1 - Teoria degli insiemi e logica

Ultimo aggiornamento: 30 settembre 2023

1. Premessa

Un insieme è una collezione di oggetti. Si hanno sostanzialmente due modi per descrivere un insieme: il primo è elencarne tutti gli elementi, il secondo è quello di considerare l'insieme dato come un sottoinsieme di un altro insieme, fatto di elementi di questo secondo insieme che verificano una certa proprietà, cioè

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}\,, \qquad A = \{x \in X \mid P(x)\}\,. \tag{1}$$

La seconda scrittura si legge: A è l'insieme di tutti gli elementi x appartenenti ad X tali che valga $P(x)$ (o che soddisfano $P(x)$).
Si osservi che nel primo caso l'insieme deve contenere un numero finito di elementi, diversamente non potrei elencarli tutti.
Nel secondo caso devo specificare che l'insieme A è fatto di <u>elementi di X</u> che godono di una certa proprietà. Ad esempio consideriamo $X = \mathbf{R}$ (insieme dei numeri reali) e $P(x)$ la proprietà $x \leqslant 3$: si ha

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 3\}\,.$$

Di conseguenza per definire un insieme A devo conoscere, e quindi aver definito precedentemente, un altro insieme X. Senza specificare che A è fatto di elementi di X che godono di una certa proprietà potrei incorrere in definizioni prive di senso (per i più curiosi: si veda il paradosso di Russel).

Alcuni insiemi che vedremo e utilizzeremo saranno $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Con $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{N}^*$ si indicano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali e lo stesso insieme privato dello 0 (analogamente si indicheranno $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$):

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \qquad \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

con $\mathbf{Z}$ l'insieme dei numeri interi

$$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\},$$

con $\mathbf{Q}$ l'insieme dei numeri razionali

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

Si è già barato. Dove?
Prima di girare pagina per vedere la risposta si provi a pensarci da soli.

Risposta: per descrivere l'insieme **Q** abbiamo scritto semplicemente: gli elementi $\frac{p}{q}$, senza specificare cosa siano

In realtà c'è un terzo modo, che è quello di "costruire" un insieme a partire da assiomi.

Se non si utilizza uno dei due modi visti in (1) per definire un insieme bisogna costruirlo. Poiché l'insieme dei numeri naturali non ha cardinalità finita non è possibile elencare tutti i suoi elementi e non abbiamo (ancora) a disposizione un insieme più grande di **N** tramite il quale definire **N**.
L'insieme dei naturali va quindi definito (cosa che noi non faremo) ed è possibile farlo tramite il concetto di cardinalità (insiemi equipotenti) e alcuni assiomi (assiomi di Peano).
Analogamente vanno definiti gli insiemi **Z**, a partire da **N**, e **Q**, a partire da **N** e **Z**.
Noi daremo per noti questi insiemi e non ci soffermeremo sulla costruzione e definizione di tali insiemi.
Vedremo più avanti invece come costruire l'insieme dei numeri reali **R**.

2. Un po' di insiemistica

Un **insieme** è una collezione di oggetti.

Se A è un insieme e a è un elemento di A, per denotare che a appartiene ad A si scrive

$$a \in A$$

(il simbolo $\in$ si legge *appartiene, appartengono*, il simbolo $\notin$ si legge *non appartiene, non appartengono*)

Un **sottoinsieme** B di A è un insieme tale che ogni elemento di B appartiene anche ad A. Per denotare che B è un sottoinsieme di A si scrive

$$B \subseteq A \quad (B \text{ è contenuto in } A).$$

Per denotare che B è un sottoinsieme *proprio* di A, cioè B è diverso da A talvolta si scrive

$$B \subset A \quad (B \text{ è contenuto propriamente in } A).$$

Operazioni con gli insiemi

$A \cup B$ è l'insieme unione di A e B, dato dagli elementi che appartengono all'insieme A oppure all'insieme B

$A \cap B$ è l'insieme intersezione di A e B, dato dagli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B

$A \setminus B$ è l'insieme dato dagli elementi che appartengono all'insieme A, ma non all'insieme B

$A \times B$ è l'insieme dato dagli elementi coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

Le operazioni di unione ed intersezione sono, in qualche senso, commutative. Così non è per la sottrazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A\,.$$

Esempio - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

Dati A e B insiemi si vuole che $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ siano insiemi. Ma nel caso particolare che A e B non abbiano elementi in comune cos'è $A \cap B$? Se $A \subseteq B$ che cos'è $A \setminus B$? Affinché questi siano insiemi c'è la necessità di introdurre uno speciale insieme.

Insieme vuoto: si denota con il simbolo $\emptyset$. Devo ammettere l'esistenza di un insieme che non contiene alcun elemento e che chiamo insieme vuoto. In tal modo si dà un senso ai due esempi precedenti.

Si noti che vi è differenza tra a e $\{a\}$: $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$, cioè

$$a \text{ è un elemento di } A\,, \qquad \{a\} \text{ è un sottoinsieme di } A\,.$$

Complementare di un insieme - Dato un insieme A pensato come sottoinsieme di un insieme X si definisce complementare di A in X l'insieme

$$A^c := X \setminus A.$$

Solitamente si dice semplicemente complementare di A se dal contesto risulta chiaro chi sia X.

Insieme delle parti - Dato un insieme A si denota con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. Esempio: se

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

allora

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\Big\}$$

Per un insieme che ha *cardinalità* finita, cioè che contiene un numero finito di elementi, la cardinalità dell'insieme delle parti di A è

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}.$$

3. Un po' di logica

Simbologia

Connettivi logici

$\vee$	oppure (il *vel* latino)
$\wedge$	e (l'*et* latino)
$\neg$	negazione
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	equivale

Proposizione: affermazione di cui si può discutere (decidere) la verità
Esempio: P è "oggi è lunedì"

Predicato: proposizione che dipende da uno o più parametri
Esempio: $P(x)$ è "$x \leqslant 3$ $(x \in \mathbf{R})$ "

Se fissiamo il valore del (o dei) parametro $P(x)$ diventa una proposizione.
Esempio: $P(2)$ è "$2 \leqslant 3$ "

Con P e Q denotiamo due proposizioni: tramite i connettivi possiamo costruire altre proposizioni

$P \vee Q$	è una proposizione che è vera se è vera P, se è vera Q, se sono vere entrambe
$P \wedge Q$	è una proposizione che è vera se sono vere sia P che Q
$\neg P$	è una proposizione che è vera se P non è vera

A volte si riassumono le considerazioni che abbiamo appena fatto con le seguenti tabelle di verità:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ESEMPI - Date le proposizioni P "6 è pari", Q "-1 è positivo" si ha

1. $\neg P$ = "6 non è pari"
2. $P \vee Q$ = "6 è pari oppure -1 è positivo"
3. $P \wedge Q$ = "6 è pari e -1 è positivo"

Per completezza

- P è vera
- $\neg P$ è falsa
- Q è falsa
- $P \vee Q$ è vera
- $P \wedge Q$ è falsa

Dal punto di vista insiemistico il connettivo $\vee$, cioè "o", corrisponde all'**unione**; il connettivo $\wedge$, cioè "e", corrisponde all'**intersezione**.
Ad esempio, siano $P(x)$ la proposizione "x è pari" e $Q(x)$ la proposizione "x è positivo" dove x è un numero intero. Ricordo: l'insieme degli interi $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 \dots\}$ e l'insieme dei numeri pari è $\{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$.

Se consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x)\} &= A \text{ (l'insieme dei numeri pari)} \\
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, Q(x)\} &= B \text{ (l'insieme dei numeri interi positivi)}
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \vee Q(x)\} &= A \cup B \\
\{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \wedge Q(x)\} &= A \cap B
\end{aligned}$$

Altro esempio: risolviamo la disequazione ($x \in \mathbf{R}$)

$$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\,.$$

Per quali x è soddisfatta tale disequazione? Risolvendo per via grafica, risolvendo prima l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ si ottengono i valori che appartengono all'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geqslant 3\}$, cioè

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2 \vee x \geqslant 3\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2 \text{ oppure } x \geqslant 3\}\,.$$

Attenzione!!! È meglio non scrivere l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geqslant 3\}$ come

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2,\ x \geqslant 3\}.$$

Questo infatti indica

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 2 \text{ e } x \geqslant 3\}$$

e quest'ultimo è l'insieme vuoto! Non c'è infatti alcun numero che sia minore o uguale a 2 e maggiore o uguale a 3.

Risolviamo (solo per scopi didattici) in altro modo la disequazione

$$(x-2)(x-3) \geqslant 0$$

studiando il segno di $x-2$ e $x-3$ separatamente. Si conclude che $(x-2)(x-3) \geqslant 0$ nell'insieme dove entrambi (*et*, $\wedge$, $\cap$) i fattori sono non negativi oppure (*vel*, $\vee$, $\cup$) dove entrambi (*et*, $\wedge$, $\cap$) i fattori sono non positivi, cioè

$$\Big(\{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 2\} \cap \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 3\}\Big) \cup \Big(\{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2\} \cap \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 3\}\Big)$$

che è come dire che

$$x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 2 \text{ e } y \geqslant 3\} \text{ oppure } x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2 \text{ e } y \leqslant 3\} =$$

$$= x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \geqslant 3\} \text{ oppure } x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2\} =$$

$$= x \in \{y \in \mathbf{R} \,|\, y \leqslant 2 \text{ oppure } y \geqslant 3\}$$

Il connettivo $\neg$ dal punto di vista insiemistico: dal punto di vista insiemistico la negazione di una proposizione può essere legata alla sottrazione tra insiemi o, più propriamente, al concetto di **complementare** di un insieme A in un altro insieme X che lo contiene, bisogna però specificare chi sia l'insieme X.
Ad esempio, se la proposizione P è "oggi è il 1° ottobre" allora la proposizione $\neg P$ è vera se la data di oggi è diversa dal primo ottobre (si hanno 364 scelte che rendono vera $\neg P$ e una sola che rende vera P). Ma in questo caso si sottointende che l'insieme preso in considerazione è quello dei possibili giorni dell'anno.
Se si considera la proposizione

P Mario è uno studente di ingegneria meccanica del primo anno

la proposizione $\neg P$ è semplicemente "Mario non è uno studente di ingegneria meccanica del primo anno", ma andrebbe chiarito il contesto. Cioè se denotiamo con M Mario, con A l'insieme degli studenti del primo anno di ingegneria meccanica dell'Università di Padova e X un insieme che contiene A allora

$$P \quad \text{è la proposizione "} M \in A \text{"}$$
$$\neg P \quad \text{è la proposizione "} M \in X \setminus A \text{"}.$$

Ma non abbiamo detto chi è X: se vogliamo specificare bene $\neg P$ bisogna dire chi è X.
Esempi: X potrebbe essere l'insieme degli studenti del primo anno di ingegneria a Padova oppure l'insieme degli studenti del primo anno iscritti

all'ateneo di Padova, l'insieme di tutti gli studenti di ingegneria a Padova, l'insieme degli studenti di ingegneria in Italia, e così via.
Ultimo esempio: sia A l'insieme definito da

$$A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geqslant 10\}.$$

Detto $P(x)$ il predicato $x \geqslant 10$ si ha che $\neg P(x)$ è il predicato $x < 10$ e quindi

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x < 10\} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \neg P(x)\} = \mathbf{R} \setminus A.$$

In questo caso è chiaro cosa significa $\neg P$ perché l'insieme ambiente è $\mathbf{R}$, per cui non essere maggiori o uguali a 10 significa "essere un numero reale minore di 10".

Altri connettivi sono $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ con i quali, date P e Q, si possono generare altre proposizioni.

$P \Rightarrow Q$ si legge "P implica Q" o "da P segue Q" o "Q è vera se è vera P" o "se (sottointeso: è vera) P allora (sottointeso: è vera) Q" o ancor più brevemente o "Q se P".
A volte si legge anche "P è condizione *sufficiente* affinché valga Q".
Tale proposizione può essere letta anche mettendo in evidenza la proposizione Q nel senso seguente: "P solo se Q" oppure "Q è condizione *necessaria* affinché valga P".

$P \Leftrightarrow Q$ "P è equivalente a Q" oppure "P è vera se e solo se è vera Q". A volte si legge anche "P è condizione *necessaria e sufficiente* affinché valga Q:
$P \Rightarrow Q$ è: "P solo se Q" oppure
"P è condizione *sufficiente* affinché valga Q
$P \Leftarrow Q$ è: "P se Q" oppure
"P è condizione *necessaria* affinché valga Q

Osservazione - Per mostrare che P e Q sono equivalenti bisogna mostrare che valgono entrambe le affermazioni: $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Implicazione - Date due proposizioni P e Q si può costruire la proposizione $P \Rightarrow Q$. Come fare a verificare la verità di $P \Rightarrow Q$?

Osservazione - Si faccia attenzione al fatto che quando ci si chiede se $P \Rightarrow Q$ sia vera o meno non si discute della verità di P, e neanche di quella di Q. Esempio: siano $P(x, y)$ l'affermazione $x < y$ e $Q(x, y)$ l'affermazione $x + 1 < y + 1$. È evidente che l'affermazione

$$P(x, y) \implies Q(x, y) \qquad \text{è vera.}$$

Si osservi che però se $x = 5$ e $y = 4$ l'affermazione $P(5, 4) \Rightarrow Q(5, 4)$ risulta vera nonostante $P(5, 4)$ sia falsa.

Di conseguenza la verità di $P \Rightarrow Q$ prescinde dalla verità di P.

Esempio - Vediamo un altro esempio. Siano P l'affermazione "piove" e Q l'affermazione "esco con l'ombrello". Allora l'affermazione "se piove esco con l'ombrello" risulta falsa solo nel caso in cui piova ed io esco senza ombrello.

Di seguito presentiamo la tabella di verità della proposizione $P \Rightarrow Q$ che risulta falsa solo quando Q è falsa e P è vera (come visto nell'esempio precedente):

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Alla base della tabella di verità di $P \Rightarrow Q$ c'è il fatto che partendo da un'assunzione falsa si può dedurre qualunque cosa (una cosa vera e anche una cosa falsa).
A tal proposito riportiamo un aneddoto riguardante Bertrand Russel, al quale fu chiesto di mostrare questo fatto con un esempio. La domanda che gli fu fatta sembra sia: partendo da $1 = 2$ mi mostri che lei e Napoleone siete la stessa persona. Russel rispose dicendo "io e Napoleone siamo due persone, ma $2 = 1$ quindi io sono Napoleone".

Diciamo che **una proposizione** P **è falsa** se $\neg P$ è vera. La sua tabella di verità è la seguente

P	$\neg P$
V	F
F	V

Si noti che la proposizione

$$P \Rightarrow Q \qquad \text{è equivalente a} \qquad \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Ci si rende conto della cosa provando a scriverne la tabella di verità: come si può osservare la terza colonna è la stessa della tabella di verità di $P \Rightarrow Q$.

$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

Esempio - Riprendendo l'esempio di prima, cioè P è l'affermazione "piove" e Q l'affermazione "esco con l'ombrello", come detto prima $P \Rightarrow Q$ è "se piove esco con l'ombrello". Si osservi come se io esco con l'ombrello non si può dire se piove o meno, ma se esco senza ombrello ($\neg Q$) sicuramente non piove ($\neg P$), cioè $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Vediamo ora un'altra proposizione equivalente a $P \Rightarrow Q$. Scriviamo la tabella di verità di $\neg P \vee Q$ in dipendenza di P e Q osservando che se $\neg P$ è vera allora P è falsa e viceversa, se $\neg P$ è falsa allora P è vera e viceversa:

$\neg P$	Q	$\neg P \vee Q$
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	F	V

P	Q	$\neg P \vee Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si osservi come questa sia la stessa di $P \Rightarrow Q$. Possiamo quindi affermare che

$$\boxed{P \Rightarrow Q \text{ è vera se e solo se } \neg P \vee Q \text{ è vera}} \quad (*)$$

L'obiettivo che ci prefiggiamo è **imparare a negare qualche proposizione**, perciò volendo si può saltare la parte scritta più in piccolo, inserita per completezza, e passare oltre, oppure continuare (gli esempi che seguono sono a commento di $(*)$).

Esempio - Un caso particolare è il caso della tautologia, cioè se $P = Q$.
Si ha che $P \Rightarrow P$ è sempre vero, come lo è $\neg P \vee P$. In questo caso la tabella di verità è

P	P	$P \Rightarrow P$
V	V	V
F	F	V

Osservazione - Da $(*)$ si ritrova che dalla falsità di P si deduce la verità dell'implicazione $P \Rightarrow Q$, indipendentemente dalla verità o falsità di Q.

Esempio - $P(x) = x$ è positivo, $Q(x) = -x$ è negativo.
Allora la proposizione $P(x) \Rightarrow Q(x)$ è vera. Anche usando la definizione si verifica facilmente che, dato $x \in \mathbf{R}$, $\neg P(x) \vee Q(x)$ è

$$(x \text{ non è positivo}) \text{ oppure } (-x \text{ è negativo }) .$$

che è come dire

$$(x \text{ non è positivo}) \text{ oppure } (x \text{ è positivo }) .$$

Dimostrazione di un teorema - Dimostrare un teorema significa avere due affermazioni P e Q, dette rispettivamente *ipotesi* e *tesi*, e mostrare che, supposta P vera, mostrare che anche Q è vera. La cosa si riduce a mostrare che è vera la proposizione

$$P \Rightarrow Q,$$

supponendo che P sia vera. Infatti si può verificare che

$$\Big[P \wedge (P \Rightarrow Q)\Big] \Rightarrow Q$$

è una tautologia, cioè è sempre vera, il che significa che se P è vera e $P \Rightarrow Q$ è vera necessariamente è vera Q. Scriviamo la tabella di verità di $R \Rightarrow Q$ dove con R denotiamo la proposizione $P \wedge (P \Rightarrow Q)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$R = P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$R \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Infatti, essendo $R \Rightarrow Q$ una implicazione, è sempre vera se R è falsa e se sia R che Q sono vere.

Dimostrazione per assurdo - Spesso capita che per dimostrare un teorema che coinvolge due proposizioni, P detta *ipotesi* e Q detta *tesi*, si proceda anziché supporre P vera e mostrare che è vera anche $P \Rightarrow Q$, mostrandone un'altra, $\neg Q \Rightarrow \neg P$, che, come abbiamo visto, è equivalente a $P \Rightarrow Q$.
È ciò che è alla base delle dimostrazioni cosiddette per assurdo. Per questo motivo ora vedremo come si nega una proposizione.

Neghiamo alcune proposizioni semplici

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

EX - Si scrivano le tabelle di verità di $\neg(P \vee Q)$ e di $\neg(P \wedge Q)$.
Se $P(x) =$ "x è pari", $Q(x) =$ "x è positivo" e consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned}
&A = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x)\} \qquad \text{(l'insieme dei numeri pari)}\\
&B = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, Q(x)\} \qquad \text{(l'insieme dei numeri interi positivi)}\\
&A \cup B = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \vee Q(x)\}\\
&A \cap B = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, P(x) \wedge Q(x)\}
\end{aligned}$$

allora

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \neg(P(x) \vee Q(x))\} = (\mathbf{Z} \setminus A) \cap (\mathbf{Z} \setminus B)$$
$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \neg(P(x) \wedge Q(x))\} = (\mathbf{Z} \setminus A) \cup (\mathbf{Z} \setminus B)$$

e leggendo

$$\begin{aligned}
\neg(P(x) \vee Q(x)) &= \neg(x \text{ è un numero pari oppure un numero intero positivo})\\
&= x \text{ non è né un numero intero pari né un numero intero}\\
&\quad\ \text{positivo}\\
\neg(P(x) \wedge Q(x)) &= \neg(x \text{ è un numero pari e un numero intero positivo})\\
&= x \text{ non è un numero intero pari oppure non è un numero}\\
&\quad\ \text{intero positivo}
\end{aligned}$$

Quantificatori

$\forall$	ogni, per ogni
$\exists$	esiste, esistono

Altro simbolo: ! unico, unica

Esempio - Come descrivere l'insieme dei numeri pari? Scriverò

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \exists\, y \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x = 2y\}\,.$$

Analogamente l'insieme dei numeri dispari sarà

$$\{x \in \mathbf{Z} \,|\, \exists\, y \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x = 2y+1\}.$$

Neghiamo ora alcune proposizioni più elaborate

$$\begin{aligned}
&\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q \\
&\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q \\
&\neg(\forall\, x\, P(x)) = \exists\, x\, \neg P(x) \\
&\neg(\exists\, x\, P(x)) = \forall\, x\, \neg P(x) \\
&\neg(\forall\, x\, P(x) \vee Q(x)) = \exists\, x\, \neg P(x) \wedge \neg Q(x) \\
&\neg(P \Rightarrow Q) = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q \\
&\neg(\forall\, x\, P(x) \Rightarrow Q(x)) = \exists\, x\; P(x) \wedge \neg Q(x)
\end{aligned}$$

Esempi

- m è un maggiorante per l'insieme S se per ogni $x \in S$ vale $m \geqslant x$

  Neghiamo "m è un maggiorante per l'insieme S":
  $\neg\,(\forall\, x \in S \text{ si ha } m \geqslant x) = \exists\, x \in S \text{ tale che } m < x$

- f si dice crescente in $\mathbf{R}$ se per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$

  Neghiamo "f è crescente in $\mathbf{R}$":
  $\neg\,(\forall x, y \in \mathbf{R}\,, x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)) = \exists\, x, y \in \mathbf{R}\,, x < y$ tali che $f(x) > f(y)$

- f è continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

  Neghiamo "f è continua in x_0": denotiamo con $P(x)$ la proposizione $|x - x_0| < \delta$ e con $Q(x)$ la proposizione $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Abbiamo

$\neg(\forall\epsilon\ \exists\delta\ (\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x))) = \exists\epsilon\ \forall\delta\ \neg(\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)))$ e questo è $\exists\epsilon\ \forall\delta\ \exists x\ P(x) \wedge \neg Q(x)$

Riscrivendo questa ultima proposizione abbiamo che la negazione di "f è continua in x_0" è

esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste x per cui

$|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \epsilon$.

- si consideri una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (tali funzioni sono dette successioni). Diciamo che tale successione ammette limite $l \in \mathbf{R}$, e si scrive $\lim_{n\to+\infty} f(n) = l$, se

  $\forall\epsilon > 0\,\exists\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\forall n \geqslant \nu$ si ha $|f(n) - l| < \epsilon$.

  Neghiamo tale affermazione:

  $$\begin{aligned}\neg\,(\forall\epsilon > 0\,\exists\nu \in \mathbf{N} \text{ tale che } \forall n \geqslant \nu \text{ si ha } |f(n) - l| < \epsilon) &= \\ = \exists\epsilon > 0\ \forall\nu \in \mathbf{N}\ \neg\,(\forall n \geqslant \nu \text{ si ha } |f(n) - l| < \epsilon) &= \\ = \exists\epsilon > 0\ \forall\nu \in \mathbf{N}\ \exists n \geqslant \nu \text{ tale che } |f(n) - l| \geqslant \epsilon &\end{aligned}$$

  che può anche essere riscritta come segue

$\exists\epsilon > 0\ \forall\nu \in \mathbf{N}$ tale che per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$ si ha $|f(n) - l| \geqslant \epsilon$.

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

  Neghiamo "$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua": denotiamo con $P(x, y)$ la proposizione $|x - y| < \delta$ e con $Q(x, y)$ la proposizione $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Abbiamo

  $$\begin{aligned}\neg\,(\forall\epsilon\ \exists\delta\ (\forall x, \forall y\ P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))) &= \\ &= \exists\epsilon\ \forall\delta\ \neg(\forall x\,\forall y\ P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))) \\ &= \exists\epsilon\ \forall\delta\ \exists x\,\exists y\ P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)\end{aligned}$$

  che è

  esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono x, y per cui

  $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$.