5 - Successioni

Ultimo aggiornamento: 17 ottobre 2023

1. Successioni e loro limiti

Definizione 1.1. *Una successione (reale) è una funzione* $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.

Solitamente si denota una successione con

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

intendendo con a_n l'elemento $a(n)$ e con $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ l'insieme immagine di a, cioè l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \,|\, \exists\, n \in \mathbf{N}$ per cui $x = a(n)\}$.

Definizione 1.2 (limite di una successione)**.** *Una successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *ammette limite* $\ell \in \mathbf{R}$, *e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *tale che*

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N. \tag{1}$$

Ammette limite $+\infty$ $(-\infty)$, *e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (-\infty)$$

se per ogni $M \in \mathbf{R}$ *esiste* $N = N(M) \in \mathbf{N}$ *tale che*

$$a_n > M \quad (a_n < M) \qquad \text{per ogni } n \geqslant N. \tag{2}$$

A volte per semplicità (visto che non ci può essere ambiguità) si scrive semplicemente

$$\lim_n a_n \quad \text{oppure} \quad \lim a_n \qquad \text{anziché} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Osservazione 1.3. - Si consideri una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e si supponga di voler mostrare che tale successione ha limite $\ell \in \mathbf{R}$.
Se si riesce a mostrare che per un certo valore $\bar\varepsilon$ esiste $\bar N \in \mathbf{N}$ per il quale vale la condizione

$$|a_n - \ell| < \bar\varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \bar N$$

allora, gratuitamente, si ha che (1) vale per ogni $\varepsilon > \bar\varepsilon$ con $N = \bar N$.
Allo stesso modo se si vuole mostrare che il limite è $+\infty$ e si riesce a mostrare che in corrispondenza di un certo $\bar M$ esiste $\bar N \in \mathbf{N}$ per il quale

$$a_n > \bar M \qquad \text{per ogni } n \geqslant \bar N$$

allora la condizione (2) vale gratuitamente per ogni $M < \bar{M}$ con $N = \bar{N}$. Analogamente per il caso $-\infty$.

Teorema 1.4. *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ammette limite tale limite è unico.*

Una successione si dice <u>convergente</u> se <u>ammette limite</u> e tale limite è <u>finito</u>.

Una successione si dice <u>divergente</u> se <u>ammette limite</u> e tale limite è <u>infinito</u>.

Una successione si dice <u>regolare</u> se <u>ammette limite</u>.

Una successione si dice <u>indeterminata (o irregolare)</u> se <u>non ammette limite</u>.

Qualche volta, per non fare sempre distinzioni tra il caso finito e il caso infinito, per comodità si dirà che una successione è regolare se ammette limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ denotando con

$$\overline{\mathbf{R}} \quad \text{l'insieme} \quad \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Questo, lo sottolineiamo, è solo un modo per sveltire qualche volta gli enunciati. $-\infty$ e $+\infty$ rimangono due simboli e non sono numeri.

Esempio 1.5. -

1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

   Per verificarlo si fissi $M \geqslant 0$ (è sufficiente considerare $M \geqslant 0$ anziché un generico $M \in \mathbf{R}$ grazie all'Osservazione 1.3) e vediamo di trovare $N \in \mathbf{N}$ per cui valga (2). Ovviamente è sufficiente imporre la disugualianza
   $$n > M$$
   e scegliendo $N = [M] + 1$, dove $[M]$ indica la parte intera di M, si ottiene il naturale n cercato (ecco perché ci si è limitati a $M \geqslant 0$).

2. $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$
3. $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \qquad (k \in \mathbf{N}^*)$
4. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

   Per verificarlo fissiamo $\varepsilon \geqslant 0$ e vediamo di trovare $N \in \mathbf{N}$ per cui valga (1). È sufficiente imporre la disugualianza
   $$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$
   e scegliendo $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ si conclude.

5. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \qquad$ non esiste, lo vedremo più avanti (si veda l'Osservazione 1.8)
6. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n-10} = 1$

   Si osservi che per $n = 10$ la successione di cui si vuole calcolare

il limite non è definita. Poco male: poiché stiamo considerando il limite per $n \to +\infty$ possiamo anche pensare $n > 10$.
Si fissi $\varepsilon > 0$. Cerchiamo N tale per ogni $n \geqslant N$ valga

$$\left|\frac{n+1}{n-10} - 1\right| < \varepsilon.$$

Questo è equivalente a (limitandoci a $n > 10$)

$$\left|\frac{11}{n-10}\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n - 10 > \frac{11}{\varepsilon}.$$

Per ciò è sufficiente scegliere un qualunque numero $N > 11/\varepsilon + 10$.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 6n + 1}{n^2 + n + 1} = 1$

Si fissi $\varepsilon > 0$. Cerchiamo N tale per ogni $n \geqslant N$ valga

$$\left|\frac{n^2 - 6n + 1}{n^2 + n + 1} - 1\right| < \varepsilon$$

cioè se

$$\frac{7n}{n^2 + n + 1} < \varepsilon. \tag{3}$$

Poiché

$$\frac{7n}{n^2 + n + 1} < \frac{7n}{n^2 + n} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n} \tag{4}$$

se

$$\frac{7}{n} < \varepsilon$$

in particolare varrà (3). Quest'ultima disequazione è soddisfatta se

$$n > \frac{7}{\varepsilon}.$$

Basta quindi prendere

$$N = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right].$$

Si osservi che senza la stima (4) possiamo concludere lo stesso, ma con qualche calcolo in più. Infatti da (3) abbiamo

$$\varepsilon n^2 + (\varepsilon - 7)n + \varepsilon > 0.$$

Risolvendo l'equazione $\varepsilon n^2 + (\varepsilon - 7)n + \varepsilon = 0$ ci si rende conto che scegliendo

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{7}{\varepsilon} - 1 + \frac{\sqrt{49 - 14\varepsilon - 3\varepsilon}}{\varepsilon}\right)$$

(3) è soddisfatta.

Definizione 1.6. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione e $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una funzione (è una successione anche ν, ma a valori in $\mathbf{N}$!) strettamente crescente, cioè*

$$\nu_{n+1} > \nu_n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

La successione $\{a_{\nu_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ è detta sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Nel caso in cui ν sia l'identità, cioè $\nu_n = n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ ritroviamo la successione di partenza, diversamente si ha una successione $\{a_{\nu_n}\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.
Spesso, per semplicità, si indicizzano a loro volta gli indici per cui si scrive il valore $\nu(j)$ come indice:

$$\nu(1) = n_1, \nu(2) = n_2, \ldots \nu(k) = n_k, \ldots$$

e quindi la sottosuccessione si scrive semplicemente

$$\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}.$$

Esempio: data $\{a_{\nu_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ e

$$\nu(0) = 1, \nu(1) = 3, \nu(2) = 7, \nu(3) = 12, \ldots$$

i primi termini della sottosuccessione saranno quelli individuati dagli indici appena scritti sopra, nel breve elenco che segue quelli evidenziati in rosso:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$$

Un altro esempio, forse più chiaro, è il seguente: se

$$\nu(n) = 2n \qquad \text{o} \qquad n_j = 2j$$

la sottosuccessione $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ è il sottoinsieme $\{a_{2j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ degli elementi della successione di partenza di indice pari.

Teorema 1.7. *Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione, se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ammette lo stesso limite.*

Dimostrazione - Sia $\ell \in \mathbf{R}$ e sia $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

In particolare ciò vale per ogni $n_j \geqslant N$.
Se $\ell = +\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_n > M \qquad \text{per ogni } n \geqslant N$$

e quindi anche per ogni $n_j \geqslant N$. Analogamente se $\ell = -\infty$. $\square$

Osservazione 1.8. - Quest'ultimo risultato può essere utile in negativo, quando si vuole mostrare che una successione non ha limite.
Si supponga di congetturare che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ non abbia limite. Se si riescono a trovare due sottosuccessioni $\{a_{\nu_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{a_{\mu_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ che abbiano limiti diversi, diciamo ℓ_1 e ℓ_2 (finiti o infiniti che siano), è evidente che

la successione non ha limite. Infatti, per il teorema precedente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ avesse limite ℓ ogni sua sottosuccessione avrebbe lo stesso limite. Ma se $\ell_1 \neq \ell_2$ questo non è possibile.

Esempio: data la successione definita da $a_n = (-1)^n$ non ha limite. È sufficiente considerare la sottosuccessione con indice pari, che ha come limite 1, e la sottosuccessione con indice dispari, che ha come limite -1, per dimostrare che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ non ha limite.

Dato un predicato $P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, diremo che P è vero *definitivamente* se esiste $n_o \in \mathbf{N}$ tale che

$$P(n) \qquad \text{è vero per ogni } n \geqslant n_o.$$

Teorema 1.9 (della permanenza del segno)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione regolare. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell > 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

allora definitivamente si ha $a_n > 0$.
Se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell < 0 \qquad \textit{oppure} \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

allora definitivamente si ha $a_n < 0$.

Osservazione 1.10. - Attenzione! Il viceversa non vale! Ad esempio, si consideri la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$. Si ha

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad \text{ma} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dimostrazione - Vediamo solo il caso in cui il limite sia finito e positivo, gli altri casi sono lasciati per esercizio.
Al solito, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N,$$

cioè

$$\ell - \varepsilon < a_n - < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

È allora sufficiente scegliere ε in modo tale che $\ell - \varepsilon$ sia positivo (ad esempio: $\varepsilon = \ell/2$) ed in tal modo si ha che

$$a_n > 0 \qquad \text{per ogni } n \geqslant N. \qquad \square$$

Ripetiamo un concetto già visto per ogni funzione.

Definizione 1.11. *Diciamo che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è superiormente limitata, inferiormente limitata, limitata se esiste $M \in \mathbf{R}$ per cui valgono* *rispettivamente*

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant M && \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}, \\ a_n &\geqslant M && \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}, \\ |a_n| &\leqslant M && \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Teorema 1.12. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione - Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Si consideri l'insieme finito

$$S = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_{N-1}, \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\}$$

e siano $\alpha := \min S$ e $\beta := \max S$. Allora

$$\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

□

Osservazione 1.13. - Attenzione! Il viceversa non vale! Ad esempio la successione $(-1)^n, n \in \mathbf{N}$, è limitata, ma non convergente.

Operazioni con i limiti

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ due successioni rispettivamente convergenti ad a e a b ($a, b \in \mathbf{R}$). Allora

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab$,

iii) se $b \neq 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dimostrazione - *i)* Basta osservare che $|(a_n+b_n)-(a+b)| \leqslant |a_n-a|+|b_n-b|$.
ii) Stimiamo la quantità $|a_n b_n - ab|$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \leqslant \\ &\leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

Poiché $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è convergente, risulta limitata, diciamo $|a_n| \leqslant M$ per un qualche $M > 0$. Per cui si conclude da

$$|a_n b_n - ab| \leqslant M|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

iii) Si supponga dapprima $a_n \equiv 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si osservi che

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right|.$$

Ora, dal teorema della permanenza del segno, si ha che

$$\begin{aligned} b > 0 &\quad\Longrightarrow\quad b_n > 0 \text{ definitivamente,} \\ b < 0 &\quad\Longrightarrow\quad b_n < 0 \text{ definitivamente,} \end{aligned}$$

per cui in entrambi i casi $b_n b$ è definitivamente positiva e (dal punto *ii*))

$$\lim_{n\to+\infty} b_n b = b^2.$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ possiamo dedurre che esiste $N_1 \in \mathbf{N}$ tale che

$$|b_n b - b^2| < \frac{b^2}{2},$$

cioè in particolare

$$b_n b > \frac{b^2}{2} \qquad \text{definitivamente.}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbf{N}_2$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{1}{|b_n b|} &< \frac{2}{b^2} &&\text{per ogni } n \geqslant N_1, \\ |b_n - b| &< \varepsilon &&\text{per ogni } n \geqslant N_2, \end{aligned}$$

da cui

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| < \frac{2}{b^2}\,\varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Nel caso generale è sufficiente applicare quanto appena visto e il punto *ii*): infatti, ponendo $\beta_n = \frac{1}{b_n}$ si ha che $\frac{a_n}{b_n} = a_n \beta_n$. □

Più in generale, date $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ due successioni, valgono i seguenti fatti. Ne dimostriamo solo uno, a titolo di esempio, lasciando gli altri da dimostrare per esercizio.

iv) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è inferiormente limitata allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

v) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è superiormente limitata allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

vi) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e definitivamente $b_n \geqslant b > 0$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = +\infty$$

vii) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e definitivamente $b_n \geqslant b > 0$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = -\infty$$

viii) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e definitivamente $b_n \leqslant b < 0$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = -\infty$$

ix) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e definitivamente $b_n \leqslant b < 0$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = +\infty$$

Dimostrazione - Vediamo, a titolo di esempio, il punto *vi)*, essendo le altre dimostrazioni molto simili: per ogni $M \in \mathbf{R}$ (in particolare per ogni $M > 0$) esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geqslant N$. Allora

$$a_n b_n > Mb \qquad \text{per ogni } n \geqslant N. \qquad \square$$

Esempio 1.14. - Vediamo due esempi nei quali, date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, la seconda non ha limite, ma la somma o il prodotto hanno limite.
1. $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n$, $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$
2. $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n + 2$, $\lim_n a_n b_n = +\infty$

Attenzione! Nei seguenti casi (ma anche in molti altri, tutti quelli non contemplati precedentemente) non si può dire nulla in generale. Se

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad$ e $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$
   non si può, in generale, concludere nulla riguardo
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n).$$
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad$ e $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$
   non si può, in generale, concludere nulla riguardo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad$ e $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
   non si può, in generale, concludere nulla riguardo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$
4. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
   non si può, in generale, concludere nulla riguardo
$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n.$$

Esempi:

1. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = -n^k$. Allora
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = +\infty \qquad \text{se } k=1,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = 0 \qquad \text{se } k=2,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = -\infty \qquad \text{se } k=3.$$
2. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = n^k$. Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty \qquad \text{se } k=1,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad \text{se } k=2,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{se } k=3.$$
3. Si considerino, come sopra, $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^k}$, con $k = 1, 2, 3$.
4. Si considerino $a_n = n^2$ e $b_n = \frac{1}{n^k}$, ancora con $k = 1, 2, 3$.

Altro fatto: data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si ha

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} 1. & \displaystyle\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = 0, \\ 2. & \displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|a_n|} = +\infty. \end{array}$$

Dimostrazione - 1. Si osservi che se
$$\lim_{n\to+\infty}a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty}a_n = -\infty$$
in particolare si abbia $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$ (mentre il viceversa non è vero). Per ipotesi abbiamo che per ogni $M > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $|a_n| > M$ per ogni $n \geqslant N$. Questo è equivalente a
$$0 < \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M} \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$
Allora, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, è sufficiente scegliere $M = 1/\varepsilon$ per ottenere la tesi.
2. EX $\square$

Osservazione 1.15. - Si osservi come, in generale, data una successione $\{c_n\}_n$, si ha che
$$\lim_{n\to+\infty}c_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty}|c_n| = 0.$$

Esempio 1.16. - Sia $\{a_n\}_n$ una delle tre successioni
$$a_n = n, \qquad a_n = -n, \qquad a_n = (-1)^n n.$$
In tutti i casi si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Viceversa si supponga

$$a_n = (-1)^n n$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{non esiste, ma}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty.$$

Conseguenza di (5) **-** Se $\{a_n\}_n$ è limitata e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty.$$

Teorema 1.17 (dei due carabinieri)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tre successioni per le quali valgano*

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \qquad \textit{definitivamente}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbf{R}.$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

Dimostrazione - Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N_1,$$
$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N_2.$$

Prendendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ in particolare si ha

$$\ell - \varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N$$

da cui si conclude. □

Si osservi che nel precedente teorema si assume che i limiti di $\{a_n\}_n$ e di $\{b_n\}_n$ siano <u>finiti</u> (oltre che uguali). Il risultato che segue, oltre a fornirci una informazione più generale, contempla il caso "infinito". Infatti si otterranno le due implicazioni

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Teorema 1.18 (del confronto)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ due successioni regolari. Se*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \textit{definitivamente}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Dimostrazione - Consideriamo dapprima il caso in cui entrambi i limiti siano finiti. Siano rispettivamente α e β i limiti di $\{a_n\}_n$ e di $\{b_n\}_n$ e supponiamo per assurdo che $\alpha > \beta$. Allora la successione $\{a_n - b_n\}_n$, che ha limite $\alpha - \beta$, avrebbe limite positivo. Per il teorema della permanenza del segno si avrebbe allora che

$$a_n - b_n > 0 \qquad \text{definitivamente}$$

Ma questo è impossibile.
Vediamo brevemente il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$: se per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_n > M \qquad \text{per ogni } n \geqslant N$$

in particolare si ha che

$$b_n > M \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Poiché ciò vale per ogni M si conclude che $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Analogamente si mostra il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.
I casi in cui $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ e in cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ sono ovvi. $\square$

Osservazione 1.19. - Si faccia attenzione che se $a_n < b_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}}$, non si può concludere che $\alpha < \beta$, ma solamente che $\alpha \leqslant \beta$.
Ad esempio, si considerino

$$a_n = -\frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Si ha che $a_n < b_n$, ma $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Osservazione 1.20. - Si consideri una successione $\{a_n\}_n$ ed A l'insieme dei suoi punti di accumulazione (che potrebbe essere anche vuoto). Supponiamo che A sia non vuoto e sia $\ell \in A$: allora, per definizione, per ogni $r > 0$ si ha che

$$\big((\ell - r, \ell) \cup (\ell, r + \ell)\big) \cap \{a_n\}_n \neq \emptyset.$$

Scegliendo $r = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbf{N}^*$, si ottiene che per ogni k esiste un elemento della successione, che denotiamo con a_{n_k}, tale che

$$\ell - \frac{1}{k} < a_{n_k} < \ell + \frac{1}{k}.$$

Usando il teorema dei due carabinieri e i fatti, già visti, che $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ e che $\lim_{k\to+\infty} \left(-\frac{1}{k}\right) = 0$, si ottiene $\lim_k a_{n_k} = \ell$. Si può quindi concludere che per ogni punto ℓ di accumulazione per $\{a_n\}_n$ esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$ di $\{a_n\}_n$ che converge a ℓ.

Si osservi che se anche A fosse fatto da un solo punto non è detto che tutta la successione converga a tale punto. Esempio:

$$a_n := \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

La sottosuccessione indicizzata con indici dispari converge all'unico punto di accumulazione.

Osservazione 1.21. - Si osservi che la successione $a_n = (-1)^n$ non ha punti di accumulazione, ma esiste una sottosuccessione (costante) che converge ad 1, quella indicizzata dai naturali pari, ed un'altra che converge a -1.

2. Successioni monotone

Definizione 2.1. *Una successione $\{a_n\}_n$ è detta* (strettamente) monotona *se*

$$\begin{array}{llll} a_{n+1} \leqslant a_n & \textit{oppure} & a_{n+1} \geqslant a_n & \textit{per ogni } n \in \mathbf{N} \\ (a_{n+1} < a_n & \textit{oppure} & a_{n+1} > a_n & \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}). \end{array}$$

Nel primo caso si dice (*strettamente*) *decrescente, nel secondo* (*strettamente*) *crescente.*

Teorema 2.2. *Una successione monotona ammette limite.*
Se $\{a_n\}_n$ è crescente $\lim_n a_n = \sup\{a_n\}_n$,
Se $\{a_n\}_n$ è decrescente $\lim_n a_n = \inf\{a_n\}_n$.

Dimostrazione - Supponiamo, senza ledere la generalità, che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sia crescente. Si consideri $\sup\{a_n\}_n$ e si supponga dapprima che tale estremo sia $L \in \mathbf{R}$. Dalla caratterizzazione vista per l'estremo superiore si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_N > L - \varepsilon.$$

Dalla monotonia di $\{a_n\}_n$ si ha che

$$a_n \geqslant a_N \qquad \text{per ogni } n \geqslant N$$

e in particolare

$$a_n > L - \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

D'altra parte $a_n \leqslant L < L + \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi infine, scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario, si è trovato $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N,$$

cioè $\lim_n a_n = L$.
Nel caso in cui $\sup\{a_n\}_n = +\infty$ si ha che per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_N > M \qquad \text{per ogni } n \geqslant N$$

e dalla monotonia si ha che

$$a_n \geqslant a_N > M \qquad \text{per ogni } n \geqslant N,$$

da cui $\lim_n a_n = +\infty$. □

Corollario 2.3. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione monotona. Se una sua sottosuccessione ha limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ anche $\{a_n\}_n$ ha limite ℓ.*

Dimostrazione - Dal Teorema 2.2 $\{a_n\}_n$ ammette limite L. Dal Teorema 1.7 ogni sua sottosuccessione ha limite L. Ma allora $L = \ell$. □

Esercizio 2.4. - Si dimostri, usando il Teorema 1.7 e il Teorema 2.2, che per $a > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \log_a n = +\infty.$$

Suggerimento: si consideri la sottosuccessione $\log_a n^2$.

Soluzione - Si è visto che per $a > 1$ la funzione $x \mapsto \log_a x$ è strettamente crescente. Di conseguenza la successione

$$a_n := \log_a n, \quad n \in \mathbf{N}^*, \qquad \text{è strettamente crescente.}$$

Per il Teorema 2.2 la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite e tale limite è il suo estremo superiore. Dal momento che $\{a_n\}_n$ è (definitivamente) positiva si avrà che

$$\sup\{a_n\}_n = \ell \in \mathbf{R}, \ell > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sup\{a_n\}_n = +\infty.$$

Escludiamo il primo caso supponendo per assurdo che $\ell \in (0, +\infty)$. Poiché $\{a_n\}_n$ ammette limite, ogni sua sottosuccessione ammette limite ed è ℓ (Teorema 1.7). Allora la sottosuccessione $\{a_{n^2}\}_n$ ha limite ℓ. Siccome

$$a_{n^2} = \log_a n^2 = 2 \log_a n = 2a_n$$

passando al limite si ottiene che

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_{n^2} = \lim_{n \to +\infty} 2a_n = 2\ell.$$

Ma ciò è impossibile se $\ell \in (0, +\infty)$. Quindi $\sup\{a_n\}_n = +\infty$.

Per $0 < a < 1$ si ragiona allo stesso modo.

3. Alcuni esempi significativi

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}^*)$

  Si deduce dall'Esempio 1.5.1 e da (5).

- Dato un polinomio p di grado k, sia $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} p(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

  Dimostrazione - Supponiamo che $a_k > 0$: si ha

$$p(n) = n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + a_{k-2}\frac{1}{n^2} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right).$$

  Il termine tra parentesi, per il punto precedente e per le operazioni che si possono fare con i limiti, tende a a_k, mentre n^k diverge a $+\infty$.

Il prodotto divergerà a $+\infty$ (se a_k fosse negativo il prodotto divergerebbe a $-\infty$). $\square$

- Dati due polinomi p e q,

$$p(n) = n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0,$$
$$q(n) = n^h + b_{h-1}n^{h-1} + \ldots + b_1 n + b_0,$$

$(h, k \in \mathbf{N}^*)$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \\ 1 & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k < h \end{cases}$$

Dimostrazione - Si raccoglie, sia a numeratore che a denominatore, n^m dove $m = \min\{h, k\}$. Vediamo, ad esempio, il caso in cui $h < k$. Si ha che

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\cancel{n^k}\left(n^{k-h} + a_{k-1}n^{k-h-1} + \ldots + \frac{a_0}{n^h}\right)}{\cancel{n^k}\left(1 + b_{h-1}\frac{1}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}\right)}.$$

A questo punto il denominatore converge a 1 e il numeratore diverge a $+\infty$. Gli altri casi sono analoghi. Se i polinomi non sono monici si procede analogamente. $\square$
Esempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3 + 3n^2 - 12}{2n^3 - 7n + 5} = \frac{5}{2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-5n^3 + 3n^2 - 12}{2n^2 - 7n + 5} = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + 3n - 12}{2n^3 - 7n + 5} = 0.$$

- La successione geometrica $a_n = a^n$ con $a \in \mathbf{R}$

diverge a $+\infty$	se $a > 1$,
converge a 0	se $-1 < a < 1$,
è indeterminata se	se $a \leqslant -1$.

Dimostrazione - Se $a > 1$ allora $a = 1+b$ con $b > 0$. La disuguaglianza di Bernoulli ci fornisce la stima

$$a^n = (1 + b)^n \geqslant 1 + nb.$$

Usando il teorema del confronto e le operazioni con i limiti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \geqslant \lim_{n\to+\infty}(1 + nb) = +\infty.$$

Passiamo ora al caso $a \in (-1,1)$. Se $a = 0$ la tesi è ovvia, sia quindi $a \neq 0$ e si consideri la successione

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n \qquad \left(\frac{1}{|a|} > 1\right).$$

Per quanto detto precedentemente si ha che

$$\lim_n \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty.$$

Da (5) si deduce che $\lim_n |a|^n = 0$ e quindi, per esempio usando il teorema dei due carabinieri oppure usando l'Osservazione 1.15,

$$-|a|^n \leqslant a^n \leqslant |a|^n,$$

si deduce che anche $\lim_n a^n = 0$.
Sia infine $a \leqslant -1$: si ha che

$$a^n = \begin{cases} \ \ |a|^n & \text{se } n \text{ pari,} \\ -|a|^n & \text{se } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

di conseguenza, poiché $\lim_n |a|^n = +\infty$, la successione risulta indeterminata. $\square$

- Dati $a > 1$ e $k \in \mathbf{N}$ si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.

Teorema 3.1 (criterio del rapporto per successioni)**.** *Data una successione $\{a_n\}_n$ a termini positivi tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

si ha che

$$\begin{array}{lcl} \textit{se } \ell > 1 \ (\textit{anche } +\infty) & \Longrightarrow & \lim_n a_n = +\infty \\ \textit{se } 0 \leqslant \ell < 1 & \Longrightarrow & \lim_n a_n = 0. \end{array}$$

Dimostrazione - Sia $\ell > 1$, $\ell \in \mathbf{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Poiché $\ell > 1$ possiamo scegliere ε in modo tale che $\ell - \varepsilon > 1$: di conseguenza si ottiene

$$a_{n+1} > (\ell - \varepsilon) a_n > a_n$$

per cui $\{a_n\}_n$ è definitivamente crescente e, di conseguenza, ammette limite e tale limite è $\sup\{a_n\}_n$. Mostriamo che tale estremo superiore è $+\infty$. Se per assurdo si avesse $\sup\{a_n\}_n = L \in \mathbf{R}$ si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ma questo è impossibile. Gli altri casi sono analoghi e lasciati per esercizio. □

Osservazione 3.2. - Si osservi come nel caso in cui $\ell = 1$ non si possa dire nulla. Per convincersene è sufficiente considerare i due esempi

$$a_n = n, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

A questo punto per concludere è sufficiente applicare il criterio alla successione

$$a_n := \frac{a^n}{n^k}.$$

Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a\,\frac{n^k}{(n+1)^k} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = a\left(\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^k$$

il cui limite, per $n \to +\infty$, è a.
Diversamente lo stesso risultato si può ottenere dallo sviluppo del binomio di Newton: si ha che

$$(n+1)^k = \sum_{h=1}^{k} \binom{n}{h} n^h = n^k + k\,n^{k-1} + \ldots$$

per cui, dal limite del rapporto di polinomi vista sopra, si ottiene che il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = 1\,.$$

- Dati $a > 1$ e $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\beta} = +\infty$.

  Dimostrazione - Basta osservare che $n^\beta > n^{[\beta]}$. □

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

  Usando lo sviluppo del binomio di Newton si è mostrato che

$$(1+h)^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}\,h^2.$$

  Poiché $\sqrt[n]{n} > 1$ possiamo scrivere, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \qquad \text{da cui } n = (1+h_n)^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}\,h_n^2$$

  e di conseguenza

$$0 \leqslant h_n^2 \leqslant \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Poichè $h_n \to_n 0$ si conclude che $\sqrt[n]{n} \to_n 1$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$.

Dimostrazione - Supponiamo $a \neq 1$, altrimenti la cosa è ovvia. Supponiamo dapprima $a > 1$: allora definitivamente si ha $a < n$ da cui

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Usando il teorema dei due carabinieri si conclude.
Se $0 < a < 1$ si può considerare $b = 1/a > 1$: allora

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

da cui si conclude. $\square$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

EX - Si può dimostrare che la successione $a_n = \sqrt[n]{n!}$ è strettamente crescente.
Un modo per vederlo è il seguente: prima di tutto si osservi che $n > \sqrt[n]{n!}$. Infatti

$$n > \sqrt[n]{n!} \quad \Longleftrightarrow \quad n^n > n!.$$

Allora si ha anche che $n + 1 > \sqrt[n]{n!}$ da cui, moltiplicando per $n!$, si ottiene

$$(n+1)! > n!\,\sqrt[n]{n!} = (n!)^{\frac{n+1}{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} > (n!)^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione - Si supponga per ora che n sia pari. Scrivendo

$$n! = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{\frac{n}{2}\text{ termini}} \cdot \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\frac{n}{2}\text{ termini}}$$

si ottiene

$$n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{\frac{n}{2}} \to_n +\infty.$$

Se n è dispari si verifica in modo simile che

$$n! > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{n!} > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}} > \sqrt{\frac{n+1}{2}} > \sqrt{\frac{n}{2}}$$

per cui qualunque sia n si ha $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}/\sqrt{2}$. $\square$

Osservazione 3.3. - Visto che la sottosuccessione di indici pari di $\sqrt[n]{n!}$ diverge a $+\infty$ usando l'esercizio precedente e il Corollario 2.3 si potrebbe concludere senza eseguire una stima sui termini di indice dispari.

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

  È sufficiente osservare che
  $$\frac{n \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot n} < \frac{1}{n}.$$

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.

  Sia k la parte intera di a: chiamiamo C_a la costante
  $$C_a = \left| \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}^{k \text{ termini}}}{k \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right|.$$
  A questo punto, poiché a/m al variare di m tra $k+1$ e n è minore di 1,
  $$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left| \frac{a}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{(k+1)} \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}^{k \text{ termini}}}{k \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right| \leqslant C_a \left| \frac{a}{n} \right| \to_n 0.$$

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ per ogni $a > 0$, $a \neq 1$.

  Per mostrare questo risultato abbiamo bisogno di un'informazione che sarà fornita più avanti (si veda il paragrafo 5). Dando per scontata questa informazione, che è la seguente:
  $$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad \text{è superiormente limitata}$$
  e in particolare $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, vediamo la dimostrazione. Chiamiamo a_n la successione $\frac{\log_a n}{n}$ e mostriamo che a_n è decrescente quando $a > 1$ (per $0 < a < 1$ la successione sarà negativa e crescente). Mostrare che $a_{n+1} < a_n$ è equivalente a mostrare che $a_{n+1} - a_n < 0$.
  $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\log_a (n+1)}{n+1} - \frac{\log_a n}{n} = \frac{n \log_a (n+1) - (n+1) \log_a n}{(n+1)n} = \\ &= \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n < \\ &< \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{3}{n} < 0 \qquad \text{definitivamente} \quad (\text{ricordo: } a > 1) \end{aligned}$$
  cioè
  $$a_{n+1} - a_n < 0, \qquad \text{cioè} \qquad \{a_n\}_n \text{ è definitivamente decrescente.}$$
  Inoltre $a_n > 0$, per cui il limite di $\{a_n\}_n$ esiste finito ed è non negativo. Chiamiamolo $\ell \geqslant 0$. Si tratta ora di trovarlo. Si osservi

che

$$a_{n^2} = \frac{\log_a n^2}{n^2} = \frac{2}{n}\,\frac{\log_a n}{n} = \frac{2}{n}\,a_n.$$

Poiché $\{a_n\}_n$ ammette limite ed ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite, si ottiene

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\,a_n = 0\cdot\ell = 0.$$

Se $0<a<1$: poiché vale

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

basta considerare $-\log_{\frac{1}{a}} n$ anziché $\log_a n$.

In maniera analoga si dimostra

$$\frac{\log_a n^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha,\beta>0.$$

- Infine riportiamo (senza dimostrarla) una versione della formula di Stirling, risultato che può essere utile quando si fanno confronti con il fattoriale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Riportiamo qui un breve elenco dei principali confronti fra successioni che hanno tutte limite $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha,\beta>0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \qquad a>1,\ \alpha>0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

4. Successioni limitate e di Cauchy

Teorema 4.1. *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

Esempio 4.2. - La successione $a_n = (-1)^n$ è limitata e indeterminata, però la sua sottosuccessione $\{a_{2n}\}_n$ è convergente.

Dimostrazione - Data $\{a_n\}_n$ esistono $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha_0 \leqslant a_n \leqslant \beta_0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

In almeno uno dei due intervalli

$$\left[\alpha_0, \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}, \beta_0\right]$$

cascano infiniti termini della successione. Chiamiamo $[\alpha_1, \beta_1]$ tale intervallo, o uno dei due se in entrambi cascano infiniti elementi. Si osservi che

$$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}.$$

Dividendo ulteriormente a metà si avrà che in almeno uno dei due intervalli

$$\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1\right]$$

cascano infiniti termini della successione. Chiamiamo $[\alpha_2, \beta_2]$ tale intervallo (ne scegliamo uno se in entrambi cascano infiniti elementi). Si osservi che

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{4}.$$

Iterando il procedimento si ottengono due successioni

$$\{\alpha_j\}_{j\in\mathbf{N}} \quad \text{crescente} \quad \text{e} \quad \{\beta_j\}_{j\in\mathbf{N}} \quad \text{decrescente}$$

con la proprietà

$$\beta_j - \alpha_j = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^j}.$$

Ora per trovare una sottosuccessione convergente è sufficiente scegliere, per ogni $j \in \mathbf{N}$,

$$a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j].$$

Dalla monotonia di $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ e $\{\beta_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ si ottiene che le due successioni ammettono limite. Poichè $\alpha_j \leqslant \beta$ e $\beta_j \geqslant \alpha$ per ogni $j \in \mathbf{N}$ tali limiti sono finiti. Inoltre, poiché

$$\lim_{j\to+\infty} (\beta_j - \alpha_j) = 0,$$

tali limiti sono uguali. Dal fatto che

$$\alpha_j \leqslant a_{n_j} \leqslant \beta_j$$

si conclude usando il teorema dei due carabinieri. □

Osservazione 4.3. - Attenzione! Se $\lim_n (a_n - b_n) = 0$ non significa che $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ ammettano limite.
Esempio: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$.

Definizione 4.4. *Una successione $\{a_n\}_n$ è detta di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \textit{per ogni } n, m \geqslant N. \tag{6}$$

Osservazione 4.5. - Si osservi che una successione di Cauchy è limitata. La dimostrazione (non a caso, visto il teorema che segue) è uguale a quella del Torema 1.12: fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n, m \geqslant N.$$

Considerando l'insieme

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_{N-1}, a_N + \varepsilon, a_N - \varepsilon\}$$

si ha che

$$\min A \leqslant a_n \leqslant \max A \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

visto che, in particolare, si ha $|a_n - a_N| < \varepsilon$ per ogni $n \geqslant N$.

Teorema 4.6. *Una successione $\{a_n\}_n$ è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione - ($\Rightarrow$) Supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Allora, considerando $n, m \geqslant N$, si ha

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \ell) - (a_m - \ell)| \leqslant |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon$$

per ogni $n, m \geqslant N$.
($\Leftarrow$) Poiché $\{a_n\}_n$ è limitata, $\{a_n\}_n$ ammette una sottosuccessione convergente, sia essa $\{a_{n_j}\}_j$, $\lim_{j \to +\infty} a_{n_j} = \ell \in \mathbf{R}$. Poiché è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_1 \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n, m \geqslant N_1.$$

In corrispondenza dello stesso ε esiste anche N_2 tale che

$$|a_{n_j} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n_j \geqslant N_2.$$

Scegliendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ si ottiene che

$$|a_n - \ell| \leqslant |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n, n_j \geqslant N.$$

In particolare si è mostrato che, fissato ε arbitrario, si è trovato N tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per $n \geqslant N$ □

Osservazione 4.7. - Supponiamo che $\{a_n\}_n$ sia di Cauchy, cioè fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che valga (6). In particolare (6) vale anche per $m = n + p$ con $p \in \mathbf{N}$ e quindi possiamo riscrivere (6) in maniera equivalente come segue:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N, \text{per ogni } p \in \mathbf{N}.$$

Di conseguenza passando all'estremo superiore si ottiene

$$\sup_{p \in \mathbf{N}} |a_n - a_{n+p}| \leqslant \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Si osservi che quello che abbiamo scritto significa che

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{p\in\mathbf{N}}|a_n-a_{n+p}|\Big)=0. \tag{7}$$

Quindi una successione è di Cauchy se e solo se soddisfa (per definizione) (6), se e solo se ammette limite finito e se e solo se soddisfa (7).

5. Una successione particolare: $a_n=\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$

Vediamo in questo paragrafo la famiglia di successioni, dipendenti da un parametro $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$,

$$x_n:=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Un caso particolare sarà quello con $x=1$ e precisamente

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n\in\mathbf{N}^*.$$

Vediamo innanzitutto che tale successione è strettamente crescente. Utilizziamo per fare ciò la disuguaglianza delle medie (si veda il Capitolo 3 - Il principio di induzione) che qui ricordiamo: dati k numeri $y_1,\dots y_k$ positivi si ha che

$$\sqrt[k]{y_1\cdot\ldots\cdot y_k}\leqslant\frac{y_1+\ldots+y_k}{k} \tag{8}$$

e la disuguaglianza è stretta se e solo se i numeri y_i non sono tutti uguali. Una volta fissato $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$, consideriamo

$$k=n+1$$

e prendiamo

$$y_1=\ldots=y_n=1+\frac{x}{n}, \quad y_{n+1}=1.$$

Si osservi che i numeri y_i non sono necessariamente positivi, condizione per avere (8), ma

$$y_i>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x>-n \quad (n>-x). \tag{9}$$

Non essendo gli y_i tutti uguali si ha che la disuguaglianza (8) risulta essere stretta, cioè si ha

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}<\frac{1}{n+1}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)+\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{n\text{ volte}}+1\Bigg]=\frac{1}{n+1}\Big[n+1+x\Big]$$

da cui, elevando a $n+1$, si ricava

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

cioè la successione $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è definitivamente strettamente crescente e, per la condizione (9), precisamente si ha

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_n \qquad \text{è strettamente crescente se } x>0$$

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_n \qquad \text{è definitivamente strettamente crescente se } x<0$$

Si osservi inoltre che da quanto appena ottenuto la successione

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \qquad \text{è (definit.) strettamente decrescente.}$$

Prendiamo ora in esame due casi particolari: quelli con $x=1$ e con $x=-1$ e definiamo

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_k := \left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k}.$$

Si verifica facilmente che

$$a_n \leqslant b_k \qquad \text{per ogni } n,k \in \mathbf{N}^*. \tag{10}$$

Verificare la precedente disuguaglianza è equivalente a risolvere:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{k}\right)^k \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leqslant 1.$$

Se $n \leqslant k$ usiamo la monotonia della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ per dedurre che

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \left(\frac{k^2-1}{k}\right)^k.$$

Il termine a sinistra è ovviamente minore di 1, da cui

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{k-1}{k}\right)^k < 1.$$

Nel caso in cui $n \geqslant k$ si ragiona analogamente e si ottiene

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leqslant \left(\frac{n^2-1}{n}\right)^n < 1.$$

Per cui $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata e $\{b_k\}_k$ è inferiormente limitata. Poiché $\{a_n\}_n$ è crescente ammette limite, poiché è superiormente limitata tale limite è finito.

Chiameremo e questo numero, per cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Si è visto che anche la successione

$$\tilde{b}_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

è strettamente crescente, per cui avrà limite. Di conseguenza la successione

$$b_n = \left(\tilde{b}_n\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

sarà strettamente decrescente, e poiché è inferiormente limitata (si veda (10)) avrà limite finito. Si osservi che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = $$
$$= \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

per cui

(11) $$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Il numero e è irrazionale e le sue prime cifre decimali sono

$$2,71828...$$

ma anche senza conoscere esplicitamente il suo valore si può affermare che

$$2 < e < 3.$$

Infatti valutando a_n per $n = 1$ si ottiene il valore 2, da cui $e > 2$, valutando b_n per $n = 6$ si ottiene $(5/6)^{-6}$ che è circa $2,98$, da cui $e < 3$.

In generale, data una successione

$$\{c_n\}_n, \quad \text{crescente e tale che} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty,$$

si ha

(12) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e.$$

La verifica è immediata: infatti

$$[c_n] \leqslant c_n < [c_n]+1$$

per cui da una parte

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]}\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right),$$

d'altra parte

$$\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \geqslant \left(1+\frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]} = \left(1+\frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]+1}\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{-1}.$$

Poiché se $\{c_n\}_n$ è crescente (ma la cosa vale in generale)

$$\left\{\left(1+\frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]}\right\}_n$$

è una sottosuccessione di $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ avrà lo stesso limite di $\{a_n\}_n$, per cui passando al limite si ottiene il risultato cercato.

Ovviamente si ottiene anche

(13) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = e.$$

Basta procedere come fatto per ottenere (11).

Per quanto riguarda la successione x_n dividiamo lo studio in due casi. Non dimostreremo qual è il suo limite, o meglio lo mostreremo utilizzando una proprietà che ancora non abbiamo visto:
se una successione $\{a_n\}_n$ converge ad a allora la successione $\{a_n^x\}_n$ converge ad a^x.
Consideriamo dapprima $x > 0$: utilizzando (12) si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x.$$

Se invece $x < 0$ basta scrivere

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{(-x)}{n}\right)^{-\frac{n}{(-x)}}\right]^x$$

e concludere usando il limite per $x > 0$ e (13).

Esercizio - Si dica qual è la più grande tra le due quantità

$$n^{n+1} \qquad \text{e} \qquad (n+1)^n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Si ha che

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$$

che è definitivamente minore di 1, per cui

$$(n+1)^n < n^{n+1} \qquad \text{per (almeno) ogni } n > 3.$$

Approfondimento - Ancora sulla base naturale e.
Supponiamo che un capitale C venga investito per un anno. È più conveniente ricevere un interesse j dopo un anno oppure un interesse $j/2$ ogni sei mesi?

Soluzione - Dopo un anno si ha che il capitale è $C + jC = C(1 + j)$ se l'interesse viene dato tutto assieme dopo un anno. Se invece dopo sei mesi si ottiene un interesse di $j/2$ si ha alla scadenza dei sei mesi un capitale pari a

$$C + \frac{j}{2}C = C(1 + j/2)$$

e dopo altri sei mesi

$$[C(1 + j/2)] + [C(1 + j/2)]j/2 = C\left(1+\frac{j}{2}\right)^2.$$

Si vede facilmente (e si è dimostrato) che $1 + j < (1 + j/2)^2$. Se l'interesse maturato venisse pagato, e quindi reinvestito assieme al capitale iniziale, ogni mese si otterrebbe a fine anno

$$C\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}.$$

Analogamente, se l'interesse venisse pagato giornalmente, reinvestendo dopo un anno si avrebbe

$$C\left(1+\frac{j}{365}\right)^{365}.$$

Se l'accredito fosse *istantaneo*, il capitale maturerebbe diventando dopo un anno

$$Ce^j.$$

6. Alcuni limiti particolari: limiti notevoli

Vediamo ora alcuni limiti particolari, detti a volte "notevoli". In tutta la trattazione di questi limiti con $\{a_n\}_n$ si denoterà una successione con la proprietà

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

1. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$
2. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$
3. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$
4. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}-1}{a_n} = \log b \qquad (\log = \log_e)$
5. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$
6. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^p-1}{a_n} = p, \qquad p \in \mathbf{R}.$

Osservazione 6.1. - Osserviamo la seguente cosa: date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ per le quali si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R},$$

allora necessariamente

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Infatti si ottiene che, scelto $\varepsilon > 0$, definitivamente vale $(\ell-\varepsilon)a_n < b_n < (\ell+\varepsilon)a_n$ e dal teorema dei due carabinieri si conclude.

Da ciò, una volta mostrati i limiti 1.-6., si concludono i seguenti fatti: data $\{a_n\}_n$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} a_n = 0,\\
&\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1,\\
&\lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = 1,\\
&\lim_{n\to+\infty} \log(1+a_n) = 0.
\end{aligned}$$

Vediamo le dimostrazioni.

1. Si consideri $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vale allora
$$0 < \operatorname{sen} x < x.$$
Se invece $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ vale
$$x < \operatorname{sen} x < 0.$$
In entrambi i casi si ottiene $0 < \operatorname{sen}^2 x < x^2$. Riscrivendo $\operatorname{sen}^2 x$ come $1 - \cos^2 x$ si ha
$$0 < 1 - \cos^2 x < x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$1 - x^2 < \cos^2 x < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{1 - x^2} < \cos x < 1.$$
Valutando il tutto per $x = a_n$ si ha
$$\sqrt{1 - a_n^2} < \cos a_n < 1$$
e passando al limite, usando il teorema dei due carabinieri, si ha
$$\lim_{n \to +\infty} \cos a_n = 1.$$
Ora, poiché
$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \\ x < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < x < \operatorname{sen} x < 0, \end{aligned}$$
in entrambi i casi si ha
$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$
Allora, usando il teorema dei due carabinieri in
$$\cos a_n < \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} < 1,$$
si conclude.

2. Scriviamo
$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}$$
da cui
$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}.$$
Da quanto visto al punto 1. si ha
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \cos a_n} = \frac{1}{2}.$$

3. Dalla monotonia della successione $\{x_n\}_n$ del paragrafo precedente si ha

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x, \qquad \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} > e^x \qquad (x \neq 0).$$

Valutando entrambe per $n = 1$ si ottengono

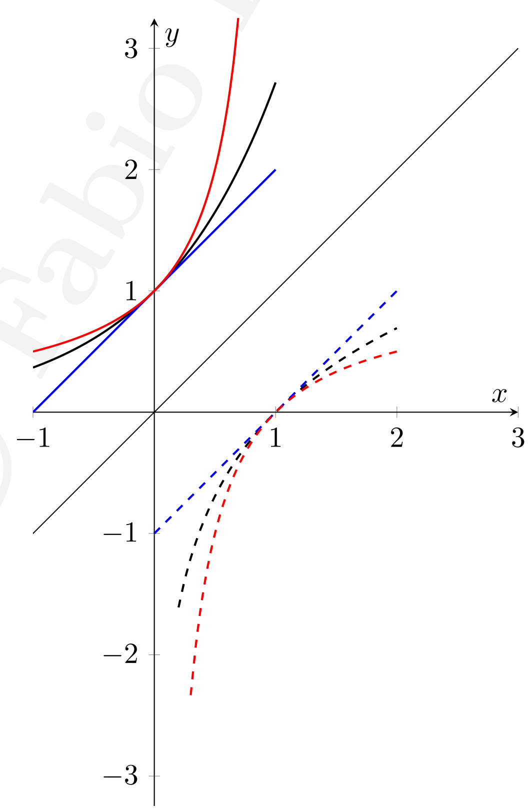
$$1 + x < e^x \qquad \text{e} \qquad e^x < (1-x)^{-1} \tag{14}$$

da cui

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad 1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x}, \\ x < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{1-x} < \frac{e^x - 1}{x} < 1. \end{aligned}$$

Valutando in a_n e utilizzando il teorema dei due carabinieri si ottiene la tesi.
Di seguito i grafici delle funzioni $x \mapsto e^x$ (in nero), $x \mapsto x+1$ (in blu), $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (in rosso), per mostrare (14).

Figura 1



4. EX - (Suggerimento: si scriva $b = e^{\beta}$ per qualche β)

5. In Figura 1 sono riportati, tratteggiati, anche i grafici delle inverse delle tre funzioni evidenziate in nero, rosso, blu. Per ricavare le disuguaglianze analoghe a (14) sulle inverse dobbiamo invertire le funzioni (che sono strettamente crescenti).
Per far ciò basta porre $y = f(x)$ ed esprimere x in termini di y:
$$y = x + 1 \iff x = y - 1;$$
$$y = e^x \iff x = \log y;$$
$$y = \frac{1}{1-x} \iff x = 1 - \frac{1}{y}.$$
Da ciò si ottengono le disuguaglianze, per $y \neq 1$,
$$1 - \frac{1}{y} < \log y < y - 1.$$
Se al posto di y ora mettiamo $1+x$ (per nostra comodità) otteniamo infine, per $x \neq 0$,
$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} < \log(1+x) < x.$$
Si noti come la seconda di queste due si sarebbe ottenuta facilmente anche da (14). A questo punto dividendo per $x > 0$ si ottiene
$$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1,$$
dividendo per $x < 0$ si ottiene
$$1 < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}.$$
Inserendo a_n al posto di x, passando al limite ed usando il teorema dei due carabinieri si conclude.

6. Scrivendo
$$\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = \frac{e^{\log(1+a_n)^p} - 1}{a_n} = \frac{e^{p\log(1+a_n)} - 1}{a_n}$$
e chiamando b_n la successione $p\log(1+a_n)$ (si osservi che la successione $\{b_n\}_n$ è infinitesima per l'Osservazione 6.1) si ottiene
$$\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = \frac{e^{b_n} - 1}{a_n} = \frac{e^{b_n} - 1}{b_n}\,\frac{b_n}{a_n}.$$
Ora, passando al limite, per il punto 3. si ottiene che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{b_n} - 1}{b_n} = 1;$$

mentre per il secondo fattore si ha, usando il punto 5.,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p\log(1+a_n)}{a_n} = p.$$