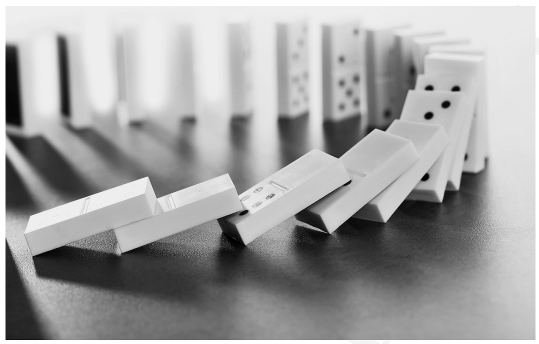
3 - Il principio di induzione

Ultimo aggiornamento: 8 ottobre 2023



Il principio del buon ordinamento afferma:

> ogni sottoinsieme A, non vuoto, di $\mathbf{N}$ ammette elemento minimo, cioè esiste $a_o \in A$ tale che $a_o \leqslant a$ per ogni altro elemento $a \in A$.

Il principio di induzione è equivalente al principio del buon ordinamento, anche se noi non mostreremo nessuna delle due implicazioni.
Il principio di induzione ha varie formulazioni, di seguito ne vedremo tre. Solitamente è la terza quella ad essere usata nelle dimostrazioni.

Il principio - Se A è un sottoinsieme di $\mathbf{N}$ che contiene 0 ed è tale che, contenendo un naturale n, contiene anche il successivo allora $A = \mathbf{N}$.

Può essere riscritto schematicamente come segue:

$$\text{se } A \subseteq \mathbf{N} \text{ è tale che} \qquad \left.\begin{array}{ll} 1) & 0 \in A \\ 2) & n \in A \implies n+1 \in A \end{array}\right] \text{ allora } A = \mathbf{N}.$$

In maniera equivalente il principio può essere enunciato in un secondo modo come segue:

$$\text{se } B \subseteq \mathbf{N} \text{ è tale che} \qquad \begin{array}{ll} 1) & n_o \in A \\ 2) & n \geqslant n_o, n \in B \implies n+1 \in B \end{array}$$

allora B contiene tutti i naturali maggiori od uguali ad n_o.

Per mostrarlo è sufficiente applicare il principio di induzione all'insieme

$$A = \{ m \in \mathbf{N} \,|\, m = n - n_o, n \in B \}.$$

Una terza formulazione è la seguente:

> sia $P(n)$ una proprietà di cui $n \in \mathbf{N}$ può godere o meno. Se $P(n_o)$ è vera per un qualche $n_o \in \mathbf{N}$ e l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_o$, allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geqslant n_o$.

Una proprietà P sui numeri naturali è vera *definitivamente* se

esiste $n_o \in \mathbf{N}$ tale che $P(n)$ è vera per ogni $n \geqslant n_o$.

Esempi - Si consideri la proprietà

$$P(n): \qquad n + 1 \geqslant n.$$

È evidente che tale proprità è vera per ogni naturale n (è vera anche definitivamente). La proprietà

$$Q(n): \qquad 3n - 10 \geqslant 2n + 5$$

non è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$, ma è vera definitivamente. Infatti si ottiene che

$$3n - 10 \geqslant 2n + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 15.$$

Una proprietà P è detta *induttiva* se $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ oppure definitivamente.

Attenzione! Per una proprietà P l'essere induttiva e l'essere vera sono due cose diverse! Ad esempio la proprietà

$$P(n): \qquad n \geqslant n + 1$$

<u>è induttiva</u> (infatti se $n \geqslant n+1$ allora $n+1 \geqslant n+2$), ma è chiaramente <u>falsa</u> per ogni $n \in \mathbf{N}$! L'essere induttiva per una proprietà è inutile se non esiste almeno un naturale per il quale tale proprietà è vera.

Come nel domino, dove se non c'è almeno una pedina che cade non si innesca il movimento a cascata e non cade nemmeno una pedina, così nell'induzione sui naturali se non c'è almeno un naturale per cui un certo predicato $P(n)$ è vero non si innesca l'induzione e $P(n)$ (anche se induttiva) non è vera per nessun naturale n.

EX - Si dimostri, usando il principio di induzione, che $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Forniamo qui una dimostrazione (dovuta a Gauss, fatta quando aveva, sembra, sette od otto anni) più immediata che non usa l'induzione:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
2\sum_{j=1}^{n} j = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\ldots+ & (n-1) & + & n\ + \\
+ & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\ldots+ & 2 & + & 1.
\end{array}
$$

Sommando i due primi termini di ognuna delle due righe si ottiene $n+1$, sommando i due secondi termini idem e così via per tutti per cui infine la tesi. Più precisamente si ottiene che

$$2\sum_{j=1}^{n} j = n^2 + n. \tag{1}$$

Si provi, con lo stesso trucco di Gauss, a mostrare che

$$\sum_{\substack{k\,=\,1 \\ k \text{ dispari}}}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

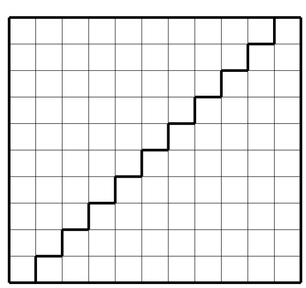
Si osservi che da (1) si ha anche la somma dei primi pari

$$\sum_{\substack{k\,=\,1 \\ k \text{ pari}}}^{2n} k = n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n.$$

da cui la somma dei primi dispari si può ottenere per differenza.

Vediamo di convincerci con dei disegni delle ultime uguaglianze.

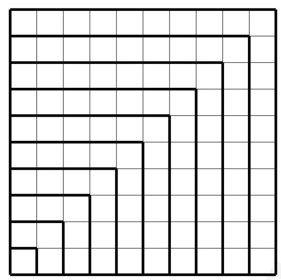
Nella seguente figura c'è evidenziata la dimostrazione della formula mostrata da Gauss. Si consideri un quadrato $n \times n$ e la somma dei primi interi è raffigurata da j quadratini nella j-esima fila. Aggiungiamo una fila di n quadratini in modo da costruire un rettangolo $n \times (n+1)$ (n righe ed $n+1$ colonne) quadratini, che avrà quindi area $n(n+1)$. La somma dei primi n interi è allora esattamente la metà dell'area di tale rettangolo.



$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Un rettangolo $n \times (n+1)$

Nel seguente disegno invece si può intuire come la somma dei dispari minori o uguali a $2n$ sia n^2. Infatti ogni parte con il bordo in neretto contiene un numero dispari di quadratini.



$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{2n} k = n^2$$

Quadrato $n \times n$

Esercizio - A mo' di curiosità mostriamo un terzo modo di calcolare la somma dei primi n naturali.
Per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n} \big[(k+1)^2 - k^2\big] = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{2}$$

Sviluppando il termine a sinistra si ha

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \big[(k+1)^2 - k^2\big] = \\ &\quad = \big((n+1)^2 - \cancel{n^2}\big) + \big(\cancel{n^2} - \cancel{(n-1)^2}\big) + \ldots + \\ &\qquad + \big(\cancel{4^2} - \cancel{3^2}\big) + \big(\cancel{3^2} - \cancel{2^2}\big) + \big(\cancel{2^2} - 1\big) = (n+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Mettendo assieme le due ultime uguaglianze si ottiene

$$2\sum_{k=1}^{n} k + n = (n+1)^2 - 1$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si noti come da (2) si possano ricavare anche la somma dei dispari minori o uguali ad n, la somma dei pari minori o uguali ad n, la differenza tra queste due quantità. Bisognerà considerare da una parte

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{2n} \left[(k+1)^2 - (k-1)^2\right] = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{2n} 4k,$$

dall'altra, elidendo come sopra,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{2n} \left[(k+1)^2 - (k-1)^2\right] = (2n)^2 = 4n^2.$$

Si provi a calcolare con questa tecnica la somma dei primi n quadrati.

Suggerimento: si supponga di conoscere la somma $\sum_{k=1}^{n} k$ e si calcoli $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3]$.

EX - Si dimostri, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Si provi a congetturare qual è la somma $\sum_{j=1}^{n} j^3$.

Suggerimento: si può procedere in maniera analoga a quanto fatto per calcolare la somma dei primi n interi poche righe sopra e come si suggeriva di fare anche per la somma dei primi n quadrati. In tal modo si trova direttamente il valore della somma.

Un secondo modo è il seguente: dal momento che la somma dei primi n interi è un polinomio di secondo grado in n, la somma dei primi n quadrati è un polinomio di terzo grado in n, si può congetturare che la somma dei primi n cubi sia un polinomio di quarto grado in n, cioè $\sum_{j=1}^{n} j^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Se così fosse si dovrebbero avere le due uguaglianze

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = (n+1)^3 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = a(n+1)^4 + b(n+1)^3 + c(n+1)^2 + d(n+1) + e$$

dalle quali si deducono i valori di a, b, c, d, e aggiungendo un'equazione, ad esempio $a+b+c+d+e = 1$ ottenuta prendendo $n = 1$ in $\sum_{j=1}^{n} j^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$.

Una volta congetturata quale sia la somma, si dimostri l'uguaglianza per induzione.

EX - Si mostri usando il principio di induzione che, dato $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La disugualianza di Bernoulli - Per ogni numero reale $x > -1$ ed $n \in \mathbf{N}$ vale la disugualianza

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

La disuguaglianza è stretta se $x \neq 0$ e $n \geqslant 1$.

Dimostrazione - Se $n = 0$ la disuguaglianza è vera. Si supponga ora che la disuguaglianza sia vera fino ad un generico n e dimostriamo che è vera anche per $n+1$. Supponiamo allora che valga

$$1 + nx \leqslant (1+x)^n.$$

Moltiplicando per $1+x$ si ottiene

$$(1+nx)(1+x) \leqslant (1+x)^{n+1}. \tag{3}$$

Poiché

$$(1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$

da (3) si ricava che

$$1 + (n+1)x + nx^2 \leqslant (1+x)^{n+1}$$

e poiché

$$1 + (n+1)x \leqslant 1 + (n+1)x + nx^2 \tag{4}$$

si conclude. Si osservi che l'ultima disuguaglianza è stretta se $x \neq 0$ e $n \neq 0$. Dove si è usato che $x > -1$? □

Binomio di Newton - Dati $a, b > 0$ vogliamo sviluppare $(a+b)^n$: vale la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \tag{5}$$

Ricordiamo che con $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ si denota la somma, al variare di k naturale tra 0 ed n, dei numeri α_k, cioè

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k := \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Con il simbolo $n!$, dove n è un numero naturale (si legge n *fattoriale*), si denota la quantità definita induttivamente come

$$0! := 1, \qquad n! := n\,(n-1)!\,,$$

cioè $n!$ risulta il prodotto di tutti i naturali tra 1 e n presi una volta sola, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Con $\binom{n}{k}$ di denota il coefficiente binomiale (si legge "n su k") che si definisce per $n, k \in \mathbf{N}$ e $0 \leqslant k \leqslant n$ come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Si osservi che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Si osservi che i coefficienti binomiali altro non sono che gli elementi del triangolo di Tartaglia (e sono anche i coefficienti delle potenze del tipo $a^{n-k}b^k$

nello sviluppo di $(a+b)^n$). Di seguito riportiamo pochi esempi del binomio che si vuole sviluppare con a fianco la corrispondente riga del triangolo:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

cioè

$$
\begin{gathered}
(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Dimostrazione - Dimostriamo ora l'uguaglianza (5) supponendo dapprima che $a = 1$. Usiamo il principio di induzione. Per $n = 1$ si ha che l'uguaglianza è vera dal momento che

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} b^k = \binom{1}{0} b^0 + \binom{1}{1} b = 1 + b.$$

Supponiamo ora che la formula sia vera fino ad un certo n e mostriamola per $n+1$. Prima si osservi che

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} = \\
&= \frac{(n-k+1)\,n!}{(n-k+1)!\,k!} + \frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,k!} = \\
&= \frac{(n-k+1+k)\,n!}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\,k!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

Allora

$$
\begin{aligned}
(1+b)^{n+1} = (1+b)(1+b)^n = (1+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}b^k = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}b^k + b^{n+1} = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}b^k + b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}b^k.
\end{aligned}
$$

Se $a \neq 1$ si può scrivere

$$
(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k
$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

EX - Si dimostri la disuguaglianza di Bernoulli usando lo sviluppo del binomio di Newton (in questo caso bisogna supporre $x \geqslant 0$).
Sempre utilizzando lo sviluppo del binomio di Newton si mostri anche che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $x > -1$,

$$
1 + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 \leqslant (1+x)^n
$$

e, più in generale,

$$
1 + \binom{n}{k}x^k \leqslant (1+x)^n \qquad \text{per ogni } k \in \{0,1,\dots,n\}.
$$

Suggerimento - Dato $x > 0$ lo sviluppo di $(1+x)^n$ è ovviamente maggiore della somma di due qualunque degli addendi dello sviluppo.

Esercizio - Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ n numeri positivi. Si dimostri che

$$
x_1 + \ldots + x_n = n \quad \Longrightarrow \quad x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant 1
$$

e la disuguaglianza è stretta se gli x_i non sono tutti uguali.

Dimostrazione - Si considerino due numeri $x_1, x_2 > 0$ la cui somma è 2. Allora

$$
x_1 x_2 = x_1(2 - x_1) = 2x_1 - x_1^2.
$$

Di conseguenza si ha

$$x_1 x_2 \leqslant 1 \iff x_1^2 - 2x_1 + 1 \geqslant 0$$

e questo è banalmente vero poiché $x_1^2 - 2x_1 + 1 = (x_1 - 1)^2$. Si osservi che la disuguaglianza è stretta se $x_1 \neq 1$.
Ora si supponga vera la tesi per tutti i naturali da 2 fino ad un certo n e mostriamo il passo induttivo: si considerino $n+1$ numeri positivi $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ tali che $x_1 + \ldots + x_{n+1} = n + 1$. Se $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1$ la tesi è vera. Diversamente esistono due numeri, siano per semplicità x_1 e x_2, tali che

$$x_1 < 1, \quad x_2 > 1.$$

Allora è possibile scrivere

$$x_1 = 1 - a, \quad x_2 = 1 + b \qquad \text{con } a, b > 0.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} &(1-a) + (1+b) + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n + 1 \quad \iff \\ &(1 - a + b) + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n. \end{aligned}$$

Di conseguenza per ipotesi induttiva si deduce che

$$(1 - a + b) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leqslant 1,$$

ma

$$x_1 \cdot x_2 = (1-a)(1+b) = 1 - a + b - ab < 1 - a + b$$

quindi

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} < (1 - a + b) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leqslant 1. \qquad \square$$

Relazione tra media aritmetica e media geometrica - La media geometrica di n numeri positivi $y_1, \ldots y_n$ è minore o uguale alla media aritmetica degli stessi numeri, cioè

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leqslant \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$$

e la disuguaglianza è stretta se i numeri non sono tutti uguali.

Dimostrazione - È sufficiente considerare

$$M := \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \qquad \text{e} \qquad x_i := \frac{y_i}{M},$$

dopodiché applicare quanto visto nell'esercizio precedente ai numeri x_i. Si ottiene

$$x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} y_i = n$$

e quindi

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{M^n} \prod_{i=1}^{n} y_i \leqslant 1$$

da cui $\prod_{i=1}^{n} y_i \leqslant M^n$, cioè

$$y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \leqslant \left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^n. \qquad \square$$

Esercizio (per quando avrete fatto il determinante di una matrice) Si dimostri che la seguente matrice è invertibile:

$$M = \begin{pmatrix} 2021^{2021} & 2022^{2022} & 2000^{2000} \\ 2024^{2024} & 2025^{2025} & 2026^{2026} \\ 2000^{2000} & 2028^{2028} & 2029^{2029} \end{pmatrix}$$

Vediamo tre modi di risolverlo (nell'ultimo useremo lo sviluppo del binomio di Newton).

Il primo è valutarne il determinante e verificare che tale determinante è diverso da zero (lasciato al lettore volenteroso).

Il secondo è osservare che i due vettori dati dalle prime due colonne sono linearmente indipendenti, in quanto le tre componenti del secondo vettore colonna sono crescenti, cioè

$$2022^{2022} < 2025^{2025} < 2028^{2028},$$

mentre così non è per il primo vettore colonna, che quindi non può dipendere linearmente dal primo (per esserlo dovrebbe essere un suo multiplo e quindi avere anch'esso le tre componenti ordinate in maniera crescente). Per lo stesso motivo anche il terzo vettore colonna e il primo vettore colonna sono linearmente indipendenti.
Rimane da vedere cha anche il secondo e il terzo vettore sono linearmente indipendenti: ma poichè la prima componente del secondo vettore colonna è maggiore della prima componente del terzo vettore colonna, mentre per le altre due componenti vale la relazione opposta, anche questi due sono linearmente indipendenti.

Terzo modo: valutando il determinante rispetto alla prima colonna si avrà

$$\det M = 2021^{2021}A - 2024^{2024}B + 2000^{2000}C$$

dove A, B, C sono i determinanti di alcuni (opportuni) minori 2×2. Prima di trarre le conclusioni facciamo due osservazioni.
La prima è che **il prodotto di due numeri pari è pari e il prodotto di due numeri dispari è dispari**. Ricordiamo che un numero pari in generale è scritto come $2n$ per n intero, un numero dispari come $2n+1$, con n intero. Quindi

$$2n \cdot 2k = 2(2nk) \qquad \text{è pari,}$$

$$(2n+1) \cdot (2k+1) = 2(2nk + n + k) + 1 \qquad \text{è dispari,}$$

Inoltre si ha che **una potenza di un numero dispari è dispari**: infatti (in questo caso consideriamo n naturale e non intero) usando lo sviluppo del binomio di Newton

$$(2n+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2n)^k 1^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2n)^k = 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (2n)^k$$

e siccome $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (2n)^k$ è pari si ha che $(2n+1)^m$ è dispari.
In particolare 2021^{2021} è dispari.
Si osservi che la quantità

$$A = 2025^{2025}2029^{2029} - 2028^{2028}2026^{2026}$$

è un numero dispari. Infatti, per quanto visto prima, $2025^{2025}2029^{2029}$ è dispari e $2028^{2028}2026^{2026}$ pari, per cui la differenza è dispari. Inoltre, sempre per quanto visto prima, il numero

$$-2024^{2024}B + 2000^{2000}C \qquad \text{è pari,}$$

in quanto somma di due multipli di un numero pari. Si ha

$$\det M = \underbrace{2021^{2021}A}_{\text{dispari}} \underbrace{-2024^{2024}B + 2000^{2000}C}_{\text{pari}},$$

cioè $\det M$ è la somma di un numero dispari e di numero pari, e quindi non può essere 0.