2t} \operatorname{sen} t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

4 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$u''' + 2u'' - 8u' = 0$$

e si dica se esistono soluzioni u che soddisfano

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0.$$

Si osservi che questa in realtà questa è un'equazione di secondo grado nella variabile u', cioè, ponendo $v = u'$, si ottiene

$$v'' + 2v' - 8v = 0\,.$$

Risolvendo si ottiene che le soluzioni sono

$$v(t) = \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{-4t}$$

al variare di $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbf{R}$. A questo punto, integrando, si ha

$$u(t) = \frac{1}{2}\tilde{c}_1 e^{2t} - \frac{1}{4}\tilde{c}_2 e^{-4t} + c_3 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t} + c_3$$

al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$. Per rispondere alla domanda finale è sufficiente scegliere $c_2 = c_3 = 0$ e considerare tutte le soluzioni $c_1 e^{2t}$.

6. Equazioni a coefficienti costanti non omogenee

Si consideri l'equazione (13). Per trovare tutte le soluzioni di tale equazione è in realtà sufficiente trovarne una sola, dopodiché sommarci tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea (14).
L'obiettivo di questo paragrafo è mostrare come trovare una soluzione dell'equazione non omogenea (solo in alcuni casi particolari).
Ci sono dei metodi per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea (13). Noi ne vedremo uno che funziona solo per una classe di funzioni particolare; tale metodo va sotto il nome di *metodo degli annichilatori*.
Riscriviamo l'equazione (13) come al solito: detto P il polinomio $P(D) =$

$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0$ l'equazione può essere scritta come

$$P(D)u = f\,. \tag{18}$$

Il metodo che presentiamo si basa sulla seguente supposizione: che f sia a sua volta una soluzione di una equazione differenziale a coefficienti costanti che scriveremo

$$Q(D)f = 0$$

dove Q è un polinomio, diciamo

$$Q(D) = D^k + b_{k-1}D^{k-1} + \cdots + b_2D^2 + b_1D + b_0\,.$$

Allora applicando l'operatore differenziale $Q(D)$ ad entrambi i membri di (18) si ottiene l'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)u = 0\,. \tag{19}$$

Questo ci dice le due seguenti cose:

A) che se u è una soluzione di (18), allora u è anche soluzione di (19), per cui possiamo cercare una soluzione di (18) tra le soluzioni di (19);

B) tra le soluzioni di (19) ci sono anche le soluzioni dell'equazione omogenea

$$P(D)u = 0\,. \tag{20}$$

Si osservi inoltre, come già detto nell'Osservazione 4.1, quarto punto, che se u risolve (18) e v risolve (20) allora $u + v$ risolve (18). Quindi se ad una soluzione di (18) sommiamo tutte le funzioni dello spazio vettoriale dato dalle soluzioni dell'omogenea troviamo ancora soluzioni dell'equazione non omogenea (18). In realtà è evidente che non c'è niente altro. Per cui le soluzioni di (18) sono della forma

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \cdots + c_nu_n(t) + \bar{u}(t)$$

dove, se P ha grado n, $u_1, \ldots u_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti di (20) e $\bar{u}$ è una soluzione arbitraria di (18).

Quindi una soluzione dell'equazione (18) **va cercata fra le soluzioni (tutte!) di** (19).
Le soluzioni di (18) sono date da una qualunque soluzione di (19) sommata a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, le quali però non ci aiutano nella ricerca di una soluzione $\bar{u}$ di (18). Per cui, tenendo conto delle osservazioni fatte nei punti A) e B), per trovare una soluzione di (18) è sufficiente limitarsi a cercare nell'insieme

$$\{\text{soluzioni di (19)}\} \setminus \{\text{soluzioni di (20)}\}\,. \tag{21}$$

L'insieme indicato in (21) è semplicemente dato delle soluzioni dell'equazione

$$Q(D)u = 0$$

nel caso in cui il polinomio Q **non abbia** radici in comune con il polinomio P. Nel caso in cui il polinomio Q abbia radici in comune con P bisogna tener conto della molteplicità di tali radici, come sarà illustrato in alcuni esempi che seguono (si vedano gli esempi **11.** e **13.**).

Una difficoltà, solo teorica, è che il polinomio QP ha un grado maggiore di quello di P, ma ammesso che si sappia fattorizzare sia P che Q, si sa fattorizzare anche QP. Un'altra difficoltà è trovare il polinomio Q, ma ora vedremo come sia relativamente facile.
Gli operatori differenziali Q sono detti annichilatori.
Nel paragrafo precedente abbiamo visto quali possono essere le soluzioni di un'equazione omogenea: se il dato f deve risolvere l'equazione $Q(D)f = 0$, f dovrà essere una funzione di quelle elencate nel paragrafo precedente.
Ad esempio, se $f(t) = e^t$ l'annichilatore è dato da $Q(D) = D - 1$, e lo stesso sarà per $c\,e^t$ con $c \neq 0$. Vediamo un elenco di possibili dati e dei corrispondenti annichilatori:

funzione	annichilatore
t^k	D^{k+1}
$t^k e^{\alpha t}$	$(D-\alpha)^{k+1}$
$\left.\begin{array}{r} t^k \cos\beta t \\ t^k \operatorname{sen}\beta t \end{array}\right\}$	$(D^2+\beta^2)^{k+1}$
$\left.\begin{array}{r} t^k\, e^{\alpha t} \cos\beta t \\ t^k\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t \end{array}\right\}$	$(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^{k+1}$

dove si osservi che

$$D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2 = \big(D - (\alpha + i\beta)\big)\big(D - (\alpha - i\beta)\big)\,.$$

Gli annichilatori elencati sopra valgono anche per le medesime funzioni moltiplicate per una costante (diversa da zero) e inoltre valgono per ogni $k \in \mathbf{N}$, per cui anche per $k = 0$, e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Per cui di fatto le espressioni di f date da $t^k\, e^{\alpha t} \cos\beta t$ e $t^k\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t$ sono le più generali e sarebbero sufficienti: infatti considerando $\beta = 0$ si ritrova $t^k\, e^{\alpha t}$, considerando $\alpha = 0$ si ritrova $t^k \cos\beta t$, considerando $\alpha = \beta = 0$ si ritrova t^k. Nei casi in cui $\beta = 0$ l'annichilatore però ha grado più alto di quello ottimale: di questo ci si può accorgere considerando, ad esempio, la funzione

$$t^k \cos \beta t = t^k \qquad \text{per } \beta = 0.$$

Osservazione 6.1. - È facile verificare (lo si faccia per esercizio) che se al posto di t^k si sostituisce un generico polinomio di grado k gli annichilatori rimangono gli stessi.

Esempi

5 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t}\,.$$

Si è già visto nell'esempio 1 che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per trovarne una dell'equazione data usiamo il metodo degli annichilatori. Poiché e^{-t} è annichilato da $Q(D) = D + 1$ andremo a cercare una soluzione dell'equazione non omogenea $u'' - 3u' + 2u = e^{-t}$ tra tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(D + 1)(D^2 - 3D + 2)u = 0\,,$$

cioè tra tutte le funzioni del tipo

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + c_3\, e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

In realtà per trovare una soluzione dell'equazione è sufficiente limitarci a quelle del tipo

$$v(t) = c_3\, e^{-t}\,,$$

come già fatto osservare in (21), visto che le $c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}$ risolvono l'omogenea. Derivando v si ottiene

$$v'(t) = -c_3\, e^{-t}\,, \qquad\qquad v''(t) = c_3\, e^{-t}\,,$$

per cui inserendo questi dati nell'equazione si ottiene

$$c_3\, e^{-t} + 3\, c_3\, e^{-t} + 2\, c_3\, e^{-t} = e^{-t}$$

da cui $c_3 = 1/6$. Le soluzioni dell'equazione data sono allora tutte e sole le funzioni

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

6 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3\, t\, e^{-t}\,.$$

L'annichilatore per tale dato è $Q(D) = (D+1)^2$. Le soluzioni di $u'' - 3u' + 2u = t\,e^{-t}$ vanno cercate fra le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$(D+1)^2(D^2 - 3D + 2)u = 0\,.$$

Cerchiamo una soluzione fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\,e^{-t} + c_4\,t\,e^{-t}\,, \qquad\qquad c_3, c_4 \in \mathbf{R}\,.$$

Derivando v si ottiene

$$\begin{aligned} v'(t) &= -c_3\,e^{-t} + c_4\,e^{-t} - c_4\,t\,e^{-t}\,,\\ v''(t) &= c_3\,e^{-t} - c_4\,e^{-t} - c_4\,e^{-t} + c_4\,t\,e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} &c_3\,e^{-t} - c_4\,e^{-t} - c_4\,e^{-t} + c_4\,t\,e^{-t} +\\ &\qquad - 3\big(-c_3\,e^{-t} + c_4\,e^{-t} - c_4\,t\,e^{-t}\big) +\\ &\qquad\qquad + 2\big(c_3\,e^{-t} + c_4\,t\,e^{-t}\big) = 3\,t\,e^{-t} \end{aligned}$$

da cui $c_3 = 5/12$ e $c_4 = 1/2$. Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\,e^{t} + c_2\,e^{2t} + \frac{5}{12}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,t\,e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

7 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3\,t^4 + t\,.$$

L'annichilatore del dato $3\,t^4 + t$ è D^5. Cerchiamo una soluzione tra le soluzioni dell'omogenea

$$D^5(D^2 - 3D + 2)u = 0\,. \tag{22}$$

Si osservi che le radici sono 0, con molteplicictà 5, e 1 e 2 con molteplicità 1.
Cerchiamo una soluzione tra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\,t^4 + c_4\,t^3 + c_5\,t^2 + c_6\,t + c_7$$

che sono tutte le possibili soluzioni dell'omogenea (22) senza considerare le soluzioni di $(D^2 - 3D + 2)u = 0$. Derivando si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= 4\,c_3\,t^3 + 3\,c_4\,t^2 + 2\,c_5\,t + c_6\,,\\ v''(t) &= 12\,c_3\,t^2 + 6\,c_4\,t + 2\,c_5\,. \end{aligned}$$

Inserendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} &12\,c_3\,t^2 + 6\,c_4\,t + 2\,c_5 - 3\big(4\,c_3\,t^3 + 3\,c_4\,t^2 + 2\,c_5\,t + c_6\big) +\\ &\qquad + 2\big(c_3\,t^4 + c_4\,t^3 + c_5\,t^2 + c_6\,t + c_7\big) = 3\,t^4 + t \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\begin{cases} 2\,c_3 = 3 \\ -12\,c_3 + 2\,c_4 = 0 \\ 12\,c_3 - 9\,c_4 + 2\,c_5 = 0 \\ 6\,c_4 - 6\,c_5 + 2\,c_6 = 1 \\ 2\,c_5 - 3\,c_6 + 2\,c_7 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano

$$c_3 = \frac{3}{2}\,, \quad c_4 = 9\,, \quad c_5 = \frac{63}{2}\,, \quad c_6 = 68\,, \quad c_7 = \frac{141}{2}\,.$$

Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + \frac{3}{2}\,t^4 + 9\,t^3 + \frac{63}{2}\,t^2 + 68\,t + \frac{141}{2}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

8 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^t\,.$$

Questo caso, che sembra molto simile all'esempio 5, mette bene in evidenza come bisogna procedere.
Poiché in questo caso l'annichilatore è $Q(D) = D - 1$ e il polinomio Q ha come radice 1, che è anche radice di $P(D) = D^2 - 3D + 2$, e poiché le soluzioni vanno cercate tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)u = 0\,,$$

guardando le radici del polinomio QP si ha che 1 ha molteplicità 2. Questo ci dice che le soluzioni dell'omogenea di terzo grado $Q(D)P(D)u = 0$ sono del tipo

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + c_3\,t\,e^t\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Scartando $c_1\,e^t + c_2\,e^{2t}$ che risolvono l'omogenea andiamo a cercare una soluzione della non omogenea tra le funzioni del tipo

$$c_3\,t\,e^t$$

(e non $c_3\,e^t$!). Chiamando $v(t)$ la funzione $c_3\,t\,e^t$ e derivando si ottiene

$$v'(t) = c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,, \qquad v''(t) = 2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,.$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t - 3\,c_3\,e^t - 3\,c_3\,t\,e^t + 2\,c_3\,t\,e^t = e^t$$

da cui $c_3 = -1$. Le soluzioni sono quindi

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} - t\,e^t\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

9 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t} + e^t\,.$$

Ricordando il terzo punto dell'Osservazione 4.1 per trovare tutte le soluzioni si procede prima cercando quelle dell'omogenea, poi una soluzione dell'equazione $u'' - 3u' + 2u = e^{-t}$, poi una soluzione dell'equazione $u'' - 3u' + 2u = e^t$ e infine sommando tutto. Utilizzando gli esercizi precedenti possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni è dato da

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t} - t\, e^t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

10 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = \operatorname{sen} t\,.$$

Cominciamo con il risolvere l'equazione omogenea, che possiamo riscrivere come $(D^2 + 1)y = 0$. Il polinomio $D^2 + 1$ ha come zeri i e $-i$ per cui le soluzioni dell'omogenea sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,. \tag{23}$$

Poiché l'annichilatore di $f(t) = \operatorname{sen} t$ è $Q(D) = D^2 + 1$ dobbiamo cercare una soluzione dell'equazione data tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = (D^2 + 1)^2 y = 0\,.$$

In questo caso le radici del polinomio $(D^2+1)^2$ sono i e $-i$ con molteplicictà 2, per cui una soluzione dell'equazione va ricercata fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t.$$

A priori vanno considerate anche le funzioni in (23), ma poiché risolvono l'equazione omogena $y'' + y = 0$ qualunque c_1 e c_2 andranno bene, mentre le costanti c_3 e c_4 vanno determinate. Derivando

$$\begin{aligned} v'(t) &= c_3 \cos t - c_3\, t \operatorname{sen} t + c_4 \operatorname{sen} t + c_4\, t \cos t\,, \\ v''(t) &= -\, c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ &\qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t\,. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &- c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ &\qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t + \\ &\qquad\qquad + c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

da cui $c_3 = -1/2$ e $c_4 = 0$. Le soluzioni cercate sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}\, t \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

11 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = t\, e^t \operatorname{sen} 2t\,.$$

Dall'esempio precedente sappiamo che le soluzioni dell'omogenea sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Un annichilatore per il dato è l'operatore

$$Q(D) = (D^2 - 2D + 5)^2\,.$$

Cerchiamo una soluzione tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = 0\,,$$

dove $P(D) = D^2 + 1$, trascurando le soluzioni dell'omogenea. Poiché il polinomio Q non ha radici in comune con il polinomio P possiamo limitarci a cercare tra le soluzioni dell'equazione

$$Q(D)y = 0\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_4\, e^t \cos 2t + c_5\, t\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_6\, t\, e^t \cos 2t$$

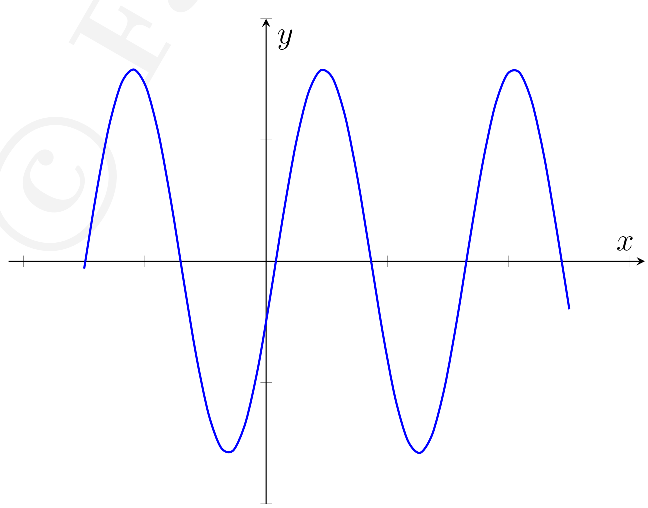
con $c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$. Derivando e inserendo nell'equazione si trovano i valori di c_3, c_4, c_5, c_6.

Oscillatore armonico - Vediamo ora alcuni esempi di moto armonico.

<u>Moto armonico semplice</u> Risolviamo l'equazione

$$u'' + \omega^2 u = 0, \qquad \omega \in \mathbf{R}, \quad \omega \neq 0.$$

Le soluzioni sono $u(x) = c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x$. Un possibile grafico è riportato in figura.



Osservazione Si può mostrare che esistono $k, \alpha \in \mathbf{R}$ tali che

$$c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x = k \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$$

(oppure $k \cos(\omega x + \beta)$). Infatti scrivendo

$$k \operatorname{sen}(\omega x + \alpha) = k \cos \alpha \operatorname{sen} \omega x + k \operatorname{sen} \alpha \cos \omega x$$

da cui

$$\begin{cases} k \cos \alpha = c_1, \\ k \operatorname{sen} \alpha = c_2. \end{cases}$$

Questo sistema si risolve considerando $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c_2}{c_1} \qquad \text{e poi} \qquad k = \frac{c_1}{\cos \alpha} \quad \text{oppure} \quad k = \frac{c_2}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

<u>Moto armonico smorzato</u> Risolviamo l'equazione

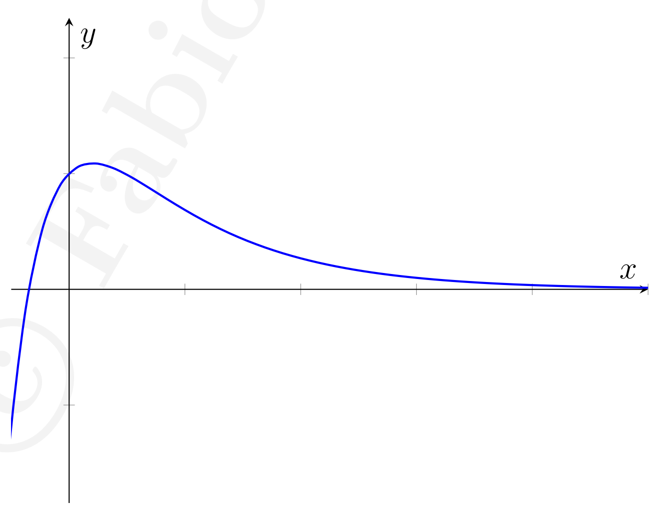
$$u'' + 2ku' + \omega^2 u = 0, \qquad \omega \in \mathbf{R}, \quad \omega \neq 0, \quad k > 0.$$

Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2$ ...

1°) <u>caso $k^2 > \omega^2$</u>
... ha come radici $\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2}$ e $\lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$
da cui le soluzioni

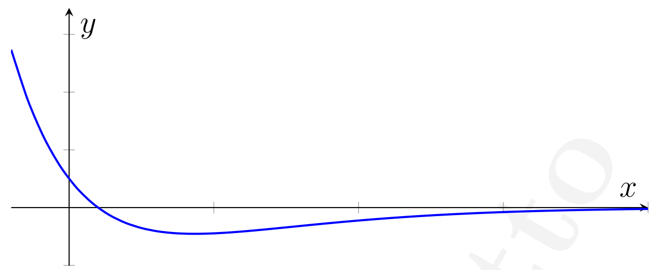
$$u(x) = c_1 e^{(-k+\sqrt{k^2-\omega^2})x} + c_2 e^{(-k-\sqrt{k^2-\omega^2})x}.$$

In figura un esempio in cui $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$.



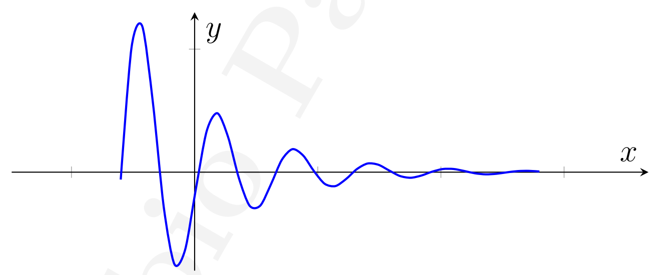
2°) <u>caso $k^2 = \omega^2$</u>
... ha come radice $-k$ con molteplicità 2. Le soluzioni sono

$$u(x) = e^{-kx}(c_1 + c_2 x).$$



3°) <u>caso $k^2 < \omega^2$</u>
... ha due radici complesse coniugate. Le soluzioni sono

$$u(x) = e^{-kx}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - k^2} x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - k^2} x).$$



<u>Moto armonico forzato</u> Risolviamo l'equazione

$$u'' + \omega^2 u = \cos \omega_o x, \qquad \omega, \omega_o \in \mathbf{R}, \quad \omega \neq 0.$$

Le soluzioni dell'omogenea sono $u(x) = c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x$.
$\boxed{\omega_o \neq \omega}$ Cerchiamo una soluzione del tipo

$$v(x) = c_3 \operatorname{sen} \omega_o x + c_4 \cos \omega_o x.$$

Derivando

$$v'(x) = c_3\, \omega_o \cos \omega_o x - c_4\, \omega_o \operatorname{sen} \omega_o x,$$

$$v''(x) = -c_3\, \omega_o^2 \operatorname{sen} \omega_o x - c_4\, \omega_o^2 \cos \omega_o x.$$

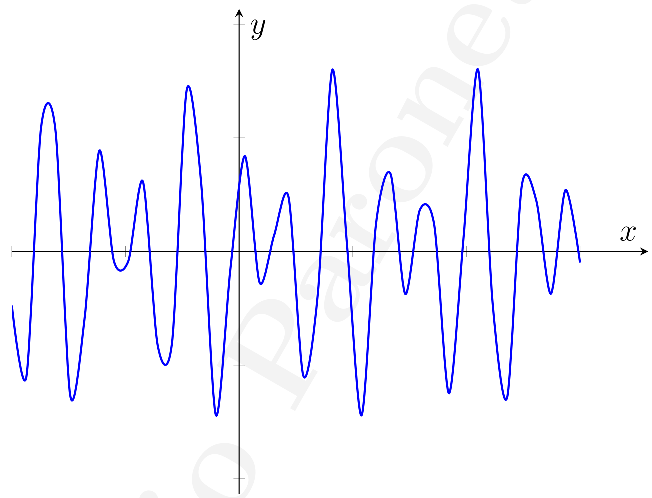
Inserendo v, v', v'' nell'equazione si ottiene

$$v(x) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_o^2} \cos \omega_o x$$

e quindi tutte le soluzioni sono

$$u(x) = c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x + \frac{1}{\omega^2 - \omega_o^2} \cos \omega_o x.$$

In figura un possibile grafico.



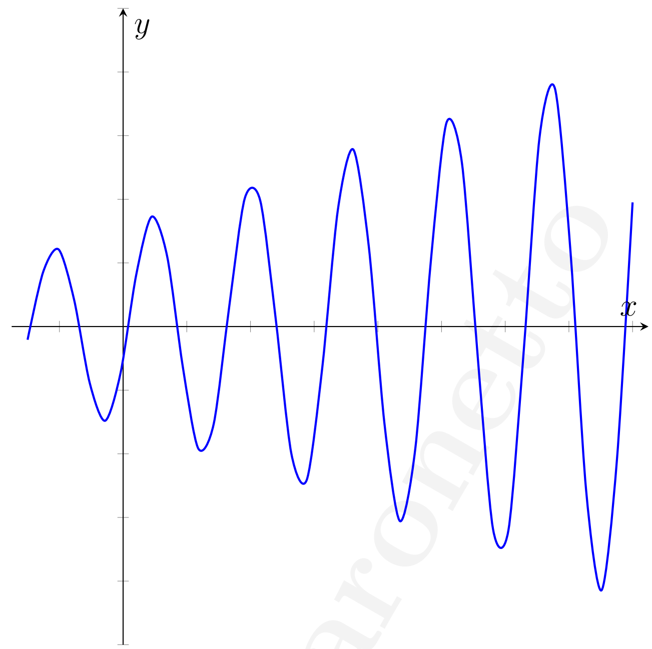
$\boxed{\omega_o = \omega}$ In questo caso cerchiamo una soluzione del tipo

$$v(x) = c_3\, x \operatorname{sen} \omega_o x + c_4\, x \cos \omega_o x.$$

Derivando ed inserendo nell'equazione si ottengono $c_4 = 0$ e $c_3 = 1/2\omega$ per cui le soluzioni sono

$$u(x) = c_1 \operatorname{sen} \omega x + c_2 \cos \omega x + \frac{1}{2\omega}\, x \operatorname{sen} \omega x$$

il cui grafico è riportato in figura.



Si osservi come le oscillazioni si amplifichino anziché smorzarsi o rimanere costanti. È il fenomeno della risonanza.

<u>Moto armonico smorzato forzato</u> Risolviamo l'equazione

$$u'' + 2ku' + \omega^2 u = \cos \omega_o x, \qquad \omega, \omega_o \in \mathbf{R},\ \omega \neq 0,\ k > 0.$$

Vanno distinti i casi $\omega_o \neq \omega$ e $\omega_o = \omega$, e $k^2 > \omega^2$, $k^2 = \omega^2$, $k^2 < \omega^2$.