4 - Funzioni

Ultimo aggiornamento: 12 ottobre 2023

1. Concetto di funzione e prime definizioni

Per definire una **funzione** si debbono fornire tre cose: un insieme A su cui la funzione è definita (dominio), un insieme B nel quale la funzione assume valori (codominio) e una regola per associare elementi di A a elementi di B. Tale regola è caratterizzata dal fatto che **ad ogni elemento di** A si associa uno, ed **uno solo**, elemento di B. In maniera compatta si scrive

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

e una volta specificati dominio, codominio e l'elenco delle associazioni degli elementi di A ad elementi di B denoteremo la funzione con il suo nome, in questo caso f.

Si definiscono *immagine* di $f : A \to B$ l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) := \{ b \in B \,|\, \text{esiste } a \in A \text{ t.c. } f(a) = b \} \subseteq B$$

e *grafico* di $f : A \to B$ l'insieme

$$\mathrm{G}(f) := \{ (a, b) \in A \times B \,|\, b = f(a) \} \subseteq A \times B.$$

Funzione iniettiva - $f : A \to B$ si dice iniettiva ogni qualvolta, presi $a_1, a_2 \in A$, si ha che

$$a_1 \neq a_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(a_1) \neq f(a_2).$$

EX - Si mostri che, data $f : A \to B$, f è iniettiva se e solo se

$$f(a_1) = f(a_2) \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = a_2.$$

Funzione suriettiva - $f : A \to B$ si dice suriettiva se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Funzione biiettiva - $f : A \to B$ si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Osservazione 1.1. - Data una funzione $f : A \to B$ è sempre possibile "forzare" f ad essere suriettiva, basta considerare un'altra funzione modificando il codominio

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & A & \longrightarrow & \tilde{B} \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

dove $\tilde{B} = \mathrm{Im}(f)$.

Restrizione - Data una funzione $f : A \to B$ e un terzo insieme $\tilde{A} \subset A$ si può considerare una nuova funzione

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \tilde{A} & \longrightarrow & B \\ & a & \mapsto & f(a). \end{array}$$

A volte per semplicità tale funzione è denotata con il simbolo $f|_{\tilde{A}}$ e viene detta *restrizione* di f all'insieme $\tilde{A}$.

Esempi - La funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

non è né iniettiva, né suriettiva. La funzione

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbf{R} & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

invece è suriettiva. Restringendo opportunamente il dominio si possono ottenere funzioni anche iniettive, come ad esempio

$$\begin{array}{rccc} g_1: & [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{rccc} g_2: & (-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

e, ovviamente, biiettive

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g}_1: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{rccc} \tilde{g}_2: & (-\infty,0] & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Si trovino altri esempi di funzioni $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, con $A \subset \mathbf{R}$, (di fatto si trovino esempi di insiemi A) che siano iniettive.

Composizione tra funzioni - Dati A, B, C insiemi e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funzioni si definisce composizione tra f e g la funzione

$$h = g \circ f : A \to C \qquad \text{definita da } h(a) := g\big(f(a)\big)$$

Cardinalità finita - Diciamo che un insieme A ha cardinalità N (e si scrive $\#(A) = N$) se esiste una biiezione tra l'insieme A e l'insieme $\{1, 2, \dots, N\}$. La cardinalità può anche non essere finita, come ad esempio si ha nel caso in cui $A = \mathbf{N}$.
Siano A e B due insiemi di cardinalità finita. Allora

$$\begin{array}{lcl} f : A \to B \quad \text{è iniettiva} & \Longrightarrow & \#(A) \leqslant \#(B), \\ f : A \to B \quad \text{è suriettiva} & \Longrightarrow & \#(A) \geqslant \#(B). \end{array}$$

Ne consegue che una funzione $f : A \to B$ con A e B di cardinalità finita è biiettiva se e solo se A e B hanno la stessa cardinalità. In particolare se A e B hanno la stessa cardinalità (finita!) si osservi che

$$\begin{array}{lcl} f : A \to B \quad \text{è iniettiva} & \Longrightarrow & f \text{ è suriettiva}, \\ f : A \to B \quad \text{è suriettiva} & \Longrightarrow & f \text{ è iniettiva}. \end{array}$$

Funzione inversa - Nel caso una funzione $f : A \to B$ sia biiettiva è possibile definire una funzione, detta funzione inversa e denotata con f^{-1},

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

la quale ad ogni elemento $b \in B$ (ciò è possibile perché in particolare f è suriettiva) associa quell'unico elemento $a \in A$ (ciò è possibile perché in particolare f è iniettiva) che soddisfa $f(a) = b$.
Nel caso in cui A e B abbiamo cardinalità finita e f sia iniettiva o suriettiva allora f è anche invertibile. In generale questo è falso, anche se $A = B$.
Ad esempio se $A = \mathbf{N}$ la funzione

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

è iniettiva, ma non suriettiva, quindi non invertibile.

EX - Si costruisca un esempio di funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ suriettiva, ma non iniettiva.

Osservazione - Se $f : A \to B$ è biiettiva e f^{-1} è la sua inversa, anche $f^{-1} : B \to A$ è biiettiva, e quindi invertibile.

Consideriamo ora gli insiemi $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, che non hanno cardinalità finita. Esistono biiezioni tra ognuno di questi insiemi con gli altri?
La funzione

$$(1) \qquad f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \qquad \text{definita da } f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è una biiezione.

Insiemi equipotenti e cardinalità - Quando due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità $N \in \mathbf{N}$ si dice anche che sono equipotenti.
Più in generale si dice che due insiemi A e B sono *equipotenti* se esistono due funzioni

$$f : A \to B \qquad \text{e} \qquad g : B \to A \qquad \text{iniettive.}$$

Ovviamente se troviamo una funzione

$$f : A \to B \qquad \text{biiettiva}$$

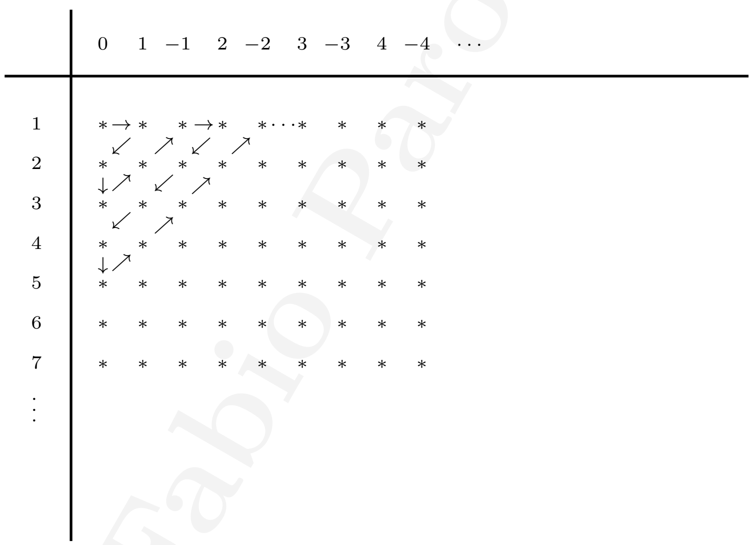
(che in particolare è iniettiva) basta considerare $g = f^{-1}$ che risulterà anch'essa biiettiva (e in particolare iniettiva).

Di conseguenza, poiché esiste una biiezione (la funzione definita in (1)) tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$, gli insiemi $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$ sono equipotenti (qualche volta si dice che hanno la stessa cardinalità, anche se la cardinalità è infinita).

Approfondimento - Vediamo, a titolo di curiosità, che l'insieme $\mathbf{N}$ è equipotente a $\mathbf{Q}$. Troviamo un'applicazione biunivoca tra gli insiemi $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$. Poiché un elemento di $\mathbf{Q}$ può essere pensato come una coppia $(m.k) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ (pensando poi al numero come il rapporto m/k) si ha che di fatto $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ visto che ogni numero razionale ha più (infinite) rappresentazioni come coppie $(m.k) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$. Di conseguenza se troviamo una applicazione biiettiva tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ sicuramente esiste una applicazione biiettiva tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}$. Costruiamo un'applicazione biiettiva tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$: nel disegno che segue mettiamo i numeri interi in orizzontale e i numeri naturali non nulli in verticale e i punti di $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ sono denotati da asterischi. L'applicazione

$$
\begin{array}{cccc}
F: & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^* \\
 & 0 & \mapsto & (0,1) \\
 & 1 & \mapsto & (1,1) \\
 & 2 & \mapsto & (0,2) \\
 & 3 & \mapsto & (0,3) \\
 & 4 & \mapsto & (1,2) \\
 & 5 & \mapsto & (-1,1) \\
 & 6 & \mapsto & (2,1) \\
 & 7 & \mapsto & (-1,2) \\
 & 8 & \mapsto & (1,3) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

è quella descritta nella figura seguente.



Vediamo che,al contrario di $\mathbf{Q}$, l'insieme $\mathbf{R}$ non è equipotente a $\mathbf{N}$. È sufficiente vedere che non può esistere un'applicazione biunivoca (in particolare suriettiva) tra l'insieme $\mathbf{N}$ e l'intervallo $(0,1)$.
È chiaro che se tale applicazione non esiste, non ne può nemmeno esistere una suriettiva da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$.
Usiamo la rappresentazione decimale dei numeri reali vista nel capitolo **I numeri reali**.
Si consideri una qualunque applicazione <u>iniettiva</u> F definita in $\mathbf{N}$ e a valori in $(0,1)$ e vediamo che non può essere suriettiva:

$$
\begin{array}{cccc}
F: & \mathbf{N} & \longrightarrow & (0,1) \\
 & 0 & \mapsto & 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}\dots \\
 & 1 & \mapsto & 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}\dots \\
 & 2 & \mapsto & 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}a_{38}\dots \\
 & 3 & \mapsto & 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}\dots \\
 & 4 & \mapsto & 0,a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}a_{57}a_{58}\dots \\
 & 5 & \mapsto & 0,a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}a_{67}a_{68}\dots \\
 & 6 & \mapsto & 0,a_{71}a_{72}a_{73}a_{74}a_{75}a_{76}a_{77}a_{78}\dots \\
 & 7 & \mapsto & 0,a_{81}a_{82}a_{83}a_{84}a_{85}a_{86}a_{87}a_{88}\dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

In questa rappresentazione al numero naturale $j-1$ viene associato un numero reale nell'intervallo $(0,1)$ che ha la rappresentazione decimale

$$0,a_{j1}a_{j2}a_{j3}a_{j4}a_{j5}a_{j6}\dots$$

quindi la k-esima cifra della parte decimale del numero $F(j-1)$ è a_{jk}.
Per vedere che F non può essere suriettiva è sufficiente scegliere per ogni $j \in \mathbf{N}^*$ un numero

$$\alpha_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad \alpha_j \neq a_{jj}.$$

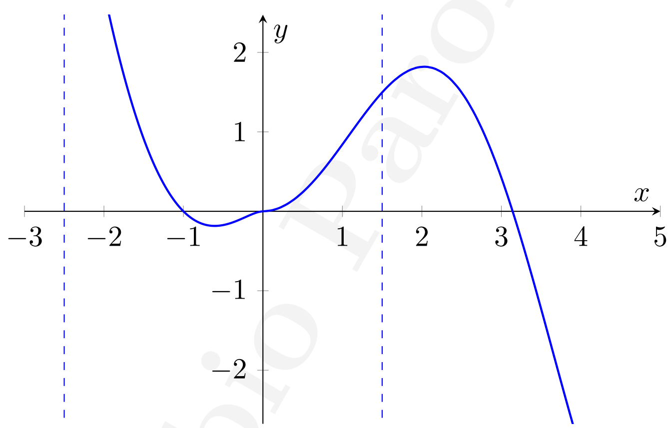
È quindi evidente che il numero

$$A = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \ldots$$

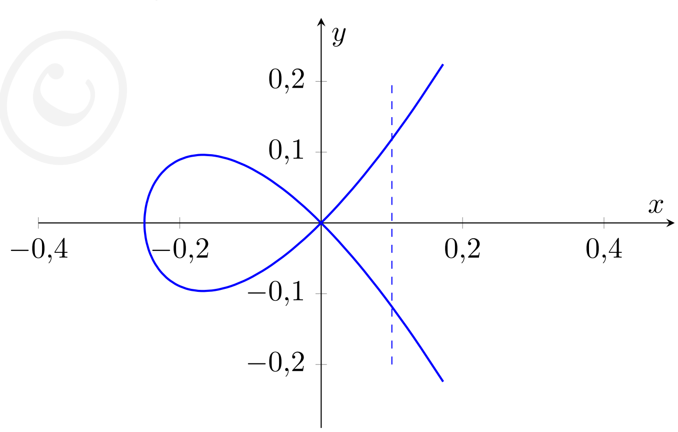
non può essere uguale a nessun numero della lista fatta sopra, l'immagine della funzione F, poiché A differisce almeno per una cifra da ognuno di tali numeri.
L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri reali hanno entrambi infiniti elementi, ma, poiché non possono essere in corrispondenza biunivoca, cardinalità diversa. La cardinalità di $\mathbf{N}$, di $\mathbf{Z}$ e di $\mathbf{Q}$ si denota con $\aleph_0$ (si legge "alef con zero"), quella di $\mathbf{R}$ con $\aleph_1$ (si legge "alef con uno").

Funzioni reali di una variabile reale

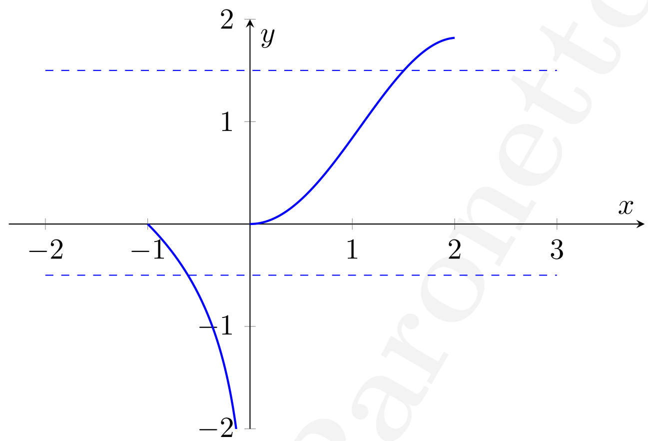
D'ora in poi considereremo funzioni per le quali il codominio è $\mathbf{R}$ e il dominio è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. Per tali funzioni è possibile dare molte più proprietà e definizioni peculiari e di conseguenza trarre più informazioni.
Cominciamo con una piccola osservazione. Il grafico di una funzione è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Possiamo dire che un sottoinsieme G di $\mathbf{R}^2$ è un grafico di una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ se (e solo se) l'intersezione dell'insieme G con ogni retta verticale, cioè $x =$ costante, è vuoto o è un solo punto, come illustrato nel disegno che segue, esempio nel quale $f : [-2, 4] \to \mathbf{R}$:



Il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ nella figura che segue, invece, non è un grafico:



Una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ è iniettiva se (e solo se) l'intersezione del grafico $G(f)$ con ogni retta orizzontale, cioè $y =$ costante, è vuoto o è un solo punto, come illustrato nel disegno che segue, esempio nel quale $f : [-1, 2] \to \mathbf{R}$:



Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **crescente** (strettamente crescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **decrescente** (strettamente decrescente) se $x, y \in A$ con $x < y$ implica $f(x) \geqslant f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **monotòna** (strettamente) se è crescente oppure decrescente (strettamente).

Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice **crescente** (strettamente crescente) **in un punto** $x_o \in A$ o localmente crescente (localmente strettamente crescente) intorno al punto x_o se

$\exists\, \delta > 0$ tale che $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset A$ e

$x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$ $(f(x) < f(y))$ per ogni $x, y \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$

Analoga definizione si può dare per la decrescenza.

Attenzione! Una funzione crescente (o decrescente) in ogni punto del suo dominio non è detto che sia crescente.
Esempio: $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è decrescente in ogni punto, ma non è decrescente.

EX - Se $f : I \to J$, I e J intervalli, è strettamente crescente allora anche l'inversa $f^{-1} : J \to I$ è strettamente crescente.

Una funzione $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è **limitata** se è limitato l'insieme immagine $f(A)$, cioè se esiste $M \geqslant 0$ tale che $|f(x)| \leqslant M$ per ogni $x \in A$.

Definizione 1.2. *Data* $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *si definiscono*

$$\sup f := \sup \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\},$$
$$\inf f := \inf \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\},$$

e, se esistono,

$$\max f := \max \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\},$$
$$\min f := \min \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\}.$$

Funzioni elementari

2. Potenze

Potenze ad esponente intero - Consideriamo $x \in \mathbf{R}$ e $m \in \mathbf{N}^*$ e definiamo la potenza x^m come segue

$$x^m = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ volte}} .$$

Proprietà immediate: $x, y \in \mathbf{R}$ e $m, n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m \cdot x^n \\ (x^m)^n &= x^{mn} \\ (xy)^m &= x^m \cdot y^m \end{aligned} \tag{2}$$

Volendo estendere la potenza x^m a $m \in \mathbf{Z}$, si vogliono mantenere che proprietà su elencate. Perciò, poiché si vorrebbe

$$x^m = x^{m+0} = x^m \cdot x^0 ,$$

si impone

$$x^0 := 1 .$$

Allo stesso modo, per $x \neq 0$, poiché si vorrebbe

$$1 = x^0 = x^{m-m} = x^m \cdot x^{-m}$$

si definisce

$$x^{-m} := \frac{1}{x^m} .$$

Si noti che $x \mapsto x^m$ per m dispari è iniettiva, mentre per m pari no!
È possibile restringere le funzioni potenze ad esponenete pari alla semiretta $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ ed in tal modo le funzioni ($m \in \mathbf{N}^*$)

$$p_m : \begin{array}{ccc} [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & x^m \end{array} \qquad \text{per } m \text{ pari}$$

$$p_m : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^m \end{array} \qquad \text{per } m \text{ dispari}$$

risultano sia iniettive che suriettive, e perciò invertibili (la verifica segue dagli assiomi dei numeri reali).

Radice n-esima - Si consideri $n \in \mathbf{N}^*$. Si denota con il simbolo $\sqrt[n]{\ }$ la funzione

$$p_n^{-1} : \quad [0,+\infty) \to [0,+\infty) \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$p_n^{-1} : \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad \text{per } n \text{ dispari}$$

cioè: se n è pari, dato $x \in [0, +\infty)$,

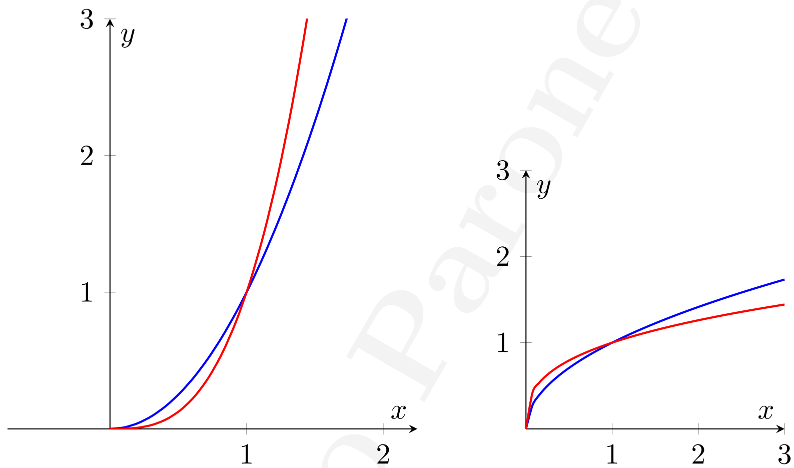
$\sqrt[n]{x}$ quell'unico numero reale non negativo y tale che $y^n = x$;

se n è dispari, dato $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{quell'unico numero reale } y \text{ tale che } y^n = x\,.$$

La radice n-esima di x esiste, ed è unica, in virtù del fatto che p_n sono invertibili.

Nella figura che segue sono riportati i grafici di $x \mapsto x^k$ e della sua inverse in blu, di $x \mapsto x^m$ e della sua inverse in rosso limitatamente a $x \in [0, +\infty)$ e $k < m$.



Potenze ad esponente razionale - Ora vogliamo definire x^q con $q \in \mathbf{Q}$ e

$$\boxed{x \geqslant 0}$$

Il numero q può essere scritto in molti modi diversi: scegliamo una rappresentazione, ad esempio sia $q = m/n$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Allora definiamo

$$x^q = x^{m/n} := (\sqrt[n]{x})^m\,.$$

Si verifica facilmente che

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

e che la definizione appena data è ben posta, cioè l'espressione x^q non dipende dalla scelta del rappresentante di q: ciò significa che se q viene scritto nella forma pm/pn si ha

$$x^{\frac{pm}{pn}} = x^{\frac{m}{n}}\,.$$

Attenzione!! Si sono definite le potenze razionali solo per $x \in \mathbf{R}_+$. Perché?

Esempio: $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$, però si vuole anche che $(-8)^{2/3} = (-8)^{4/6} = (\sqrt[6]{-8})^4$ e $\sqrt[6]{-8}$ non ha senso. Si conclude che per dare senso a $x^{m/n}$, più precisamente a x^q, la base x deve essere positiva!

Osservazione 2.1. - Si faccia attenzione al seguente fatto. Una funzione che sia del tipo

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

ha come dominio naturale, o massimale, cioè il più grande insieme insieme dove ha senso valutare l'espressione data, l'insieme $\mathbf{R}$. Infatti per ogni x reale, ed in particolare per i valori negativi, ha senso valutare x^2 e poi farne la radice cubica o, indifferentemente, fare prima la radice cubica di x e poi elevare al quadrato il numero ottenuto.
Solitamente queste funzioni si incontrano con una delle scritture, tutte equivalenti,

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m}, \qquad f(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, \qquad f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

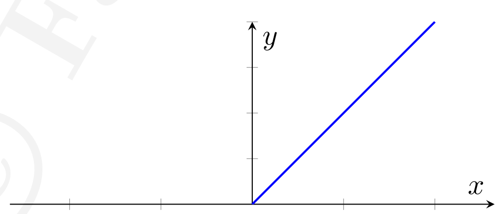
con m e n coprimi tra loro, proprio per evitare ambiguità.
Altra cosa rispetto a tali funzioni è considerare la funzione $q \mapsto x^q$, dove x non è la variabile, ma un numero fissato. In questo caso, volendo dare un senso a x^q per (ogni) $q \in \mathbf{Q}$ il numero x non può essere negativo come osservato sopra (si veda anche il paragrafo successivo dove si introduce la funzione esponenziale).

Esercizio - Si dica qual è il dominio massimale delle due funzioni che seguono e se ne disegni il grafico:

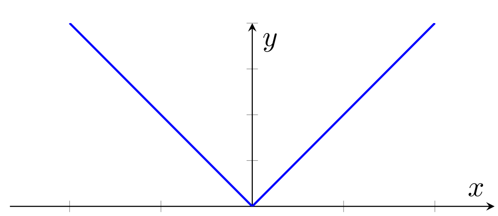
$$x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2}.$$

La prima è definibile solo per $x \in [0, +\infty)$, la seconda per ogni $x \in \mathbf{R}$. Si osservi che la radice quadrata di x^2 non è x, ma $|x|$.

$x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2$



$x \mapsto \sqrt{x^2}$



3. Funzione esponenziale e logaritmo

Funzione esponenziale e potenze ad esponente reale - Fissata una base $a > 0$ abbiamo visto che è possibile considerare una funzione

$$\begin{array}{rccc} f_a: & \mathbf{Q} & \to & \mathbf{R}_+ = (0, +\infty) \\ & q & \mapsto & a^q\,. \end{array}$$

È facile verificare la seguente proposizione.

Proposizione 3.1. *La funzione f_a appena definita gode delle seguenti proprietà:*

1. $a^q > 0$ *per ogni* $q \in \mathbf{Q}$*;*
2. *per* $a \in (0,1)$ *la funzione* f_a *è strettamente decrescente;*
3. *per* $a \in (1,+\infty)$ *la funzione* f_a *è strettamente crescente;*
4. *per ogni coppia di razionali* q_1, q_2 *vale* $a^{q_1+q_2} = a^{q_1}a^{q_2}$*.*

Si vuole ora estendere f_a ad una funzione definita in $\mathbf{R}$. Cominciamo dal caso

$$a > 1.$$

Dato $b \in \mathbf{R}$ si considerino gli insiemi

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = a^q,\ q \in \mathbf{Q},\ q \leqslant b\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = a^q,\ q \in \mathbf{Q},\ q > b\right\}$$

Si ha che

1) $A \neq \emptyset$,
2) A è superiormente limitato. Infatti è sufficiente considerare $q = [b] + 1$ e, dalla monotonia di f_a, si ha $a^q \leqslant a^{[b]+1}$ per ogni $q \leqslant b$.

Dal punto 1) si conclude che esiste $\sup A$, dal punto 2) che $\sup A < +\infty$. A questo punto si definisce

$$a^b := \sup A. \tag{3}$$

In maniera analoga si ha che $\inf B > -\infty$. Si può mostrare che

$$\sup A = \inf B \tag{4}$$

per cui si può definire alternativamente $a^b = \inf B$.

Dimostrazione di (4) **-** Vediamo la dimostrazione di (4). Dato l'insieme

$$E = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x = a^q,\ q \in \mathbf{Q},\ q > 0\}, \qquad a > 1,$$

sia $m = \inf E$. Vogliamo mostrare che $m = 1$. Poiché gli elementi di E sono maggiori di 1 non può essere $m < 1$. Non può essere nemmeno $m > 1$: infatti se così fosse si avrebbe

$$m^2 > m.$$

Esisterebbe allora $q \in \mathbf{Q}, q > 0$ tale che

$$a^q < m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a^{q/2} < m.$$

Ma questo è impossibile perché $q/2 \in \mathbf{Q}$, $q/2 > 0$, per cui $a^{q/2} \geqslant m$. Si conclude che $m = 1$.
A questo punto, detti $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$ si ha che

$$\alpha \leqslant \beta .$$

Per ogni $p, q \in \mathbf{Q}$ con $q \leqslant b$ e $p > b$ si ha

$$a^q \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant a^p$$

che implica

$$a^{p-q} \geqslant \frac{\beta}{\alpha} \geqslant 1 .$$

Poiché $p - q > 0$ e

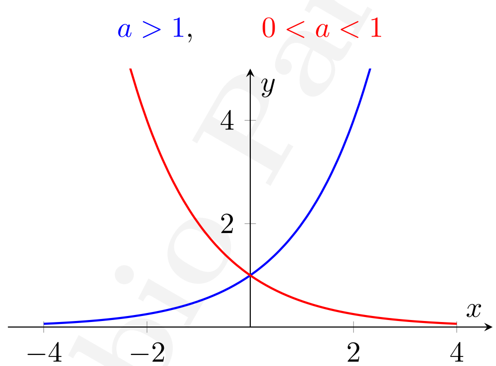
$$\inf_{q \leqslant b,\, p > q} a^{p-q} = \inf_{r \in \mathbf{Q}, r > 0} a^r = 1$$

si conclude che $\alpha = \beta$.

Le proprietà di f_a enunciate nella Proposizione 3.1 si estendono alla funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Di seguito due grafici di due funzioni esponenziali $x \mapsto a^x$.



Logaritmi - Poiché $x \mapsto a^x$ è strettamente monotona se $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ è anche invertibile. La sua funzione inversa è detta logaritmo in base a e soddisfa

$$\log_a(x) = y \qquad \text{dove } y \text{ è quell'unico numero t.c. } a^y = x\,.$$

Detta f la funzione

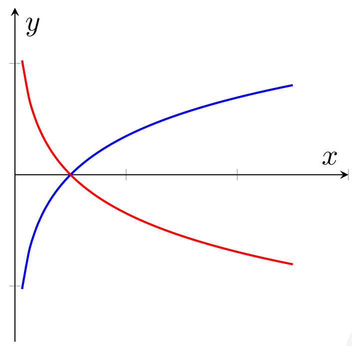
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

si ha che

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \log_a x \end{array}$$

Di seguito due grafici di due funzioni $x \mapsto \log_a x$.

$a > 1$, $\qquad 0 < a < 1$

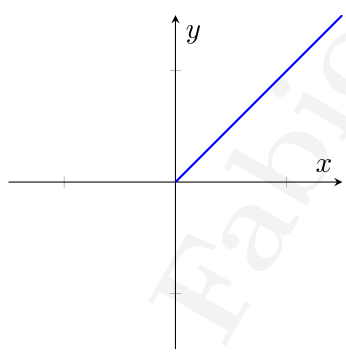


Esercizio - Si dica qual è il dominio massimale delle due funzioni che seguono e se ne disegni il grafico:

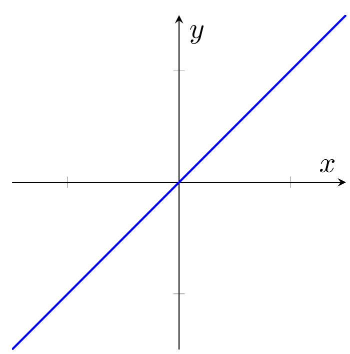
$$f \circ f^{-1} \qquad \text{e} \qquad f^{-1} \circ f .$$

La prima è definita per ogni $x \in [0, +\infty)$, la seconda per $x \in \mathbf{R}$.

$x \mapsto a^{\log_a x}$



$x \mapsto \log_a a^x$



Principali proprietà del logaritmo:

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
2. $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$ per ogni $x > 0$
3. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $x > 0$

Dimostrazione - 1. Se $\log_a x_1 = y_1$ e $\log_a x_2 = y_2$ si ha, per definizione, che

$$a^{y_1} = x_1 \,, \qquad a^{y_2} = x_2 \,.$$

Allora

$$x_1 x_2 = a^{y_1 + y_2}$$

cioè

$$\log_a(x_1x_2) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 \,.$$

2. $\log_a 1 = 0$, per cui, utilizzando il punto precedente, possiamo scrivere

$$0 = \log_a\left(\frac{1}{x}\,x\right) = \log_a \frac{1}{x} + \log_a x$$

3. $y = \log_a(x^\alpha)$, $z = \log_a x$, per cui $a^y = x^\alpha$, $a^z = x \Rightarrow a^{z\alpha} = x^\alpha$ da cui, per l'iniettività della funzione esponenziale, segue $y = z\alpha$.

Si osservi che dalle proprietà appena viste si ricava (**EX**) che

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Osservazione - $\log_a x$ e $\log_b x$ sono proporzionali (esiste una costante di proporzionalità indipendente da x). Infatti, presi $a \neq 1$, $b \neq 1$, si ha, poiché $x = a^{\log_a x}$,

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_b a \log_a x \,.$$

Osservazione - Per ogni $a, b, c > 0$ ($c \neq 1$) si ha che

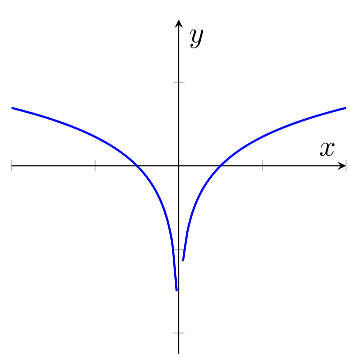
$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

Infatti se $a = c^{\log_c a}$ possiamo scrivere

$$a^{\log_c b} = (c^{\log_c a})^{\log_c b} = c^{(\log_c a)(\log_c b)} = c^{(\log_c b)(\log_c a)} = (c^{\log_c b})^{\log_c a} = b^{\log_c a} \,.$$

Esercizio - Si trovi il dominio massimale di $x \mapsto \log_a(x^2)$ e se ne disegni il grafico.

La funzione è definita per $x \neq 0$ e, attenzione, $\log_a(x^2)$ non è $2\log_a x$, ma $2\log_a |x|$! Il suo grafico è quindi (per $a > 1$)



Logaritmo naturale - Con la lettera e si indica un numero particolare, compreso fra 2 e 3, che sarà introdotto nel capitolo **Successioni**. È un numero irrazionale e spesso è usato come base per la funzione logaritmo, che in tal caso viene detta *logaritmo naturale*. Tale funzione si indica con

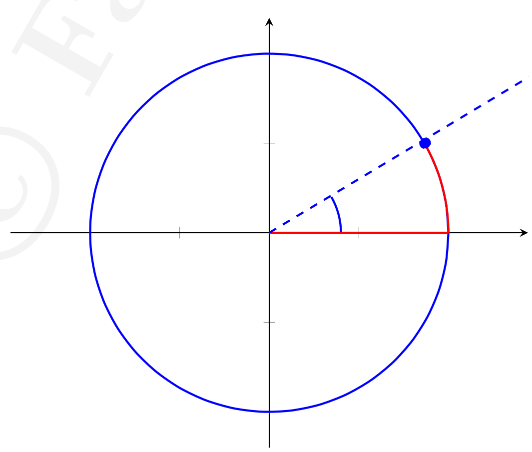
$$\log_e, \quad \ln \quad \text{o semplicemente con } \log .$$

La motivazione per la quale si sceglie preferibilmente questo numero come base per il logaritmo (e perché tale logaritmo viene detto *naturale*) verrà data più avanti, quando si studieranno le derivate.

4. Funzioni trigonometriche

Si consideri una circonferenza di raggio r e un punto P (evidenziato in figura) sulla circonferenza. Tale punto può essere visto come l'intersezione della circonferenza con una semiretta uscente dall'origine. Si consideri ora, nella retta della ascisse, la semiretta S fatta dai punti di coordinate $(a, 0)$ con a positivo e la semiretta uscente dall'origine che incontra la circonferenza data nel punto P. Misureremo gli angoli muovendo le semirette in senso antiorario a partire dalla semiretta S per cui, ad esempio, l'angolo evidenziato in figura sarà associato ad una quantità x positiva. Tale quantità sarà misurata in radianti.

Un *radiante* è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza su cui insiste un angolo e il raggio della circonferenza stessa, evidenziati in rosso nella figura seguente.
Poiché la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$ l'angolo giro misura 2π radianti, l'angolo retto $\pi/2$ radianti.



Consideriamo d'ora in poi il raggio della circonferenza

$$r = 1.$$

Definiremo le quantità $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ associate all'angolo (alla misura dell'angolo) x semplicemente come le coordinate del punto sulla circonferenza di raggio 1 che incontra la semiretta uscente dall'origine, cioè

$$P = (\cos x, \operatorname{sen} x).$$

Identità fondamentale (che segue dal teorema di Pitagora o semplicemente dalla costruzione):

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Altre formule utili sono le seguenti:

1. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
   $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
2. $\cos(-x) = \cos x$
   $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

Da 1. e 2. si ricavano anche le formule per scrivere $\cos(x - y)$ e $\operatorname{sen}(x - y)$ e

3. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
   $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Alcuni valori di tali funzioni sono

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0

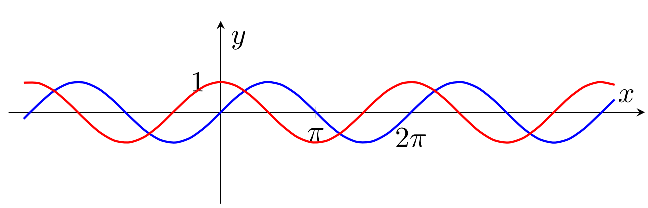
Estendiamo ora tali funzioni a tutto $\mathbf{R}$. Dato $x \in \mathbf{R}$ consideriamo l'intero

$$k := \left[\frac{x}{2\pi}\right]$$

e definiamo

$$\operatorname{sen} x := \operatorname{sen}\big(x - 2k\pi\big),$$
$$\cos x := \operatorname{sen}\big(x - 2k\pi\big).$$

In tal modo abbiamo definito delle funzioni anche per $x \notin [0, 2\pi]$ e che denoteremo tali funzioni ancora con *seno* e *coseno* e i cui grafici sono parzialmente mostrati in figura, in blu il grafico di $x \mapsto \operatorname{sen} x$, in rosso il grafico di $x \mapsto \cos x$.



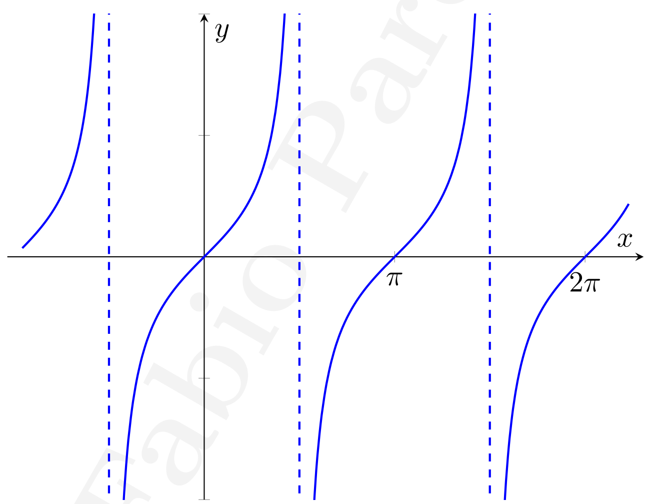
Utilizzando le formule di addizione si può osservare che una funzione è la traslazione dell'altra, infatti si hanno

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Si definisce poi una terza funzione, detta tangente, come

$$\operatorname{tg} x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{quando } \cos x \neq 0.$$

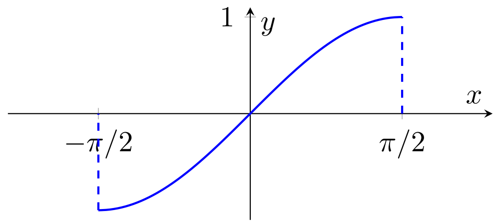
il cui grafico è parzialmente mostrato nella figura che segue.



Funzioni arcsen, arccos, arctg - Le funzioni appena viste chiaramente non sono delle biiezioni. Consideriamo dapprima la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$. È facile, come sempre, rendere suriettiva tale funzione limitando il codominio all'immagine. Si può considerare un'opportuna restrizione in modo da renderla anche iniettiva. Per scelta si considera la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

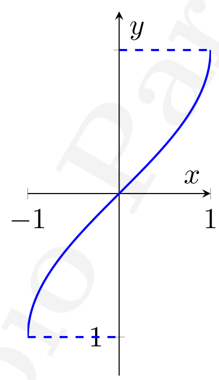
il cui grafico è



La funzione

$$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

è detta arcoseno e si abbrevia con arcsen. Quindi, dato $t \in [-1, 1]$, la quantità $\operatorname{arcsen} t$ è quell'unico numero nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ il cui seno è t. Il grafico è mostrato in figura.



Similmente si considerano le funzioni biiettive

$$g : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

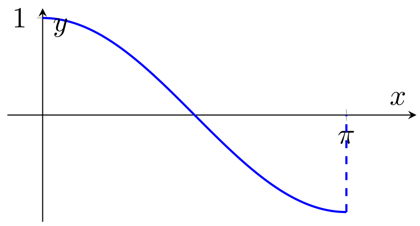
e si chiama arcocoseno, abbreviata in arccos, la funzione

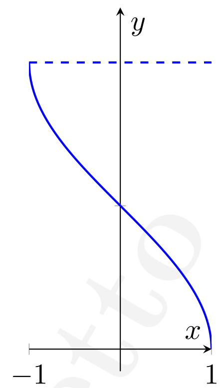
$$g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \,,$$

mentre si chiama arcotangente, abbreviata in arctg, la funzione

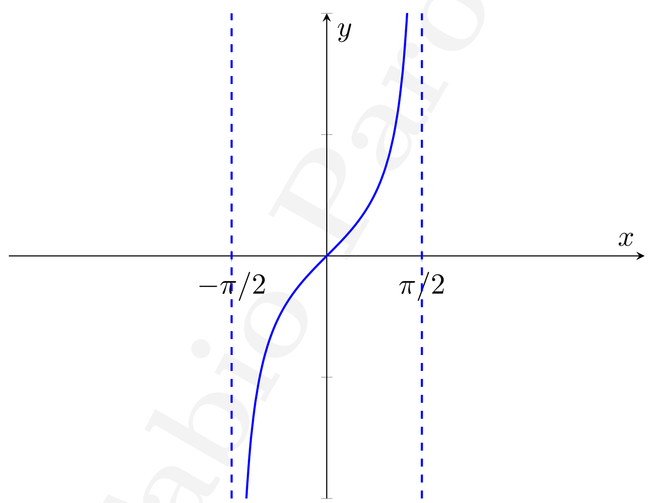
$$h^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

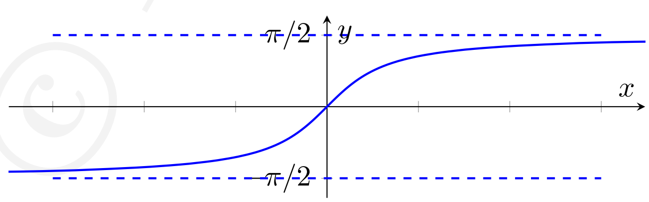
Di seguito sono riportati prima i grafici di g e di arccos





e poi anche i grafici di h e di arctg



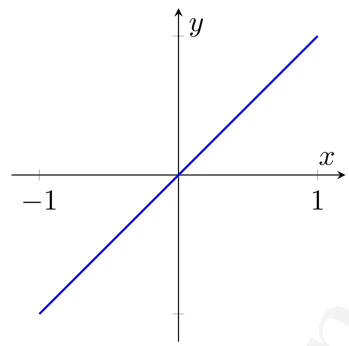


Esercizio - Si trovino i domini massimali delle funzioni

$$x \mapsto \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) \qquad \text{e} \qquad x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$$

e se ne disegnino i grafici. La prima è definita per $x \in [-1, 1]$, e solo per $x \in [-1, 1]$. Il suo grafico è semplicemente

$x \mapsto \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$



Per quanto riguarda la seconda, è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ e, chiaramente,

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Vediamo cosa succede per $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Supponiamo che

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Si ha allora che $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e di conseguenza

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - x)) = \pi - x.$$

D'altra parte

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = -\cos\pi \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

per cui infine

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - x)) = \pi - x \qquad \text{per } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Ora se

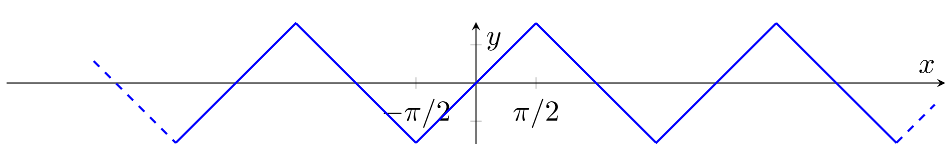
$$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

si ha che $x - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi, poichè $\operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen} x$, si ha

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x - 2\pi)) = x - 2\pi.$$

Ripetendo l'analogo ragionamento in ogni intervallo del tipo $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ con $k \in \mathbf{Z}$ si ottiene il grafico

$x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$



EX - Si trovino i domini massimali delle funzioni

$$x \mapsto \cos(\arccos x) \qquad \text{e} \qquad x \mapsto \arccos(\cos x),$$

$$x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \qquad \text{e} \qquad x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

e se ne disegnino i grafici.

5. Funzioni iperboliche

In connessione all'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ (ma non alle coordinate di un generico punto sull'iperbole) si possono definire delle funzioni dette seno iperbolico e coseno iperbolico definite come segue:

$$\operatorname{senh} t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

Si osservi che

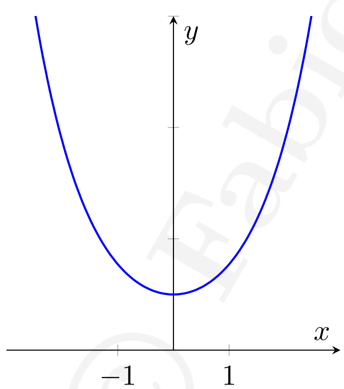
$$\operatorname{senh}(-t) = -\operatorname{senh} t, \qquad \cosh(-t) = \cosh t$$

e che

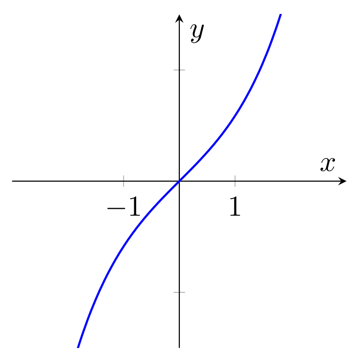
$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

Il loro grafico è

coseno iperbolico



seno iperbolico



6. Traslazioni e manipolazioni di grafici

Data una funzione elementare vogliamo disegnare anche grafici di funzioni ottenute considerando il reciproco di una funzione, la somma o il prodotto di due funzioni, la traslazione di una funzione.

Noti i grafici di $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è semplice ricavare il grafico delle seguenti funzioni: fissato $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$,

1. $T_c f(x) = f(x-c)$,
2. $(f+c)(x) = f(x) + c$,
3. $cf(x)$.

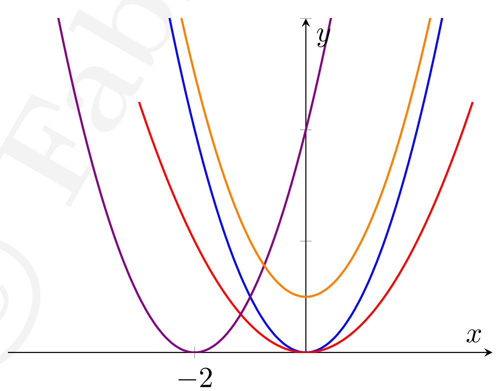
La prima, dal punto di vista grafico e perché la funzione f è definita in tutto $\mathbf{R}$, ha il grafico che risulta la traslazione verso destra di c, la seconda ha il grafico che risulta la traslazione verso l'alto di c, con la convenzione che "a destra di c" se $c < 0$ significa "a sinistra" e "verso l'alto di c" se $c < 0$ significa "verso il basso".
La terza moltiplica per c, amplificando il valore di $f(x)$ se $c > 1$, rimpicciolendolo se $c \in (0,1)$, invertendo il segno se $c < 0$. Meno immediate, ma qualitativamente semplici da fare, sono le funzioni del tipo

$$f \circ g.$$

Vediamo degli esempi: sapendo disegnare la funzione $x \mapsto x^2$ siamo in grado di disegnare le seguenti funzioni per qualunque $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$:

$$x \mapsto \alpha x^2,$$
$$x \mapsto (x-\beta)^2,$$
$$x \mapsto x^2 + \gamma,$$

che corrispondono ai tre casi mostrati prima. Di seguito un esempio con $\alpha = 1/2$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$:



A questo punto sappiamo disegnare un qualunque polinomio di secondo grado diventa immediato. Infatti, data la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, è sempre possibile trovare α, β, γ tali che

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma\,.$$

Tali valori sono dati da

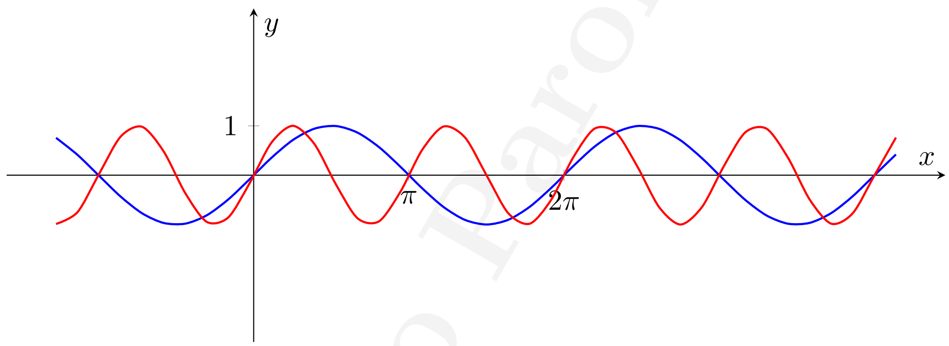
$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = -\dfrac{b}{2a} \\ \gamma = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

Esempio: si disegni il grafico di $f(x) = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2$.

Vediamo un esempio di composizione: date

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x \qquad \text{con } x\ in\mathbf{R}$$

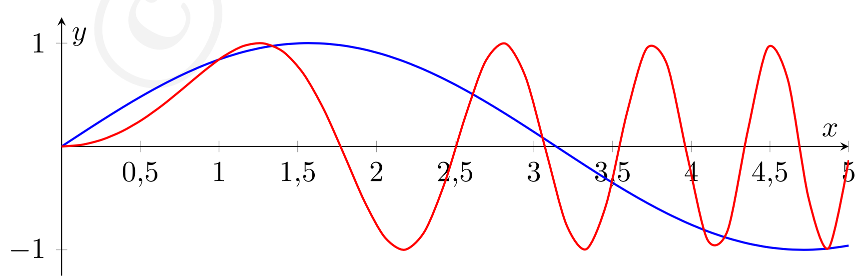
disegnamo $f \circ g$, evidenziata in rosso nella figura che segue (in blu la funzione f):



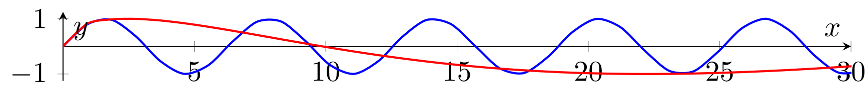
Come si osserva la funzione g modifica il comportamento di $f \circ g$ rispetto a quello di g, ma in maniera uniforme poiché

$$\frac{g(x)}{x} \qquad \text{è costante.}$$

Proviamo a vedere cosa succede se si considera $g(x) = x^2$ (in rosso sempre $f \circ g$). Si faccia attenzione che questa volta il rapporto tra $g(x)$ e x non è costante, ma cresce!



Come si può intuire la frequenza delle oscillazioni aumenta. Se come g si considera $\sqrt{x}$, con $x \geqslant 0$, la frequenza delle oscillazioni diminuisce, come si intuisce dalla figura che segue.



7. Monotonia di funzioni

Concludiamo questo capitolo con delle osservazioni sulla monotonia di funzioni. Si considerino due funzioni $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Composizione - Si osservi che (le si provino per esercizio)

$$
\begin{array}{lcl}
f \text{ crescente, } g \text{ crescente} & \Longrightarrow & f \circ g \text{ crescente} \\
f \text{ decrescente, } g \text{ decrescente} & \Longrightarrow & f \circ g \text{ crescente} \\
f \text{ decrescente, } g \text{ crescente} & \Longrightarrow & f \circ g \text{ decrescente} \\
f \text{ crescente, } g \text{ decrescente} & \Longrightarrow & f \circ g \text{ decrescente}
\end{array}
$$

Somma - Per quanto riguarda la somma si ha (si provino anche queste per esercizio)

$$
\begin{array}{lcl}
f \text{ crescente, } g \text{ crescente} & \Longrightarrow & f + g \text{ crescente} \\
f \text{ decrescente, } g \text{ decrescente} & \Longrightarrow & f + g \text{ crescente}
\end{array}
$$

Nei casi in cui una delle due è crescente e l'altra decrescente non si può dire nulla, in generale. Esempi: presa $f(x) = 2x$ e $g(x) = ax$ con $a < 0$ si ha che $f + g$ è crescente se $a = -1$, decrescente se $a = -3$, costante se $a = -2$.

Prodotto - In questo caso non si può dire nulla in generale. Valgono però i seguenti fatti

$$
\begin{array}{lcl}
f \text{ crescente, } g \text{ crescente, } f, g \text{ positive} & \Longrightarrow & fg \text{ crescente} \\
f \text{ decrescente, } g \text{ decrescente, } f, g \text{ negative} & \Longrightarrow & fg \text{ crescente}
\end{array}
$$

Vediamo qualche esempio negli altri casi. Presa f positiva e crescente $g \equiv -1$ (che in particolare è crescente) ovviamente fg non è crescente, anzi, è decrescente.
Presa $f(x) = x^2$ con $x > 0$ e $g(x) = x^{-a}$ con $x > 0$ si ha che fg è crescente se $a = 1$, costante se $a = 2$, decrescente se $a = 3$.

In tutti i fatti appena visti valgono le analoghe considerazioni se aggiungiamo (dappertutto) l'avverbio "strettamente".