2 - I numeri reali

Ultimo aggiornamento: 4 ottobre 2023

Cominciamo questo capitolo mostrando che esistono numeri che *non* sono razionali. Prima ricordiamo che ogni numero naturale può essere fattorizzato, in maniera unica, come prodotto di primi, cioè dato $n \in \mathbf{N}$ esistono k primi $p_1, \dots p_k$ e k naturali positivi $\alpha_1, \dots \alpha_k$ tali che

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Si osservi allora che la fattorizzazione di una potenza di n contiene esattamente gli stessi primi della fattorizzazione di n, cioè per ogni $m \in \mathbf{N}$ si ha

$$n^m = p_1^{m\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m\alpha_k}. \tag{1}$$

EX - Si fattorizzi il numero 90^7.

Ricordiamo la definizione di coppia di numeri coprimi: si dice che $n, m \in \mathbf{N}$ sono *coprimi* o *primi tra loro* se

$$MCD(n, m) = 1$$

o, equivalentemente, se, date le loro fattorizzazioni

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$
$$m = q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_h^{\beta_h},$$

si ha che

$$p_i \neq q_j, \qquad i \in \{1, \dots k\},\ j \in \{1, \dots h\}$$

Esistono numeri che non sono razionali - Vediamo che il numero $\sqrt{2}$ non è razionale.
Se per assurdo lo fosse esisterebbero due numeri interi positivi, coprimi tra loro, tali che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Allora si avrebbe che

$$2\,q^2 = p^2.$$

Ciò significa in particolare che p^2 è pari, cioè nella sua fattorizzazione compare il numero 2 e, da (1), si deduce che 2 è elevato ad una potenza pari maggiore o uguale a 2, cioè anche p è pari. Di conseguenza

$$p^2 = 4\,m \qquad \text{per un qualche } m \in \mathbf{N}^*.$$

Da ciò si deduce che

$$q^2 = 2m$$

cioè q^2, e quindi q, è pari, ma ciò è impossibile per la scelta fatta di p e q coprimi fra loro.

1. Gli assiomi che caratterizzano $\mathbf{R}$ e soddisfatti anche da $\mathbf{Q}$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ e l'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ soddisfano i seguenti assiomi. Questi assiomi non caratterizzano completamente $\mathbf{R}$ che, per distinguersi da $\mathbf{Q}$, ha bisogno di un altro assioma, detto *di completezza* o di Dedekind.
Se non diversamente detto gli assiomi A1, A2, M1, M2, DM, O1, O2, O3, OA, OM valgono per ogni scelta di $x, y, z \in \mathbf{R}$:

- A1 $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa dell'addizione)
- A2 $x + y = y + x$ (proprietà commutativa dell'addizione)
- A3 esiste un unico elemento, neutro rispetto all'addizione, che denotiamo con 0, tale che $x + 0 = 0 + x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione)
- A4 per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un unico opposto rispetto all'addizione $y \in \mathbf{R}$ tale che $x + y = 0$ $(y = -x)$
- M1 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa della moltiplicazione)
- M2 $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa della moltiplicazione)
- M3 esiste un unico elemento, neutro rispetto alla moltiplicazione, che denotiamo con 1, tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione)
- M4 per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ esiste un unico opposto rispetto alla moltiplicazione (inverso) $y \in \mathbf{R}$ tale che $x \cdot y = 1$ $(y = x^{-1})$
- DM $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione)

  Assiomi che riguardano una relazione d'ordine: (struttura di ordinamento totale)
- O1 per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha $x \leqslant y$ oppure $y \leqslant x$ (dicotomia)
- O2 se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ allora $x \leqslant z$ (proprietà transitiva)
- O3 se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica)
- O4 per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta $x \leqslant x$ (proprietà riflessiva)
- OA se $x \leqslant y$ allora $x + z \leqslant y + z$

OM se $z \geqslant 0$ e $x \leqslant y$ allora $x \cdot z \leqslant y \cdot z$

Per definire i numeri reali manca l'assioma di Dedekind, o di completezza, che sarà visto più avanti. Dagli assiomi appena visti scendono (si possono mostrare) molte proprietà che usiamo spesso facendo semplici calcoli, come ad esempio

$$\text{se per un qualche } x \in \mathbf{R}^* \text{ si ha } x \cdot y = x \cdot z \text{ allora } y = z$$

oppure

$$\text{se } x \cdot y = 0 \text{ allora } x = 0 \text{ o } y = 0$$

Nella sezione di esercizi si possono trovare alcune di queste proprietà dimostrate.

2. Sottoinsiemi di R, estremo superiore, estremo inferiore

Modulo o valore assoluto di un numero reale - Si definisce modulo di un numero reale x la quantità

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si osservi che $|x| = \max\{x, -x\}$

Osservazione 2.1. - Sia $a \geqslant 0$. Allora per ogni $z \in \mathbf{R}$

$$|z| \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad -a \leqslant z \leqslant a.$$

Dimostrazione - ($\Rightarrow$) Se $z \geqslant 0$ in particolare si ha

$$z \geqslant -a.$$

Inoltre

$$z = |z| \leqslant a.$$

Se invece $z < 0$:

$$-z \leqslant a \qquad \Leftrightarrow \qquad z \geqslant -a.$$

D'altra parte

$$z < 0 \leqslant a$$

($\Leftarrow$) Per ipotesi $z \leqslant a$ e inoltre (poiché $-a \leqslant z$) $-z \leqslant a$. Poiché

$$|z| = \max\{z, -z\} \qquad \text{e}$$

si conclude che $|z| \leqslant a$. $\square$

Proprietà di $|\cdot|$.

i) $|x| \geqslant 0$ e $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) $|x| = |-x|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

Dimostrazione - I punti *i*) e *ii*) sono immediati. Vediamo il punto *iii*): poiché $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$ si deduce che

$$x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Analogamente, poichè $-|x| \leqslant x$ e $-|y| \leqslant y$, si ha che

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y.$$

Dall'osservazione 2.1 scegliendo $a = |x| + |y|$ e $z = x + y$ si conclude. □

Osservazione 2.2. - Si osservi che la proprietà *iii*) è equivalente a

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|.$$

Dimostrazione - Se vale *iii*) in particolare si deduce che

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$$

cioè

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

Analogamente si mostra $|y| - |x| \leqslant |x - y|$ da cui la tesi.
Viceversa si supponga che per ogni $\eta, \xi \in \mathbf{R}$ valga

$$\Big||\xi| - |\eta|\Big| \leqslant |\xi - \eta|$$

da cui in particolare si ha $|\xi| \leqslant |\xi - \eta| + |\eta|$. Fissati $x, y \in \mathbf{R}$ consideriamo $\eta = y$ e $\xi = x + y$: si ottiene

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|\,.$$ □

Definizione 2.3 (insieme limitato)**.** *Sia $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \emptyset$. Si dice che*

- X *è* superiormente limitato *se esiste $M \in \mathbf{R}$ tale che $x \leqslant M$ per ogni $x \in X$;*
- X *è* inferiormente limitato *se esiste $m \in \mathbf{R}$ tale che $x \geqslant m$ per ogni $x \in X$;*
- X *è* limitato *se è superiormente limitato ed è inferiormente limitato.*

Una classe speciale di insiemi sono gli intervalli. Dati $a, b \in \mathbf{R}$ si denotano

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\},\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b\},\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x \leqslant b\},\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leqslant x < b\},\\
[a,+\infty) &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geqslant a\},\\
(a,+\infty) &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > a\},\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant a\},\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > a\}.
\end{aligned}
$$

Definizione 2.4 (intorno)**.** *Dati $x_o \in \mathbf{R}$ e $r > 0$ si definisce intorno aperto o palla aperto di centro x_o e raggio r l'intervallo*

$$B_r(x_o) := \{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - x_o| < r\} = (x_o - r, x_o + r).$$

Solitamente si parla di intorno senza specificare "aperto" perché solitamente gli intorni si prendono aperti. Può capitare di voler considerare un intorno di x_o che sia chiuso: si intende

$$[x_o - r, x_o + r] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - x_o| \leqslant r\}.$$

Definizione 2.5 (Insieme aperto e insieme chiuso)**.** *Un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ è aperto se per ogni $x_o \in A$ esiste un intorno aperto di centro x_o contenuto in A, cioè esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_o) \subset A$.*
Un insieme $C \subseteq \mathbf{R}$ è chiuso se il complementare di C, cioè $C^c = \mathbf{R} \setminus C$, è aperto.

Esempi - Dati $a, b \in \mathbf{R}$, gli intervalli

$$(a,b), \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,a) \qquad \text{sono aperti,}$$

gli intervalli

$$[a,b], \quad [a,+\infty), \quad (-\infty,a] \qquad \text{sono chiusi,}$$

gli intervalli

$$(a,b], \quad [a,b) \qquad \text{non sono né aperti né chiusi.}$$

L'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali non è né aperto né chiuso.

Definizione 2.6 (Maggiorante, minorante, massimo, minimo)**.** *Dato $X \subset \mathbf{R}$, $X \neq \emptyset$, si dice che $M \in \mathbf{R}$ è un* maggiorante *per X se*

$$x \leqslant M \qquad \textit{per ogni } x \in X,$$

M si dice massimo di X se M è un maggiorante per X e $M \in X$. Analogamente si dice che $m \in \mathbf{R}$ è un minorante *per X se*

$$m \leqslant x \qquad \textit{per ogni } x \in X,$$

m si dice minimo di X se m è un minorante per X e $m \in X$.

Esempi - R, **Q**, **Z** non ammettono né minoranti, né maggioranti.
N non ammette maggioranti, ma ammette minimo.
$[0,1)$ ha sia minoranti che maggioranti, non ha massimo, ammette minimo.

Osservazione 2.7. -

1) un insieme ammette maggioranti se e solo se è superiormente limitato
2) se un insieme ammette un maggiorante allora ne ammette infiniti
3) il massimo, se esiste, è unico
4) ogni insieme composto da un numero finito di elementi ammette massimo e minimo

Analoghe considerazioni valgono per i minoranti e per il minimo.

Definizione 2.8 (Estremo superiore, estremo inferiore)**.** *Sia* $X \subseteq \mathbf{R}$*,* $X \neq \emptyset$*. Denotiamo con* $\mathcal{M}^X$ *l'insieme dei maggioranti di* X *e con* $\mathcal{M}_X$ *l'insieme dei minoranti di* X (*attenzione! potrebbero essere vuoti*)*. Denotiamo con*

$$\sup X \qquad \textit{(estremo superiore di } X\textit{)},$$

se esiste, il minimo dei maggioranti di X*, con*

$$\inf X \qquad \textit{(estremo inferiore di } X\textit{)},$$

se esiste, il massimo dei minoranti di X*.*

Osservazione 2.9. - L'insieme $\mathcal{M}^X \neq \emptyset$ se e solo se X è superiormente limitato.
L'insieme $\mathcal{M}_X \neq \emptyset$ se e solo se X è inferiormente limitato.

Osservazione 2.10. - Se un insieme X è illimitato superiormente non ammette maggioranti, per cui non ammette estremo superiore in **R**. In questi casi però si definisce

$$\sup X := +\infty.$$

In maniera analoga se X è illimitato inferiormente si ha

$$\inf X := -\infty$$

Accettando queste definizioni si possono anche definire, essendo nel primo caso $\mathcal{M}^X = \emptyset$,

$$\inf \emptyset = +\infty$$

ed essendo nel secondo caso $\mathcal{M}_X = \emptyset$

$$\sup \emptyset = -\infty.$$

L'Assioma di Dedekind o assioma di completezza - A completamento degli assiomi visti nel paragrafo 1 enunciamo l'assioma di completezza:

(D) Ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore (in **R**).

Il significato dell'assioma è che ogni sottoinsieme di **R** superiormente limitato ammette estremo superiore, questo è finito ed è un numero <u>reale</u>.

Equivalentemente si potrebbe enunciare l'assioma nel modo seguente. Non mostreremo l'equivalenza, ma la daremo per scontata, nel senso che daremo per vero anche il seguente enunciato anche se non dimostreremo che discende da (D).

(D′) Ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ non vuoto e inferiormente limitato ammette estremo inferiore (in $\mathbf{R}$).

Approfondimento - C'è un'altro modo di enunciare l'assioma di completezza ed è il seguente: dati $A, B \subset \mathbf{R}$ non vuoti si dice che (A, B) è una *sezione di* $\mathbf{R}$ se

i) $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbf{R}$
ii) $\forall a \in A$ e $b \in B$ si ha $a < b$

Allora di può enunciare l'assioma nel seguente modo:

(D′′) Per ogni sezione (A, B) di $\mathbf{R}$ esiste un unico numero reale L tale che

$$a \leqslant L \leqslant b \qquad \text{per ogni } a \in A, \text{ per ogni } b \in B.$$

Il numero L è detto *elemento separatore*. Esempio: $A = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\}$: 0 è l'elemento separatore.
Rispetto all'assioma (D), dato un sottoinsieme $X \subset \mathbf{R}$ si possono considerare $B = \mathcal{M}^X$ l'insieme dei maggioranti di X e A il suo complementare. Allora l'elemento separatore della sezione (A, B) è l'estremo superiore di X.

Osservazione 2.11. - Sia $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Se $a = \min A$ allora $a = \inf A$. Se $a = \max A$ allora $a = \sup A$.
Dimostrazione - Mostriamo la cosa nel caso in cui $a = \min A$. Sia quindi $a \in A$, $a \leqslant b$ per ogni $b \in A$. In particolare A è inferiormente limitato e quindi ammette estremo inferiore $a' \in \mathbf{R}$. Per definizione $a' \leqslant b$ per ogni $b \in A$ e quindi si ha anche

$$a' \leqslant a.$$

D'altra parte a è un minorante e poiché a' è il massimo dei minoranti si ha

$$a \leqslant a'$$

da cui si conclude. □

Proseguiamo ora con una importante caratterizzazione degli estremi superiore ed inferiore.

Proposizione 2.12. *Sia $X \subset \mathbf{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora*

$$L = \sup X \iff \begin{cases} x \leqslant L & \text{per ogni } x \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X \text{ t.c. } x_\varepsilon > L - \varepsilon. \end{cases}$$

Sia X non vuoto e limitato inferiormente. Allora

$$\ell = \inf X \iff \begin{cases} \ell \leqslant x & \text{per ogni } x \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X \text{ t.c. } x_\varepsilon < \ell + \varepsilon. \end{cases}$$

Dimostrazione - Mostriamo la caratterizzazione dell'estremo superiore, lasciando quella dell'estremo inferiore per esercizio.
($\Rightarrow$) Se $L = \sup X$ allora L è un maggiorante per cui $x \leqslant L$ per ogni $x \in X$. L è anche il minimo dei maggioranti per cui per ogni $\varepsilon > 0$ il numero $L - \varepsilon$,

che è minore di L, non è un maggiorante e quindi esiste $x \in X$ tale che $x > L - \varepsilon$.
($\Leftarrow$) L è un maggiorante e per ogni $\varepsilon > 0$ $L - \varepsilon$ non è un maggiorante (poiché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon > L - \varepsilon$). Di conseguenza L è il più piccolo dei maggioranti. □

Proprietà archimedea dei numeri reali - Dati $x, y \in \mathbf{R}$ con $x > 0$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$n\,x > y.$$

Dimostrazione - se, per assurdo, così non fosse si avrebbe che $nx \leqslant y$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, cioè l'insieme

$$\mathbf{N}x := \{z \in \mathbf{R} \mid z = nx,\ n \in \mathbf{N}\}$$

risulterebbe superiormente limitato. Posto allora $\alpha = \sup \mathbf{N}x$ si ha che $\alpha - x$ non è un maggiorante ($x > 0$). Allora esiste un elemento dell'insieme $\mathbf{N}x$, sia esso nx, tale che

$$nx > \alpha - x$$

cioè

$$(n+1)x > \alpha,$$

ma questo è impossibile perché stiamo supponendo $\mathbf{N}x$ superiormente limitato. □

Una conseguenza della proprietà archimedea - Se $c \geqslant 0$ è tale che $c < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ allora $c = 0$.

Dimostrazione - se, per assurdo, fosse $c > 0$ si avrebbe che, dato $\varepsilon > 0$, esisterebbe $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$nc > \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad c > \frac{\varepsilon}{n}.$$

Chiamando ε' la quantità ε/n si avrebbe $c > \varepsilon'$. ↯ □

Si osservi che si perviene alla stessa conclusione se si ha che $c \leqslant \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Parte intera di un numero reale - Dalla proprietà archimedea si può dedurre il seguente fatto:

per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste (unico) $m \in \mathbf{Z}$ tale che $m \leqslant x < m + 1$.

Il numero intero m è detto *parte intera* di x e si denota con $[x]$.
(Non vediamo la dimostrazione, ma la riportiamo brevemente per i più curiosi).

Dimostrazione - Si consideri prima $x \geqslant 0$. Si consideri l'insieme $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n > x\}$, che è non vuoto per la proprietà archimedea. Di conseguenza tale insieme ammette estremo inferiore, che in realtà è un minimo. Detto $m + 1$ tale minimo si ha ovviamente che

$$x < m + 1.$$

Poiché $m+1$ è il minimo di A si ha che $m \leqslant x$. Se $x < 0$ si può considerare l'insieme $B = \{n \in \mathbf{N} \,|\, n \geqslant -x\}$. Di nuovo, considerando il minimo dell'insieme B e chiamandolo m si ha che

$$-x \leqslant m \qquad \text{e} \qquad m-1 < -x$$

il che è equivalente a

$$-m \leqslant x < -m+1\,.$$

L'intero $-m$ è il numero cercato. □

Esempi: $[7] = 7$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$.

$\boxed{\mathbf{Q} \text{ È DENSO IN } \mathbf{R}}$ cioè per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, esiste $q \in \mathbf{Q}$ tale che $a < q < b$.

(Equivalentemente si può enunciare la densità come segue:
dato $x \in \mathbf{R}$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbf{Q}$ tale che

$$|x - q| < \varepsilon. \quad)$$

Dimostrazione - Consideriamo dapprima $a \geqslant 0$ e $b > a$. Esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{1}{n} < b - a$$

(esiste per la proprietà archimedea), dopodiché si considera

$$m = [na] + 1.$$

Quindi

$$m > na \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{n} > a.$$

D'altra parte

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a$$

e quindi

$$\frac{m}{n} = (m-1)\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$$

quindi m/n è il razionale cercato. Nel caso in cui $a < 0$ e $b \leqslant 0$ si procede come sopra cercando q compreso tra $-b$ e $-a$ e si sceglie poi $-q$. Infine se $a < 0$ e $b > 0$ si sceglie $q = 0$. □

Osservazione 2.13. - Anche l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$.

Mostriamo ora che $\mathbf{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza.

Si consideri l'insieme

$$A = \big\{q \in \mathbf{Q} \,|\, q < 0 \text{ oppure } q^2 \leqslant 2\big\}.$$

L'insieme $A \subset \mathbf{Q}$ non ammette estremo superiore in $\mathbf{Q}$.

Dimostrazione - Prima di tutto verifichiamo che A è superiormente limitato: basta far vedere che un qualunque numero positivo M il cui quadrato sia maggiore di 2 è maggiorante. Se per assurdo non lo fosse si avrebbe $q \in A$

con $q > M$. Di conseguenza q sarebbe positivo e quindi in particolare si avrebbero

$$2 < M^2 < qM < q^2 < 2$$

dove la prima disuguaglianza è dovuta alla scelta di M, la seconda al fatto che $q > M$ ed $M > 0$, la terza ancora al fatto che $q > M$ e che $q > 0$, l'ultima al fatto che $q \in A$ ed è positivo.
Ma tale disuguaglianza è impossibile, quindi esiste almeno un maggiorante.
Sia quindi $L = \sup A$, $L \in \mathbf{R}$. Vogliamo vedere che $L \notin \mathbf{Q}$. Mostreremo che $L > 0$ e che $L^2 = 2$, da cui $L = \sqrt{2}$ per cui non è razionale.
Prima di tutto si osservi che $L > 0$: infatti L non può essere 0 perché ci sono razionale positivi nell'insieme A, ad esempio il numero 1. Di conseguenza L non può nemmeno essere negativo. Per mostrare che $L^2 = 2$ escludiamo che $L^2 < 2$ e che $L^2 > 2$.
Se fosse $L^2 < 2$ si avrebbe che esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$L^2 < \left(L + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Infatti per avere

$$\left(L + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

è sufficiente scegliere n che soddisfa (esiste per la proprietà archimedea proprio perché si sta supponendo $2 - L^2 > 0$)

$$n > \frac{1 + 2L}{2 - L^2}.$$

Infatti

$$n > \frac{1+2L}{2-L^2} \quad \iff \quad 2 > L^2 + \frac{1}{n} + 2\,\frac{L}{n} \quad \text{e} \quad L^2 + \frac{1}{n} + 2\,\frac{L}{n} > L^2 + \frac{1}{n^2} + 2\,\frac{L}{n}$$

quindi

$$n > \frac{1+2L}{2-L^2} \quad \iff \quad \left(L + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Dagli assiomi e dal fatto che $L > 0$ si ha che

$$L^2 < \left(L + \frac{1}{n}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad L < L + \frac{1}{n}.$$

Dalla densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ è possibile trovare un razionale r tale che

$$L < r < L + \frac{1}{n}$$

ed in particolare

$$\begin{array}{lcl} r^2 < \left(L + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 & \Rightarrow & r \in A \\ r > L & \Rightarrow & r \notin A \end{array} \qquad \lightning$$

In modo analogo si esclude che L^2 sia maggiore di 2. $\square$

Definizione 2.14 (Punto di accumulazione)**.** *Dato un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ ed un punto $x_o \in \mathbf{R}$ si dice che x_o è di* accumulazione per A *se per ogni intorno $B_r(x_o)$ (cioè per ogni scelta di $r > 0$) si ha che*

$$A \cap \Big(B_r(x_o) \setminus \{x_o\} \Big) \neq \emptyset.$$

Esempi - L'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme
1. $[0,1]$ è l'intervallo $[0,1]$;
2. $(0,1)$ è l'intervallo $[0,1]$;
3. $(0,1) \cup \{2,3,4\}$ è l'intervallo $[0,1]$;
4. $\mathbf{N}$ è l'insieme vuoto.

EX - Si mostri che $\sup\big((a,b) \cap \mathbf{Q}\big) = \sup(a,b)$.
Si mostri che l'insieme dei punti di accumulazione di $(a,b) \cap \mathbf{Q}$ e di (a,b) è lo stesso.

Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Sia $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Consideriamo la parte intera di a (definita come il più grande intero minore od uguale ad a la quale si denota con $[a]$)

$$n_0 := [a] \in \mathbf{N}\,.$$

Si ha che

$$n_0 \leqslant a < n_0 + 1\,.$$

Definiamo ora $m_0 = a - n_0 \in [0,1)$ e consideriamo

$$n_1 := [10m_0] \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,.$$

Si ha che

$$n_1 \leqslant 10m_0 < n_1 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10} \leqslant m_0 < \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}$$

e quindi, per definizione di m_0,

$$n_0 + \frac{n_1}{10} \leqslant a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}\,.$$

Se ora definiamo

$$m_1 = m_0 - \frac{n_1}{10} = a - n_0 - \frac{n_1}{10} \in \Big[0, \frac{1}{10}\Big)$$

e consideriamo

$$n_2 = [10^2 m_1] \in \{0,1,2,\dots 9\}\,.$$

otteniamo

$$n_2 \leqslant 10^2 m_1 < n_2 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10^2} \leqslant m_1 < \frac{n_1}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

e quindi infine

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leqslant a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\,.$$

Continuando a ragionare in modo analogo possiamo costruire due successioni

$$\begin{aligned} a_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \\ b_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \end{aligned} \qquad \text{con } n_k \in \{0,1,2,\dots 9\}$$

con la proprietà che

$$a_k \leqslant a < b_k\,. \tag{2}$$

Si considerino gli insiemi $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \cup_{k=0}^{+\infty}\{a_k\}$ e $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\} = \cup_{k=0}^{+\infty}\{b_k\}$. Da (2) si deduce che A è limitato superiormente, per cui ammette estremo superiore finito. Proviamo che l'estremo superiore di A è a.
Fissato $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare un $k \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_k > a - \epsilon\,.$$

Ma ciò è equivalente a
$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \epsilon\,.$$
Ma da (2) deduciamo che
$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \frac{1}{10^k}$$
quindi è chiaro che è sufficiente scegliere k in modo tale che valga $1/10^k \leqslant \epsilon$ (questo andrebbe provato; avendo già introdotto i logaritmi, basterebbe scegliere $k \geqslant \log_{10} \epsilon^{-1}$).
In modo analogo si prova che $\inf B = a$.
Se $a < 0$ si può considerare, ad esempio, la decomposizione di $-a$ e poi cambiare di segno.

Osservazione 2.15. - Come prima cosa osserviamo che, per ogni numero reale a, abbiamo costruito una successione (una particolare successione) di numeri *razionali* che approssimano il numero a. Questo mostra in maniera costruttiva che $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$. Si possono costruire infinite successioni di razionali approssimanti il numero a, ma quelle che abbiamo scelto sono quelle che usualmente sono le approssimazioni decimali per difetto e per eccesso

EX - Dato $a \in (0, 1)$ si costruisca un'approssimazione in base 8 anziché in base 10.

Osservazione 2.16. - Altra cosa da osservare è che ogni numero che nella rappresentazione decimale ha solo un numero finito di n_k non nulli è un numero razionale. Non è vero il viceversa!! Ad esempio i numeri la cui parte decimale $(a - [a])$ è periodica sono anch'essi razionali. Si consideri ad esempio il numero
$$a = 0,9999999\ldots = 0,\bar{9}.$$
Vediamo che tale numero è in realtà 1. Se moltiplichiamo per 10 l'uguaglianza di sopra si ha che
$$10a = 9,\bar{9} = 9 + a \qquad \Longrightarrow \qquad 9a = 9 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 1.$$
Se si considera il numero
$$a = 1,3232323232\cdots = 1,\overline{32}$$
la parte decimale ha periodo 2. Moltiplico allora per 10^2 (l'esponente è la lunghezza del periodo) e ottengo
$$10^2 a = 100a = 132,\overline{32} = 131 + a$$
Sottraendo a a $100a$ si ottiene
$$99a = 131 \qquad \text{da cui} \qquad a = \frac{131}{99}\,.$$

Scrivere il numero

$$a = 12,345676767... = 12,345\overline{67}$$

come razionale è meno immediato, ma comunque facile. Moltiplichiamo prima per 10^3 cosicché la parte decimale è totalmente periodica

$$10^3 a = 12345 + 0,\overline{67}$$

dopodiché, chiamando b il numero $10^3 a - 12345$, si ha

$$b = 0,\overline{67} \qquad \Longrightarrow \qquad 10^2 b = 67,\overline{67} = 67 + b$$

da cui

$$10^2(10^3 a - 12345) = 67 + 10^3 a - 12345$$

e infine

$$(10^5 - 10^3)a = 1234500 + 67 - 12345 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{1234500 + 67 - 12345}{10^5 - 10^3}.$$