Serie numeriche

Ultimo aggiornamento: 13 marzo 2020

1. Premessa

Può la "somma di infiniti numeri" dare come risultato una quantità finita? È quello che ci si chiede studiando le serie numeriche. Vediamo un esempio: si consideri la somma (infinita)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

Come si vedrà più avanti scriveremo tale "somma infinita" come

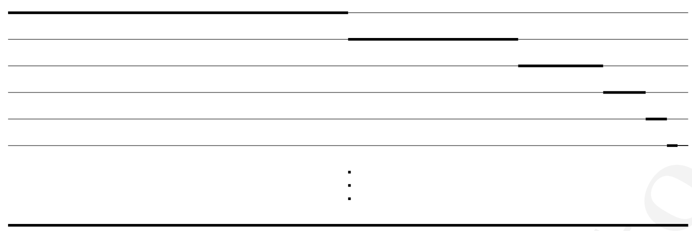
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

La somma appena vista è alla base di uno dei paradossi di Zenone, quello del corridore (analogo a quello di Achille e la tartaruga). Si supponga che un corridore debba compiere un tragitto (un giro di stadio, nel caso di Zenone) e si supponga che il corridore vada a velocità costante. Per compiere tale tragitto il corridore dovrà compiere prima metà del tragitto e per fare ciò impiegherà un certo tempo T. Dopodiché per percorrere la metà del tragitto rimanente (cioè la metà della metà di tutto il tragitto), e poiché corre a velocità costante, impiegherà un tempo $T/2$. Poi percorrerà la metà del tragitto rimanente (cioè la metà di un quarto) in un tempo $T/4$, e così via. Poiché sommiamo infiniti tempi,

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\frac{T}{16}+\cdots,$$

Zenone conclude che il corridore non raggiungerà mai la meta. Forse la questione era più filosofica che matematica, ma alla base c'è anche il fatto che al tempo non ci si era chiesto se "la somma di infiniti numeri" possa dare un risultato finito. Perlomeno (credo) fino ad Archimede.

Vediamo ora graficamente come ci si può convincere che la "somma infinita" (1) dà come risultato un numero (e non $+\infty$).
Come mostrato nella figura sottostante, si consideri un segmento, che supporremo per semplicità di lunghezza 1, disegniamo varie volte tale segmento evidenziando ogni volta una diversa parte del segmento: nel primo caso marchiamo in neretto la prima metà del segmento, che misura $1/2$, poi marchiamo una metà della metà restante, che misura $1/4$, poi la metà della metà rimanente, che misura $1/8$, e così via. Ci si accorge dalla figura che tale somma è, o almeno non supera, 1. Tra breve vedremo che tale somma è proprio 1.



A questo punto, per tornare a Zenone, il tempo che impiega il corridore per giungere alla fine del percorso è
$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \cdots = 2T\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) = 2T\,.$$

Numeri con parte decimale periodica - Vediamo ora un altro esempio, che ha sempre a che fare con le serie, il cui studio stiamo per affrontare. Si consideri il numero
$$\alpha = 0,99999999\cdots = 0,\bar{9}\,.$$
Ci domandiamo: α è minore oppure è uguale ad 1? Proviamo a fare qualche semplice calcolo e moltiplichiamo per 10 il numero α. Otteniamo
$$10\alpha = 9 + \alpha\,.$$
Da questa uguaglianza si deduce che $\alpha = 1$. Il legame con le somme infinite è il seguente:
$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots\,. \tag{2}$$

2. Serie numeriche a termini reali

2.1. Risultati preliminari.

Affronteremo ora lo studio delle serie numeriche a termini reali, ma vedremo alcuni risultati anche per serie a termini complessi. Dapprima vedremo risultati riguardanti serie a termini reali. Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione a valori reali si può definire un'altra successione nel modo seguente:
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
che viene detta successione delle *somme parziali*.

Definizione 2.1 (serie)**.** *Una serie si può identificare con una coppia di successioni*
$$\big(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}\big)$$

dove $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *è una successione data, ed è detta successione dei termini generali, e* $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *rappresenta la successione delle somme parziali. Più spesso e più semplicemente una serie si denota con*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,. \tag{3}$$

A questo punto ha senso chiedersi se il limite

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \tag{4}$$

della successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ esiste con l'ovvia identificazione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n\,.$$

Studiare il **carattere della serie** significa studiare il limite (4).

Definizione 2.2 (carattere di una serie)**.** *Data* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *a valori reali diremo che la serie* (3) *è* convergente *se il limite* (4) *esiste finito.*
Diremo che la serie (3) *è* divergente positivamente (negativamente) *se il limite* (4) *esiste ed è* $+\infty$ $(-\infty)$*.*
Si dice che la serie (3) *è* indeterminata *o* indefinita *o* irregolare *se il limite* (4) *non esiste.*
Talvolta si dice che una serie è regolare *se* (4) *esiste, finito o infinito.*

Abbiamo già intuito che è possibile capire che una somma infinita dà come risultato un numero e anche che sia possibile calcolarlo. Questo non deve trarre in inganno. Non si riesce a calcolare, se non in pochissimi casi, la somma di una serie e ci si deve accontentare di studiarne il carattere; e anche in questo caso spesso bisogna accontantarsi di considerare situazioni particolari.

Una serie a termini reali converge se e solo se il limite (4) esiste finito e ciò è vero se e solo se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy; $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$\big|s_{n+p} - s_n\big| < \epsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N,\ \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Una volta definita la quantità

$$r_{n,p} := s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

possiamo quindi affermare il seguente teorema.

Teorema 2.3 (Criterio di Cauchy)**.** *Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbf{N}} |r_{n,p}| = 0,$$

cioè se e solo se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *è di Cauchy.*

Commento - Il risultato precedente è una caratterizzazione delle serie convergenti, ma risulta poco utile per studiarne il carattere, e anche quando lo è risulta poco pratico. Quello che segue (serie armonica) è un esempio di utilizzo di tale criterio, ma, come vedremo in seguito, la serie che studiamo potrà essere studiata in molti altri modi più immediati.

Commento - Spesso nelle ipotesi dei criteri che vedremo dal prossimo sottoparagrafo supporremo vere alcune ipotesi sui termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ in maniera *definitiva*, cioè vere da un certo $\nu \in \mathbf{N}$ in poi. Che una certa ipotesi sia verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$ o *definitivamente* è equivalente ai fini dello studio del carattere della serie. Quello che conta è il comportamento asintotico di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, come il Teorema 2.3 mostra.

Serie armonica - La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ è detta serie armonica. Possiamo scrivere, e stimare, la sua somma come segue:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \geqslant \\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots = \\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+\quad\left(\frac{1}{2}\right)\quad+\qquad\left(\frac{1}{2}\right)\qquad+\ldots\end{aligned}$$

da cui si deduce che la serie diverge positivamente. Volendo usare il Teorema 2.3 si osservi che

$$s_{2^{n+1}}-s_{2^n}=\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n\ \text{termini}}\geqslant\frac{1}{2}$$

Teorema 2.4. *Condizione necessaria affinché una serie a termini reali* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *sia convergente è che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Dimostrazione - Per ipotesi il limite (4) esiste ed è un numero $s \in \mathbf{R}$. Il generico termine della serie può essere scritto come segue:

$$a_n = s_n - s_{n-1}\,.$$

Ne segue che passando al limite si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.5. - Questo risultato è praticamente inutile per capire se una serie è convergente. È però utile in negativo: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste o non è zero possiamo concludere che la serie non converge.

Esempio 2.6. - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{7n+4}$ non converge. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{7n+4} = \frac{1}{7} \neq 0\,.$$

Possiamo dire qualcosa in più? Certo! Poiché ogni termine è positivo la successione delle somme parziali è strettamente crescente, per cui concludiamo che la serie diverge positivamente.

Serie geometrica - Si consideri $q \in \mathbf{R}$. Vogliamo studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\,. \tag{5}$$

Se $q = 1$ tale somma evidentemente diverge positivamente. Supponiamo ora $q \neq 1$ e moltiplichiamo per $1 - q$ le somme parziali. Si ottiene

$$(1-q)s_n = (1-q)\sum_{n=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}\,.$$

Da questo si ottiene che converge solo se $|q| < 1$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } q \in (-1,1) \\ +\infty & \text{se } q \geqslant 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leqslant -1 \end{cases}$$

Si osservi che, in maniera simile a prima, si ottiene che, sempre per $|q| < 1$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}\,.$$

A questo punto possiamo verificare che la serie (1) converge a 1 e che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$$

da cui ritroviamo (si veda anche più avanti il punto *ii*) del sottoparagrafo **Operazioni con le serie**) che il numero α in (2) è 1.

Serie telescopiche - Si supponga che il termine generale della serie sia del tipo

$$a_n = b_n - b_{n+1} \qquad (\text{oppure} \qquad a_n = b_{n+1} - b_n)\,.$$

In questo speciale caso si ha che la successione delle somme parziali è data da

$$s_n = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1},$$

per cui basterà fare il limite del termine generale per conoscere la somma (e non solo il carattere) della serie che è dato da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 \, .$$

Analogamente si tratta il caso in cui $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Esempio 2.7. - Mostriamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \, .$$

Osservando che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ si deduce immediatamente che

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

da cui la tesi.

Altro esempio: studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

In questo caso $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, ma questo non ci aiuta. Valutando le somme parziali, e scrivendo $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, si ha

$$\begin{aligned} s_n = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \\ + \cdots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = \log\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) \end{aligned}$$

oppure, scrivendo

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n,$$

si ottiene la serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\log(n+1) - \log n\big)$$

le cui somme parziali sono date da

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \log(n+1)$$

per cui la serie diverge positivamente.

EX - Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$.

Esempio 2.8. - Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n}$.

Si osservi che

$$\frac{2}{n^2+2n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Ponendo $b_n = \frac{1}{n}$ si ottiene che la serie data si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(b_n - b_{n+2}\big).$$

Calcolando allora le somme parziali

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+2}\big) = \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \\
&+ \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \frac{1}{9}\right) \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

che converge a $3/2$. La cosa si può più facilmente risolvere osservando che

$$\big(b_n - b_{n+2}\big) = \big(b_n - b_{n+1}\big) + \big(b_{n+1} - b_{n+2}\big).$$

A questo punto trattando separatamente i due termini si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+1}\big) = b_1 - b_{n+1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \big(b_{k+1} - b_{k+2}\big) = b_2 - b_{n+2}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+2}\big) = b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}.$$

Si conclude che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n} = \frac{3}{2}$.

EX - Si calcolino le somme di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ e di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Ancora sulla serie armonica - Un altro modo (ma ce ne sono tanti) per vedere la divergenza della serie armonica è il seguente. Usando il fatto noto che

$$e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1,$$

si ottiene

$$1 = \log e \geqslant \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

da cui

$$\frac{1}{n} \geqslant \log(n+1) - \log n$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N}\big(\log(n+1)-\log n\big) = \log(N+1)$$

e mandando N a $+\infty$ si conclude.
Si osservi che stimando $e/2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ si ottiene anche la disuguaglianza opposta (a meno di una costante moltiplicativa)

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\log\frac{e}{2}}\big(\log(n+1)-\log n\big)$$

da cui si deduce non solo che la serie armonica diverge, ma anche il suo andamento all'infinito, infatti

$$\log(N+1) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\log\frac{e}{2}}\log(N+1)\,. \tag{6}$$

Operazioni con le serie - Si considerino due serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Dalle proprietà dei limiti si deduce che:

i) se le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono entrambe allora converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n;$$

ii) per ogni $\lambda \neq 0$ le due serie $\lambda\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda a_n$ hanno lo stesso carattere e (con l'ovvio significato)

$$\lambda\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\, a_n;$$

iii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ e $\sum_{k=1}^{n} b_k \geqslant c$ $(\leqslant c)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = +\infty\ (-\infty).$$

2.2. Criteri di convergenza per serie a termini positivi.

Le serie a termini reali e positivi sono quelle sulle quali si può dire di più, infatti la successione delle somme parziali è monotona crescente, per cui queste serie non sono mai indeterminate e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty\,.$$

Per semplicità e per alleggerire la notazione spesso scriveremo

$$\sum a_n \qquad \text{in vece di} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

Proposizione 2.9 (Criterio del confronto)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi tali che*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \textit{definitivamente}\,.$$

Allora

i) *se* $\sum b_n$ *è convergente lo è anche* $\sum a_n$*;*

ii) *se* $\sum a_n$ *è divergente lo è anche* $\sum b_n$*.*

Dimostrazione - Supponiamo per semplicità che $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Le somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \sigma_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

soddisfano

$$s_n \leqslant \sigma_n\,.$$

Per la monotonia di $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, passando al limite si ottengono le tesi. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty;$$

nel caso $\lim \sigma_n = \sigma \in (0, +\infty)$, la conclusione che $\lim s_n$ esista deriva dal fatto che $\{s_n\}_n$ è monotona crescente, il fatto che anche $\lim s_n$ sia finito dal fatto che $\{s_n\}_n$ è limitata da σ; quindi non è né indeterminata, né divergente a $-\infty$, né divergente a $+\infty$. $\square$

Corollario 2.10 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty] \qquad \textit{allora}$$

i) *caso* $l \in (0, +\infty)$*: le due serie hanno lo stesso carattere;*

ii) *caso* $l = 0$*: se* $\sum b_n$ *è convergente lo è anche* $\sum a_n$*, se* $\sum a_n$ *è divergente lo è anche* $\sum b_n$*;*

iii) *caso $l = +\infty$: se $\sum a_n$ è convergente lo è anche $\sum b_n$, se $\sum b_n$ è divergente lo è anche $\sum a_n$.*

Dimostrazione - *i)* Per ipotesi esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \frac{l}{2} \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,,$$

cioè

$$\left(\frac{1}{2}\, l\right) b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}\, l\right) b_n \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Per il criterio del confronto le due serie hanno lo stesso carattere.
ii) In questo caso esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,,$$

cioè $a_n < b_n$ per ogni $n \geqslant \nu$. Per il criterio del confronto si conclude.
iii) Si mostra analogamente a *ii)*. □

Esempio 2.11. - Abbiamo già visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Usiamo queste informazioni per studiare le tre seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+7}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{diverge,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+7}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+7} \quad \text{diverge,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

Teorema 2.12 (Criterio della radice)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste $h \in (0,1)$ tale che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant h \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge.}$$

Se esiste $h \geqslant 1$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \quad \textit{per infiniti valori di } n \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Supponiamo, per semplicità, esista $h \in (0,1)$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leqslant h$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si ha allora

$$a_n \leqslant h^n$$

La serie $\sum h^n$ è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge, e per il criterio del confronto si conclude.
Nel secondo caso ci sono infiniti termini per i quali

$$a_n \geqslant 1.$$

Poiché manca la condizione necessaria per la convergenza e la serie è a termini positivi, diverge positivamente. $\square$

Osservazione 2.13. - Si osservi come la condizione

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

non garantisca nulla, ma serve quella più forte enunciata nel teorema ($\sqrt[n]{a_n} \leqslant h$ con $h < 1$). Ad esempio, la successione $a_n = 1/n$ soddisfa tale condizione, ma sappiamo che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.

Teorema 2.14 (Criterio del rapporto di D'Alembert)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste $h \in (0,1)$ tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant h \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge.}$$

Se esiste $h \geqslant 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Vediamo solo il secondo punto, il primo è lasciato per esercizio. Si supponga per semplicità che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,.$$

Ciò significa che la successione è crescente ed essendo positiva non può essere infinitesima, di conseguenza la serie non può convergere. $\square$

Osservazione 2.15. - Si osservi come nel caso in cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant h \quad \text{per infiniti valori di } n$$

non si possa concludere. Si consideri ad esempio la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{per } n \text{ pari,} \\[2ex] \dfrac{3}{n^2} & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

oppure

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{per } n \text{ pari,} \\[2ex] \dfrac{1}{4^n} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\frac{n^2}{(n+1)^2} \geqslant 2 \qquad \text{definitivamente per } n \text{ pari},$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^n}{2^{n+1}} = 2^{n-1} \qquad \text{per } n \text{ dispari},$$

ma in entrambi i casi le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono.

Corollario 2.16. *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi e sia*

$$l = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0,+\infty].$$

Se

$$0 \leqslant l < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge},$$
$$l > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in (0,1)$, per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $l + \varepsilon < 1$ si conclude usando il criterio della radice.
Se $l > 1$ allora per infiniti termini si ha

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

e si conclude poiché non vale la condizione necessaria per la convergenza. □

Corollario 2.17. *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Se*

$$l = \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge.}$$

Se

$$L = \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Se $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (0,1)$, per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $l + \varepsilon < 1$ si conclude usando il criterio del rapporto. Analogamente se $L > 1$ per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $L - \varepsilon > 1$ si conclude nuovamente usando il criterio del rapporto. □

Osservazione 2.18. - Si osservi come se $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ non si possa concludere in generale (si veda a tal proposito l'Osservazione 2.15).

Osservazione 2.19. - Si osservi come il caso $l = 1$ nel primo corollario e il caso $l = 1$ o $L = 1$ nel secondo corollario non sono presi in considerazione. Si considerino a tal proposito le due serie $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ di cui conosciamo già il carattere. Poniamo $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$. Si osservi come si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

nonostante la prima serie diverga, la seconda converga.

Esempio 2.20. - Dato $a > 0$ si studi il carattere della serie $\sum \dfrac{a^n}{n!}$.
Usiamo i criteri appena visti: denotando con a_n il termine generale con il criterio del rapporto si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to_{n\to+\infty} 0,$$

con il criterio della radice si ottiene

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} \to_{n\to+\infty} 0.$$

In entrambi i casi si conclude che la serie converge qualunque sia il valore di a.

Come si è visto dall'Esempio 2.20 i due limiti (quello del rapporto e quello della radice) possono essere uguali, ma in generale non sempre lo sono. Il legame tra i due è dato dal seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 2.21. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi si ha*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Osservazione 2.22. - Osserviamo che dal risultato appena visto si deduce che

$$\text{se esiste} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Longrightarrow \quad \text{esiste} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{7}$$

e, ovviamente, sono uguali. Come già detto non vediamo la dimostrazione del teorema precedente, ma vediamo con un esempio che il contrario di (7) in generale è falso. Si consideri

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{array} \right\} = 1$$

mentre

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$
$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Osservazione 2.23. - Si riveda anche l'Osservazione 2.15 alla luce di questo teorema.

Osservazione 2.24. - Il Teorema 2.21 può essere utile quando si deve calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ per una qualche successione (a tal proposito si vedano le serie di potenze) e per qualche motivo esiste e risulta più semplice da calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Esempio: si dica se $\sqrt[n]{n!}$ ha un ordine di infinito ed in tal caso lo si trovi.
Se si considera

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e\,.$$

Teorema 2.25 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione decrescente e a termini positivi. Allora le due serie*

$$\sum a_n \qquad e \qquad \sum 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione - L'idea è simile a quella usata per studiare il carattere della serie armonica, cioè di raggruppare 2^n termini. Infatti grazie alla monotonia di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si ha che per un fissato $n \in \mathbf{N}$ valgono

$$\frac{1}{2}\, 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = 2^n a_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leqslant 2^n a_{2^n+1} \leqslant 2^n a_{2^n}\,.$$

Si osservi che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k = \sum_{j=2}^{+\infty} a_j$ per cui

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

e dal criterio del confronto si conclude. □

EX - Nelle ipotesi del teorema precedente, cioè che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sia una successione decrescente e a termini positivi, fissato $k \in \mathbf{N}$, cosa si può dire della serie

$$\sum k^n a_{k^n}?$$

Esempio 2.26. - È bene ricordarsi di verificare sempre la monotonia della successione dei termini generali nel caso si voglia utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy. Vediamo qui con un esempio come la conclusione del teorema può essere falsa se non si ha la monotonia. Si consideri la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \quad \text{per un qualche } k \in \mathbf{N}, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiamo il carattere della serie $\sum a_n$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2^k} a_n + \sum_{n \neq 2^k} a_n \leqslant \sum_{n=2^k} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

quindi per confronto la serie converge. Se andiamo a valutare i termini $2^n a_{2^n}$ si ottiene

$$2^n a_{2^n} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_n 2^n a_{2^n} = +\infty.$$

Esempio 2.27. - Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$.

È possibile usare il criterio del confronto (asintotico) confrontando il termine $1/\log n$ con $1/n$ per concludere. Ma vogliamo usare qui il criterio di condensazione appena visto, per mostrare la sua utilità quando si ha a che fare con un logaritmo.
Denotato con a_n il temine $1/\log n$, si osservi (e si verifichi sempre!) innanzitutto che

$$a_{n+1} \leqslant a_n;$$

dopodiché valutiamo il temine

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{\log 2^n} = \frac{2^n}{n \log 2}\,.$$

È evidente che la serie

$$\sum \frac{2^n}{n}$$

diverge, per cui divergerà anche la serie data.

Serie armonica generalizzata - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad\qquad p > 0 \text{ parametro fissato.}$$

Il criterio di condensazione di Cauchy è un modo semplice per studiare questa serie. Infatti, una volta verificato che $a_{n+1} \leqslant a_n$ dove a_n denota $1/n^p$, si ha che

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{(2^n)^p} = \frac{2^n}{(2^p)^n} = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

quindi la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ altro non è che la serie geometrica di ragione $1/2^{p-1}$. Tale serie converge se, e solo se, $1/2^{p-1} < 1$, e cioè per

$$p > 1.$$

2.3. Serie a segno alterno: Criterio di Leibniz.

Le serie a segno alterno sono speciali serie a termini reali del tipo

$$\sum b_n \qquad \text{dove} \quad b_n = (-1)^n a_n.$$

Vediamo ora un criterio ad hoc per questo tipo di serie.

Teorema 2.28. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione soddisfacente*
i) $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,
ii) $a_{n+1} \leqslant a_n$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$,
iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Allora la serie $\sum(-1)^n a_n$ *converge e inoltre vale la stima*

$$\left|\sum_{n=k+1}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leqslant a_{k+1}\,. \tag{8}$$

Dimostrazione - Consideriamo le successioni delle somme parziali di indice pari e di indice dispari. Si osservi che

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant s_{2n}, \tag{9}$$

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant s_{2n+1}, \tag{10}$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geqslant 0. \tag{11}$$

Da (9) e da (10) deduciamo che

$$\begin{aligned} &\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}} && \text{è decrescente,}\\ &\{s_{2n+1}\}_{n\in\mathbf{N}} && \text{è crescente} \end{aligned}$$

e quindi le due sottosuccessioni ammettono limite. Inoltre da (11) si deduce che $s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_1$, e quindi in particolare che $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ è inferiormente limitata e, analogamente, che $\{s_{2n+1}\}_{n\in\mathbf{N}}$ è superiormente limitata. Da queste informazioni si deduce che i limiti sono finiti, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \sigma \in \mathbf{R}\,.$$

Da (11) e l'ipotesi *iii)* si ha che

$$s - \sigma = \lim_{n\to+\infty}\big(s_{2n} - s_{2n+1}\big) = 0\,.$$

Poiché la sottosuccessione di indici pari e quella di indici dispari hanno lo stesso limite deduciamo che (perché l'unione dei pari e dei dispari è tutto $\mathbf{N}$)

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s = \sigma\,.$$

Infine, poiché $s_{2n-1} \leqslant s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$ si ha

$$\begin{aligned}\big|s - s_{2n}\big| &\leqslant \big|s_{2n+1} - s_{2n}\big| = a_{2n+1}\\ \big|s - s_{2n-1}\big| &\leqslant \big|s_{2n-1} - s_{2n}\big| = a_{2n}\end{aligned}$$

da cui per ogni $k \in \mathbf{N}$

$$\big|s - s_k\big| \leqslant a_{k+1}\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.29. - Attenzione! Per la conclusione dell'ultimo teorema abbiamo usato il fatto che poiché la sottosuccessione di indici pari e la sottosuccessione di indici dispari di $\{s_n\}_n$ convergono ad uno stesso limite σ allora anche $\{s_n\}_n$ converge a σ.
Questo accade solamente perché l'unione (insiemistica) delle due sottosuccessioni è tutta la successione $\{s_n\}_n$. In generale è falso che se una successione ha due sottosuccessioni convergenti ad uno stesso limite ℓ anche la successione data converge ad ℓ.

Esempio 2.30. - Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Si ha che $a_n = 1/n$ soddisfa i punti *i*), *ii*), *iii*), per cui la serie data converge.

Vediamo con un esempio come le ipotesi del criterio di Leibniz siano ottimali.
Si consideri la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari,}\\[2mm] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari,}\end{cases}$$

che non è monotona decrescente e non soddisfa quindi il punto *ii*) del criterio di Leibniz. Si provi che la serie $\sum_n(-1)^n a_n$ diverge positivamente.

3. Convergenza assoluta per serie a termini reali e complessi

Nel precedente paragrafo abbiamo introdotto le serie, e visto alcuni criteri per studiarne il carattere, a termini *reali*.
In realtà quanto visto nel sottoparagrafo 2.1 si può adattare perfettamente anche a serie a termini *complessi*, cosa non vera per i risultati visti nei sottoparagrafi 2.2 e 2.3 che sono propri delle serie a termini reali.

EX - Si riscrivano, eventualmente adattandoli, i risultati del paragrafo 2.1 per serie a termini complessi verificando la loro validità (il Teorema 2.3, il Teorema 2.4, le considerazioni fatte per le serie telescopiche).

In questo paragrafo vediamo un criterio per studiare le serie che si applica a serie a termini reali i cui termini non siano tutti positivi o con segno alterno. Proprio per la sua generalità si può applicare anche a serie i cui termini sono numeri complessi. Proprio la peculiarità di essere l'unico criterio generale per lo studio delle serie lo rende chiaramente meno efficace.

3.1. Serie a termini complessi.

Una serie a termini complessi è una serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n, \qquad z_n \in \mathbf{C} \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

Useremo sempre $\{s_n\}_n$ per indicare la successione delle somme parziali.

Definizione 3.1. *Data $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a valori complessi diremo che la serie* (12) è convergente *se il limite* (4) *esiste ed è un numero complesso.*

Osservazione 3.2. - Vediamo cosa intendiamo per convergenza: sia $z_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n e β_n reali, e $\zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora

$$\sum_n z_n = \zeta = \alpha + i\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_n \alpha_n = \alpha \quad \text{e} \quad \sum_n \beta_n = \beta\,.$$

Abbiamo già detto che i risultati del sottoparagrafo 2.1 Risultati preliminari valgono anche per serie a termini complessi. Va da sé che quanto vedremo ora per le serie a termini complessi vale anche per serie a termini reali.

3.2. Convergenza assoluta.

Definizione 3.3. *Data $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a valori complessi diremo che la serie* (12) è assolutamente convergente *se è convergente la serie* (*a termini reali*)

$$\sum_n |z_n|.$$

Per meglio distinguerla dalla convergenza assoluta, talvolta la convergenza è detta convergenza semplice.

Teorema 3.4. *Una serie assolutamente convergente è anche semplicemente convergente. Inoltre*

$$\Big| \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|. \tag{13}$$

Dimostrazione - Per il criterio di Cauchy (Teorema 2.3) la serie $\sum z_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\Big| \sum_{k=n}^{n+p} z_k \Big| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu, \quad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Per ipotesi la serie $\sum |z_n|$ converge: allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sum_{k=n}^{n+p} |z_k| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu, \quad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Quindi, poiché (usando il fatto che dati $z, w, \in \mathbf{C}$ si ha $|z + w| \leqslant |z| + |w|$)

$$\Big| \sum_{k=n}^{n+p} z_k \Big| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |z_k|,$$

la serie $\sum z_n$ è anche (semplicemente) convergente. Ora considerando le somme parziali, stimando $\Big| \sum_{n=0}^{N} z_k \Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |z_n|$ e mandando N a $+\infty$ si ottiene anche (13). □

La serie geometrica complessa - Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ con $z \in \mathbf{C}$.

Poiché la serie dei moduli converge e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{1 - |z|} \qquad \text{per } |z| < 1$$

si deduce che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge per $|z| < 1$, anche se ancora non sappiamo chi sia il limite. Però poiché

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

ricaviamo che

$$\left| \frac{1}{1 - z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| \leqslant \left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{per } |z| < 1$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad \text{per } |z| < 1.$$

Si osservi che per $|z| \geqslant 1$ la serie non converge perché il generico termine z^n non è infinitesimo.

Esempi

1 - Studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.
La serie non converge assolutamente, ma per il criterio di Leibniz converge semplicemente. Il fatto che una serie non converga assolutamente non significa che non converga.

2 - Studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$.
La serie converge assolutamente e anche semplicemente.

3 - Studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n(n+1)}$.
In questo caso

$$\Big|\frac{\operatorname{sen} n}{n(n+1)}\Big| \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

per cui la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Inoltre la somma della serie soddisfa (si veda l'Esempio 2.7)

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n(n+1)}\Big| \leqslant 1.$$

4 - Dato $r > 0$ e $\vartheta \in \mathbf{R}$ si mostri che la serie seguente converge se $r < 1$ e se ne calcoli la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos n\vartheta.$$

Si osservi che, ragionando analogamente all'esempio precedente, la serie converge se $r \in (0,1)$, ma non è ovvio quale sia la sua somma. Complichiamoci apparentemente la vita studiando anche la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \operatorname{sen} n\vartheta\,.$$

Valutando le somme parziali e sommando le due serie opportunamente (i l'unità immaginaria) si ha

$$\sum_{n=0}^{N} r^n\cos n\vartheta + i\sum_{n=0}^{N} r^n\operatorname{sen} n\vartheta = \sum_{n=0}^{N} r^n e^{in\vartheta} = \sum_{n=0}^{N}\big(re^{i\vartheta}\big)^n.$$

Quest'ultimo termine altro non è che la somma parziale (fino all'indice N) della serie geometrica di ragione $re^{i\vartheta}$. Di conseguenza, se

$$\big|re^{i\vartheta}\big| = r < 1,$$

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\big(re^{i\vartheta}\big)^n$ converge e la sua somma è

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(re^{i\vartheta}\big)^n = \frac{1}{1-re^{i\vartheta}}\,.$$

Ora

$$\frac{1}{1-re^{i\vartheta}} = \frac{1}{1-r\cos\vartheta - i\,r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,\frac{1-r\cos\vartheta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{1-r\cos\vartheta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\vartheta} =$$
$$= \frac{1-r\cos\vartheta}{1+r^2-2r\cos\vartheta} + i\,\frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\ .$$

Dall'Osservazione 3.2 si deduce che le due serie convergono e la loro somma è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos n\vartheta = \frac{1-r\cos\vartheta}{1+r^2-2r\cos\vartheta},$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathrm{sen}\, n\vartheta = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{1+r^2-2r\cos\vartheta}.$$

4. Il criterio di Dirichlet

Vediamo in questo paragrafo un criterio che generalizza il criterio di Leibniz, e che si può applicare anche a serie a termini complessi. Prima del criterio vediamo la seguente formula (di Abel): date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ (a termini reali o complessi) denotiamo con $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ le successioni delle somme parziali, cioè

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Vale una sorta di versione discreta della formula di integrazione per parti:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)\,. \tag{14}$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$
$$= a_n B_n - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Di conseguenza, se scriviamo $b_k = B_k - B_{k-1}$ per $k \geqslant 1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + a_n B_n - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k =$$
$$= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

poiché $b_0 = B_0$.

Teorema 4.1 (Dirichlet)**.** *Siano date due successione $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, la prima a termini reali. Se esiste $M > 0$ tale che*

i) $a_n > 0$ definitivamente,

ii) $a_{n+1} \leqslant a_n$ definitivamente,

iii) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$,

iv) $|B_n| \leqslant M$ definitivamente,

allora la serie $\sum_n a_n b_n$ risulta convergente in $\mathbf{C}$.

Dimostrazione - Usiamo il criterio di Cauchy visto nel Teorema 2.3.
Dall'eguaglianza (14) si ha che, per $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \right| = \\ &= \left| a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} B_k (a_{k+1} - a_k) \right| \leqslant \\ &\leqslant M \left[a_{n+p} + a_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) \right] \leqslant 2M a_n \,. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si sono usate le ipotesi *i*), *ii*) e *iv*). Infine, poiché $\{a_n\}_n$ è infinitesima, si conclude. □

Osservazione 4.2. - Considerando $b_n = (-1)^n$ si ritrova il criterio di Leibniz. Infatti $B_n = 1$ se n è pari, $B_n = 0$ se n è dispari.

Osservazione 4.3. - Si tenga a mente questo criterio quando si studieranno le serie di potenze complesse.

Esempio 4.4. - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \operatorname{sen} n\,\vartheta, \qquad p > 1$$

per un qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Poiché

$$\left| \frac{1}{n^p} \operatorname{sen} n\,\vartheta \right| \leqslant \frac{1}{n^p}$$

si ha non solo che la serie data converge, ma che converge assolutamente. Ma che succede se $p = 1$? Poniamo

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad b_n = \operatorname{sen} n\vartheta\,.$$

La cosa è banale se $\vartheta = 0$ (e anche se $\vartheta = \pi$). Per gli altri valori di ϑ valutiamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\,\vartheta \right| &= \left| \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\vartheta} \right| = \left| \operatorname{Im} \frac{e^{i\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \frac{e^{i\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} \right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\vartheta}|} \end{aligned}$$

per cui si ha una stima uniforme (cioè indipendente da n) sulle somme parziali, a patto che

$$\left| 1 - e^{i\vartheta} \right| \neq 0, \qquad \text{cioè se } \vartheta \neq 0.$$

In conclusione la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\,\vartheta$$

converge. Ovviamente analogamente converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos n\vartheta$.

EX - Cosa si può dire della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sen} n\,\vartheta + \cos n\,\vartheta)$?

5. Riordinamento delle serie

La somma di una quantità *finita* di addendi *non dipende* dall'ordine in cui si sommano. Ma vale la stessa cosa se la quantità di addendi è infinita? Vediamo in questo paragrafo di rispondere a questa domanda.

In questo paragrafo torniamo a considerare il caso di serie a termini reali e considereremo serie convergenti. Si osservi che, data una serie a termini reali $\sum_n a_n$ convergente, si possono avere due possibilità: la prima è che $\sum_n a_n$ sia assolutamente convergente, la seconda è che non lo sia. I due seguenti risultati considerano queste due possibilità.

Definizione 5.1. *Data due successioni* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *e* $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *diremo che*

$$\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \qquad \textit{è un riordinamento di} \qquad \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

se esiste una funzione $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *biiettiva tale che*

$$b_n = a_{\sigma(n)} \qquad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}\,.$$

Teorema 5.2. *Sia* $\sum a_n$ *una serie assolutamente convergente. Allora preso un qualunque altro riordinamento di* $\{a_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ *si ha che* $\sum a_{\sigma(n)}$ *è assolutamente convergente e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Se una serie $\sum a_n$ non converge assolutamente quanto visto nel precedente teorema non è più valido e anzi vale il risultato che segue.
Si osservi prima che data una serie $\sum a_n$ che non converge assolutamente, ma che converge semplicemente, si ha che

$$\sum_n a_n^+ = +\infty\,, \qquad \text{e} \qquad \sum_n a_n^- = -\infty \tag{15}$$

dove a_n^+ e a_n^- sono

$\{a_n^+\}_{n\in\mathbf{N}}$ la successione dei termini positivi di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$,

$\{a_n^-\}_{n\in\mathbf{N}}$ la successione dei termini negativi di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Teorema 5.3. *Sia* $\sum a_n$ *una serie convergente, ma non assolutamente convergente. Allora, scelto* $L \in \overline{\mathbf{R}}$ *(*L *può essere un numero reale,* $-\infty$, $+\infty$*), esiste un riordinamento* $\{a_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ *di* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *tale che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = L\,.$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Per rispondere allora alla domanda che ci siamo posti all'inizio del paragrafo, la somma di una serie $\sum a_n$ <u>dipende</u> da come sono ordinati gli elementi della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Un esempio che soddisfa l'ultimo teorema visto è il seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$