

5 - Successioni

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 22 OTTOBRE 2024

1. SUCCESSIONI E LORO LIMITI

Definizione 1.1. Una successione (reale) è una funzione $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$.

Solitamente si denota una successione con

$$\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$$

intendendo con a_n l'elemento $a(n)$ e con $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ l'insieme immagine di a , cioè l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ per cui } x = a(n)\}$.

Definizione 1.2 (limite di una successione). Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ammette limite $\ell \in \mathbf{R}$, e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tale che

$$(1) \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Ammette limite $+\infty$ ($-\infty$), e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad (-\infty)$$

se per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N = N(M) \in \mathbf{N}$ tale che

$$(2) \quad a_n > M \quad (a_n < M) \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

A volte per semplicità (visto che non ci può essere ambiguità) si scrive semplicemente

$$\lim_n a_n \quad \text{oppure} \quad \lim a_n \quad \text{anziché} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Osservazione 1.3. - Si consideri una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e si supponga di voler mostrare che tale successione ha limite $\ell \in \mathbf{R}$.

Se si riesce a mostrare che per un certo valore $\bar{\varepsilon}$ esiste $\bar{N} \in \mathbf{N}$ per il quale vale la condizione

$$|a_n - \ell| < \bar{\varepsilon} \quad \text{per ogni } n \geq \bar{N}$$

allora, gratuitamente, si ha che (1) vale per ogni $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ con $N = \bar{N}$.

Allo stesso modo se si vuole mostrare che il limite è $+\infty$ e si riesce a mostrare che in corrispondenza di un certo \bar{M} esiste $\bar{N} \in \mathbf{N}$ per il quale

$$a_n > \bar{M} \quad \text{per ogni } n \geq \bar{N}$$

allora la condizione (2) vale gratuitamente per ogni $M < \bar{M}$ con $N = \bar{N}$. Analogamente per il caso $-\infty$.

Teorema 1.4. *Se $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ammette limite tale limite è unico.*

Una successione si dice convergente se ammette limite e tale limite è finito.

Una successione si dice divergente se ammette limite e tale limite è infinito.

Una successione si dice regolare se ammette limite.

Una successione si dice indeterminata (o irregolare) se non ammette limite.

Qualche volta, per non fare sempre distinzioni tra il caso finito e il caso infinito, per comodità si dirà che una successione è regolare se ammette limite $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$ denotando con

$$\bar{\mathbf{R}} \text{ l'insieme } \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Questo, lo sottolineiamo, è solo un modo per sveltire qualche volta gli enunciati. $-\infty$ e $+\infty$ rimangono due simboli e non sono numeri.

Osservazione 1.5. - Si osservi (e lo si mostri per esercizio) che, data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ convergente a ℓ (quindi $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - \ell) = 0.$$

Esempio 1.6. -

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Per verificarlo si fissi $M \geq 0$ (è sufficiente considerare $M \geq 0$ anziché un generico $M \in \bar{\mathbf{R}}$ grazie all'Osservazione 1.3) e vediamo di trovare $N \in \mathbf{N}$ per cui valga (2). Ovviamente è sufficiente imporre la disuguaglianza

$$n > M$$

e scegliendo $N = [M] + 1$, dove $[M]$ indica la parte intera di M , si ottiene il naturale n cercato (ecco perché ci si è limitati a $M \geq 0$).

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad (k \in \mathbf{N}^*)$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Per verificarlo fissiamo $\varepsilon > 0$ e vediamo di trovare $N \in \mathbf{N}$ per cui valga (1). È sufficiente imporre la disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

e scegliendo $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ si conclude.

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ non esiste, lo vedremo più avanti (si veda l'Osservazione 1.9)

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-10} = 1$

Si osservi che per $n = 10$ la successione di cui si vuole calcolare il limite non è definita. Poco male: poiché stiamo considerando il limite per $n \rightarrow +\infty$ possiamo anche pensare $n > 10$.

Si fissi $\varepsilon > 0$. Cerchiamo N tale per ogni $n \geq N$ valga

$$\left| \frac{n+1}{n-10} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Questo è equivalente a (limitandoci a $n > 10$)

$$\left| \frac{11}{n-10} \right| < \varepsilon \iff n-10 > \frac{11}{\varepsilon}.$$

Per ciò è sufficiente scegliere un qualunque numero $N > 11/\varepsilon + 10$.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 6n + 1}{n^2 + n + 1} = 1$

Si fissi $\varepsilon > 0$. Cerchiamo N tale per ogni $n \geq N$ valga

$$\left| \frac{n^2 - 6n + 1}{n^2 + n + 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

cioè se

$$(3) \quad \frac{7n}{n^2 + n + 1} < \varepsilon.$$

Poiché

$$(4) \quad \frac{7n}{n^2 + n + 1} < \frac{7n}{n^2 + n} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}$$

se

$$\frac{7}{n} < \varepsilon$$

in particolare varrà (3). Quest'ultima disequazione è soddisfatta se

$$n > \frac{7}{\varepsilon}.$$

Basta quindi prendere

$$N = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Si osservi che senza la stima (4) possiamo concludere lo stesso, ma con qualche calcolo in più. Infatti da (3) abbiamo

$$\varepsilon n^2 + (\varepsilon - 7)n + \varepsilon > 0.$$

Risolvendo l'equazione $\varepsilon n^2 + (\varepsilon - 7)n + \varepsilon = 0$ ci si rende conto che scegliendo

$$n > \frac{1}{2} \left(\frac{7}{\varepsilon} - 1 + \frac{\sqrt{49 - 14\varepsilon - 3\varepsilon}}{\varepsilon} \right)$$

(3) è soddisfatta.

Definizione 1.7. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione e $\nu : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ una funzione (è una successione anche ν , ma a valori in \mathbf{N} !) strettamente crescente, cioè

$$\nu_{n+1} > \nu_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

La successione $\{a_{\nu_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ è detta sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Nel caso in cui ν sia l'identità, cioè $\nu_n = n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ ritroviamo la successione di partenza, diversamente si ha una successione $\{a_{\nu_n}\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Spesso, per semplicità, si indicizzano a loro volta gli indici per cui si scrive il valore $\nu(j)$ come indice:

$$\nu(1) = n_1, \nu(2) = n_2, \dots, \nu(k) = n_k, \dots$$

e quindi la sottosuccessione si scrive semplicemente

$$\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}.$$

Esempio: data $\{a_{\nu_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ e

$$\nu(0) = 1, \nu(1) = 3, \nu(2) = 7, \nu(3) = 12, \dots$$

i primi termini della sottosuccessione saranno quelli individuati dagli indici appena scritti sopra, nel breve elenco che segue quelli evidenziati in rosso:

$$a_0, \mathbf{a_1}, a_2, \mathbf{a_3}, a_4, a_5, a_6, \mathbf{a_7}, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \mathbf{a_{12}}, a_{13}, \dots$$

Un altro esempio, forse più chiaro, è il seguente: se

$$\nu(n) = 2n \quad \text{o} \quad n_j = 2j$$

la sottosuccessione $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ è il sottoinsieme $\{a_{2j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ degli elementi della successione di partenza di indice pari.

Teorema 1.8. Data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ successione, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ammette lo stesso limite.

Dimostrazione - Sia $\ell \in \mathbf{R}$ e sia $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

In particolare ciò vale per ogni $n_j \geq N$.

Se $\ell = +\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n \geq N$$

e quindi anche per ogni $n_j \geq N$. Analogamente se $\ell = -\infty$. \square

Osservazione 1.9. - Quest'ultimo risultato può essere utile in negativo, quando si vuole mostrare che una successione non ha limite.

Si supponga di congetturare che una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ non abbia limite. Se si riescono a trovare due sottosuccessioni $\{a_{\nu_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{a_{\mu_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ che abbiano limiti diversi, diciamo ℓ_1 e ℓ_2 (finiti o infiniti che siano), è evidente che la successione non ha limite. Infatti, per il teorema precedente, se $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ avesse limite ℓ ogni sua sottosuccessione avrebbe lo stesso limite. Ma se $\ell_1 \neq \ell_2$ questo non è possibile.

Esempio: data la successione definita da $a_n = (-1)^n$ non ha limite. È sufficiente considerare la sottosuccessione con indice pari, che ha come limite 1, e la sottosuccessione con indice dispari, che ha come limite -1 , per dimostrare che $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ non ha limite.

Dato un predicato $P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, diremo che P è vero *definitivamente* se esiste $n_o \in \mathbf{N}$ tale che

$$P(n) \quad \text{è vero per ogni } n \geq n_o.$$

Teorema 1.10 (della permanenza del segno). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione regolare. Se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell > 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

allora definitivamente si ha $a_n > 0$.

Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell < 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

allora definitivamente si ha $a_n < 0$.

Osservazione 1.11. - Attenzione! Il viceversa non vale! Ad esempio, si consideri la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}}$. Si ha

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dimostrazione - Vediamo solo il caso in cui il limite sia finito e positivo, gli altri casi sono lasciati per esercizio.

Al solito, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N,$$

cioè

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

È allora sufficiente scegliere ε in modo tale che $\ell - \varepsilon$ sia positivo (ad esempio: $\varepsilon = \ell/2$) ed in tal modo si ha che

$$a_n > 0 \quad \text{per ogni } n \geq N. \quad \square$$

Ripetiamo un concetto già visto per ogni funzione.

Definizione 1.12. Diciamo che una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è superiormente limitata, inferiormente limitata, limitata se esiste $M \in \mathbf{R}$ per cui valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} a_n &\leq M && \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \\ a_n &\geq M && \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \\ |a_n| &\leq M && \text{per ogni } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Teorema 1.13. Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione - Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Si consideri l'insieme finito

$$S = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\}$$

e siano $\alpha := \min S$ e $\beta := \max S$. Allora

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}. \quad \square$$

Osservazione 1.14. - Attenzione! Il viceversa non vale! Ad esempio la successione $(-1)^n, n \in \mathbf{N}$, è limitata, ma non convergente.

Operazioni con i limiti

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ due successioni rispettivamente convergenti ad a e a b ($a, b \in \mathbf{R}$). Allora

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b,$
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab,$
- iii) se $b \neq 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

Dimostrazione - i) Basta osservare che $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$

ii) Stimiamo la quantità $|a_n b_n - ab|:$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \leq \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|. \end{aligned}$$

Poiché $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è convergente, risulta limitata, diciamo $|a_n| \leq M$ per un qualche $M > 0$. Per cui si conclude da

$$|a_n b_n - ab| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a|.$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$ si ha che esistono $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tali che

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{per ogni } n \geq N_1, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b|} \quad \text{per ogni } n \geq N_2,$$

da cui

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

iii) Si supponga dapprima $a_n \equiv 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si osservi che

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right|.$$

Ora, dal teorema della permanenza del segno, si ha che

$$\begin{aligned} b > 0 &\implies b_n > 0 \text{ definitivamente,} \\ b < 0 &\implies b_n < 0 \text{ definitivamente,} \end{aligned}$$

per cui in entrambi i casi $b_n b$ è definitivamente positiva e (dal punto ii))

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n b = b^2.$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ possiamo dedurre che esiste $N_1 \in \mathbf{N}$ tale che

$$|b_n b - b^2| < \frac{b^2}{2},$$

cioè in particolare

$$b_n b > \frac{b^2}{2} \quad \text{definitivamente.}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N_2 \in \mathbf{N}$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{1}{|b_n b|} &< \frac{2}{b^2} && \text{per ogni } n \geq N_1, \\ |b_n - b| &< \varepsilon && \text{per ogni } n \geq N_2, \end{aligned}$$

da cui

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| < \frac{2}{b^2} \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Nel caso generale è sufficiente applicare quanto appena visto e il punto ii): infatti, ponendo $\beta_n = \frac{1}{b_n}$ si ha che $\frac{a_n}{b_n} = a_n \beta_n$. \square

Più in generale, date $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ due successioni, valgono i seguenti fatti. Ne dimostriamo solo uno, a titolo di esempio, lasciando gli altri da dimostrare per esercizio.

iv) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è inferiormente limitata allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

v) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è superiormente limitata allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

vi) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e definitivamente $b_n \geq b > 0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = +\infty$$

vii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ e definitivamente $b_n \geq b > 0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = -\infty$$

viii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e definitivamente $b_n \leq b < 0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = -\infty$$

ix) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ e definitivamente $b_n \leq b < 0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = +\infty$$

Dimostrazione - Vediamo, a titolo di esempio, il punto vi), essendo le altre dimostrazioni molto simili: per ogni $M \in \mathbf{R}$ (in particolare per ogni $M > 0$) esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq N$. Allora

$$a_n b_n > Mb \quad \text{per ogni } n \geq N. \quad \square$$

Esempio 1.15. - Vediamo due esempi nei quali, date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, la seconda non ha limite, ma la somma o il prodotto hanno limite.

1. $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n$, $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$
2. $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n + 2$, $\lim_n a_n b_n = +\infty$

Attenzione! Nei seguenti casi (ma anche in molti altri, tutti quelli non contemplati precedentemente) non si può dire nulla in generale. Se

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$
non si può, in generale, concludere nulla riguardo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
non si può, in generale, concludere nulla riguardo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$
non si può, in generale, concludere nulla riguardo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

4. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$
non si può, in generale, concludere nulla riguardo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

Esempi:

1. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = -n^k$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty \quad \text{se } k = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0 \quad \text{se } k = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty \quad \text{se } k = 3.$$

2. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = n^k$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \quad \text{se } k = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{se } k = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{se } k = 3.$$

3. Si considerino, come sopra, $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^k}$, con $k = 1, 2, 3$.
4. Si considerino $a_n = n^2$ e $b_n = \frac{1}{n^k}$, ancora con $k = 1, 2, 3$.

Altro fatto: data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0, \\ 2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty. \end{aligned}$$

Dimostrazione - 1. Si osservi che se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

in particolare si abbia $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$ (mentre il viceversa non è vero). Per ipotesi abbiamo che per ogni $M > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $|a_n| > M$ per ogni $n \geq N$. Questo è equivalente a

$$0 < \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M} \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Allora, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, è sufficiente scegliere $M = 1/\varepsilon$ per ottenere la tesi.

2. EX □

Osservazione 1.16. - Si osservi come, in generale, data una successione $\{c_n\}_n$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0 \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n| = 0.$$

Esempio 1.17. - Sia $\{a_n\}_n$ una delle tre successioni

$$a_n = n, \quad a_n = -n, \quad a_n = (-1)^n n.$$

In tutti i casi si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Viceversa si supponga

$$a_n = (-1)^n n$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{non esiste, ma}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty.$$

Conseguenza di (5) - Se $\{a_n\}_n$ è limitata e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty.$$

Teorema 1.18 (dei due carabinieri). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tre successioni per le quali valgono*

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell \in \mathbf{R}.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

Dimostrazione - Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ tale che

$$\begin{aligned} \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon & \quad \text{per ogni } n \geq N_1, \\ \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon & \quad \text{per ogni } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Prendendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ in particolare si ha

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < \ell + \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N$$

da cui si conclude. □

Si osservi che nel precedente teorema si assume che i limiti di $\{a_n\}_n$ e di $\{b_n\}_n$ siano finiti (oltre che uguali). Il risultato che segue, oltre a fornirci una informazione più generale, contempla il caso “infinito”. Infatti si otterranno le due implicazioni

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty & \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty & \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty. \end{aligned}$$

Teorema 1.19 (del confronto). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ due successioni regolari. Se*

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Dimostrazione - Consideriamo dapprima il caso in cui entrambi i limiti siano finiti. Siano rispettivamente α e β i limiti di $\{a_n\}_n$ e di $\{b_n\}_n$ e supponiamo per assurdo che $\alpha > \beta$. Allora la successione $\{a_n - b_n\}_n$, che ha limite $\alpha - \beta$, avrebbe limite positivo. Per il teorema della permanenza del segno si avrebbe allora che

$$a_n - b_n > 0 \quad \text{definitivamente}$$

Ma questo è impossibile.

Vediamo brevemente il caso in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$: se per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n \geq N$$

in particolare si ha che

$$b_n > M \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Poiché ciò vale per ogni M si conclude che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Analogamente si mostra il caso in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$.

I casi in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ e in cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ sono ovvi. \square

Osservazione 1.20. - Si faccia attenzione che se $a_n < b_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}}$, non si può concludere che $\alpha < \beta$, ma solamente che $\alpha \leq \beta$.

Ad esempio, si considerino

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Si ha che $a_n < b_n$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

2. SUCCESSIONI MONOTONE

Definizione 2.1. *Una successione $\{a_n\}_n$ è detta (strettamente) monotona se*

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n \quad \text{oppure} \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} \\ (a_{n+1} < a_n \quad \text{oppure} \quad a_{n+1} > a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Nel primo caso si dice (strettamente) decrescente, nel secondo (strettamente) crescente.

Teorema 2.2. *Una successione monotona ammette limite.*

Se $\{a_n\}_n$ è crescente $\lim_n a_n = \sup\{a_n\}_n$,

Se $\{a_n\}_n$ è decrescente $\lim_n a_n = \inf\{a_n\}_n$.

Dimostrazione - Supponiamo, senza ledere la generalità, che $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sia crescente. Si consideri $\sup\{a_n\}_n$ e si supponga dapprima che tale estremo sia $L \in \mathbf{R}$. Dalla caratterizzazione vista per l'estremo superiore si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_N > L - \varepsilon.$$

Dalla monotonia di $\{a_n\}_n$ si ha che

$$a_n \geq a_N \quad \text{per ogni } n \geq N$$

e in particolare

$$a_n > L - \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

D'altra parte $a_n \leq L < L + \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi infine, scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario, si è trovato $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N,$$

cioè $\lim_n a_n = L$.

Nel caso in cui $\sup\{a_n\}_n = +\infty$ si ha che per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_N > M \quad \text{per ogni } n \geq N$$

e dalla monotonia si ha che

$$a_n \geq a_N > M \quad \text{per ogni } n \geq N,$$

da cui $\lim_n a_n = +\infty$. □

Corollario 2.3. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione monotona. Se una sua sottosuccessione ha limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ anche $\{a_n\}_n$ ha limite ℓ .*

Dimostrazione - Dal Teorema 2.2 $\{a_n\}_n$ ammette limite L . Dal Teorema 1.8 ogni sua sottosuccessione ha limite L . Ma allora $L = \ell$. □

Esercizio 2.4. - Si dimostri, usando il Teorema 1.8 e il Teorema 2.2, che per $a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a n = +\infty.$$

Suggerimento: si consideri la sottosuccessione $\log_a n^2$.

Soluzione - Si è visto che per $a > 1$ la funzione $x \mapsto \log_a x$ è strettamente crescente. Di conseguenza la successione

$$a_n := \log_a n, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad \text{è strettamente crescente.}$$

Per il Teorema 2.2 la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite e tale limite è il suo estremo superiore. Dal momento che $\{a_n\}_n$ è (definitivamente) positiva si avrà che

$$\sup\{a_n\}_n = \ell \in \mathbf{R}, \ell > 0 \quad \text{oppure} \quad \sup\{a_n\}_n = +\infty.$$

Escludiamo il primo caso supponendo per assurdo che $\ell \in (0, +\infty)$. Poiché $\{a_n\}_n$ ammette limite, ogni sua sottosuccessione ammette limite ed è ℓ (Teorema 1.8). Allora la sottosuccessione $\{a_{n^2}\}_n$ ha limite ℓ . Siccome

$$a_{n^2} = \log_a n^2 = 2 \log_a n = 2a_n$$

passando al limite si ottiene che

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2a_n = 2\ell.$$

Ma ciò è impossibile se $\ell \in (0, +\infty)$. Quindi $\sup\{a_n\}_n = +\infty$.

Per $0 < a < 1$ si ragiona allo stesso modo.

3. ALCUNI ESEMPI SIGNIFICATIVI

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbf{N}^*)$

Si deduce dall'Esempio 1.6.1 e da (5).

- Dato un polinomio p di grado k , sia $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione - Supponiamo che $a_k > 0$: si ha

$$p(n) = n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + a_{k-2} \frac{1}{n^2} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right).$$

Il termine tra parentesi, per il punto precedente e per le operazioni che si possono fare con i limiti, tende a a_k , mentre n^k diverge a $+\infty$. Il prodotto divergerà a $+\infty$ (se a_k fosse negativo il prodotto divergerebbe a $-\infty$). \square

- Dati due polinomi p e q ,

$$p(n) = n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0,$$

$$q(n) = n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0,$$

$(h, k \in \mathbf{N}^*)$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \\ 1 & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k < h \end{cases}$$

Dimostrazione - Si raccoglie, sia a numeratore che a denominatore, n^m dove $m = \min\{h, k\}$. Vediamo, ad esempio, il caso in cui $h < k$. Si ha che

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{n^k \left(n^{k-h} + a_{k-1} n^{k-h-1} + \dots + \frac{a_0}{n^h} \right)}{n^k \left(1 + b_{h-1} \frac{1}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h} \right)}.$$

A questo punto il denominatore converge a 1 e il numeratore diverge a $+\infty$. Gli altri casi sono analoghi. Se i polinomi non sono monici si procede analogamente. \square

Esempi:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + 3n^2 - 12}{2n^3 - 7n + 5} &= \frac{5}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n^3 + 3n^2 - 12}{2n^2 - 7n + 5} &= -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 3n - 12}{2n^3 - 7n + 5} &= 0.\end{aligned}$$

- La successione geometrica $a_n = a^n$ con $a \in \mathbf{R}$

diverge a $+\infty$ se $a > 1$,
 converge a 0 se $-1 < a < 1$,
 è indeterminata se $a \leq -1$.

Dimostrazione - Se $a > 1$ allora $a = 1 + b$ con $b > 0$. La disuguaglianza di Bernoulli ci fornisce la stima

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb.$$

Usando il teorema del confronto e le operazioni con i limiti si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nb) = +\infty.$$

Passiamo ora al caso $a \in (-1, 1)$. Se $a = 0$ la tesi è ovvia, sia quindi $a \neq 0$ e si consideri la successione

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{|a|} \right)^n \quad \left(\frac{1}{|a|} > 1 \right).$$

Per quanto detto precedentemente si ha che

$$\lim_n \left(\frac{1}{|a|} \right)^n = +\infty.$$

Da (5) si deduce che $\lim_n |a|^n = 0$ e quindi, per esempio usando il teorema dei due carabinieri oppure usando l'Osservazione 1.16,

$$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n,$$

si deduce che anche $\lim_n a^n = 0$.

Sia infine $a \leq -1$: si ha che

$$a^n = \begin{cases} |a|^n & \text{se } n \text{ pari,} \\ -|a|^n & \text{se } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

di conseguenza, poiché $\lim_n |a|^n = +\infty$, la successione risulta indeterminata. \square

- Dati $a > 1$ e $k \in \mathbf{N}$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.

Teorema 3.1 (criterio del rapporto per successioni). *Data una successione $\{a_n\}_n$ a termini positivi tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \text{se } \ell > 1 \text{ (anche } +\infty) & \implies \lim_n a_n = +\infty \\ \text{se } 0 \leq \ell < 1 & \implies \lim_n a_n = 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione - Sia $\ell > 1$, $\ell \in \mathbf{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Poiché $\ell > 1$ possiamo scegliere ε in modo tale che $\ell - \varepsilon > 1$: di conseguenza si ottiene

$$a_{n+1} > (\ell - \varepsilon)a_n > a_n$$

per cui $\{a_n\}_n$ è definitivamente crescente e, di conseguenza, ammette limite e tale limite è $\sup\{a_n\}_n$. Mostriamo che tale estremo superiore è $+\infty$. Se per assurdo si avesse $\sup\{a_n\}_n = L \in \mathbf{R}$ si avrebbe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ma questo è impossibile. Gli altri casi sono analoghi e lasciati per esercizio. \square

Osservazione 3.2. - Si osservi come nel caso in cui $\ell = 1$ non si possa dire nulla. Per convincersene è sufficiente considerare i due esempi

$$a_n = n, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

A questo punto per concludere è sufficiente applicare il criterio alla successione

$$a_n := \frac{a^n}{n^k}.$$

Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \frac{n^k}{(n+1)^k} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^k = a \left(\frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} \right)^k$$

il cui limite, per $n \rightarrow +\infty$, è a .

Diversamente lo stesso risultato si può ottenere dallo sviluppo del binomio di Newton: si ha che

$$(n+1)^k = \sum_{h=1}^k \binom{n}{h} n^h = n^k + k n^{k-1} + \dots$$

per cui, dal limite del rapporto di polinomi vista sopra, si ottiene che il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = 1.$$

- Dati $a > 1$ e $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\beta} = +\infty$.

Dimostrazione - Basta osservare che $n^\beta > n^{[\beta]}$. □

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Usando lo sviluppo del binomio di Newton si è mostrato che

$$(1+h)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h^2.$$

Poiché $\sqrt[n]{n} > 1$ possiamo scrivere, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad \text{da cui } n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

e di conseguenza

$$0 \leq h_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Poiché $h_n \rightarrow_n 0$ si conclude che $\sqrt[n]{n} \rightarrow_n 1$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ per ogni $a > 0$.

Dimostrazione - Supponiamo $a \neq 1$, altrimenti la cosa è ovvia. Supponiamo dapprima $a > 1$: allora definitivamente si ha $a < n$ da cui

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Usando il teorema dei due carabinieri si conclude.

Se $0 < a < 1$ si può considerare $b = 1/a > 1$: allora

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

da cui si conclude. □

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

EX - Si può dimostrare che la successione $a_n = \sqrt[n]{n!}$ è strettamente crescente. Un modo per vederlo è il seguente: prima di tutto si osservi che $n > \sqrt[n]{n!}$. Infatti

$$n > \sqrt[n]{n!} \iff n^n > n!$$

Allora si ha anche che $n+1 > \sqrt[n+1]{n!}$ da cui, moltiplicando per $n!$, si ottiene

$$(n+1)! > n! \sqrt[n+1]{n!} = (n!)^{\frac{n+1}{n}} \iff ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} > (n!)^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione - Si supponga per ora che n sia pari. Scrivendo

$$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right)}_{\frac{n}{2} \text{ termini}} \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\frac{n}{2} \text{ termini}}$$

si ottiene

$$n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{\frac{n}{2}} \rightarrow_n +\infty.$$

Se n è dispari si verifica in modo simile che

$$n! > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

da cui

$$\sqrt[n]{n!} > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2} \frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \frac{n+1}{n}} > \sqrt{\frac{n+1}{2}} > \sqrt{\frac{n}{2}}$$

per cui qualunque sia n si ha $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}/\sqrt{2}$. \square

Osservazione 3.3. - Visto che la sottosuccessione di indici pari di $\sqrt[n]{n!}$ diverge a $+\infty$ usando l'esercizio precedente e il Corollario 2.3 si potrebbe concludere senza eseguire una stima sui termini di indice dispari.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

È sufficiente osservare che

$$\frac{n \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot n} < \frac{1}{n}.$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Sia k la parte intera di a : chiamiamo C_a la costante

$$C_a = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a}^{k \text{ termini}}}{k \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

A questo punto, poiché a/m al variare di m tra $k+1$ e n è minore di 1,

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left| \frac{a}{n} \cdot \dots \cdot \frac{a}{(k+1)} \overbrace{\frac{a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a}{k \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{k \text{ termini}} \right| \leq C_a \left| \frac{a}{n} \right| \rightarrow_n 0.$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ per ogni $a > 0$, $a \neq 1$.

Per mostrare questo risultato abbiamo bisogno di un'informazione che sarà fornita più avanti (si veda il paragrafo 5). Dando per scontata questa informazione, che è la seguente:

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \text{ è superiormente limitata}$$

e in particolare $\left(\frac{n+1}{n} \right)^n < 3$, vediamo la dimostrazione. Chiamiamo a_n la successione $\frac{\log_a n}{n}$ e mostriamo che a_n è decrescente quando $a > 1$ (per $0 < a < 1$ la successione sarà negativa e crescente). Mostrare che $a_{n+1} < a_n$ è equivalente a mostrare che $a_{n+1} - a_n < 0$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\log_a(n+1)}{n+1} - \frac{\log_a n}{n} = \frac{n \log_a(n+1) - (n+1) \log_a n}{(n+1)n} = \\ &= \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n < \\ &< \frac{1}{(n+1)n} \log_a \frac{3}{n} < 0 \quad \text{definitivamente (ricordo: } a > 1) \end{aligned}$$

cioè

$$a_{n+1} - a_n < 0, \quad \text{cioè} \quad \{a_n\}_n \text{ è definitivamente decrescente.}$$

Inoltre $a_n > 0$, per cui il limite di $\{a_n\}_n$ esiste finito ed è non negativo. Chiamiamolo $\ell \geq 0$. Si tratta ora di trovarlo. Si osservi che

$$a_{n^2} = \frac{\log_a n^2}{n^2} = \frac{2 \log_a n}{n} = \frac{2}{n} a_n.$$

Poiché $\{a_n\}_n$ ammette limite ed ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite, si ottiene

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} a_n = 0 \cdot \ell = 0.$$

Se $0 < a < 1$: poiché vale

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

basta considerare $-\log_{\frac{1}{a}} n$ anziché $\log_a n$.

In maniera analoga si dimostra

$$\frac{\log_a n^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0.$$

- Infine riportiamo (senza dimostrarla) una versione della formula di Stirling, risultato che può essere utile quando si fanno confronti con il fattoriale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Riportiamo qui un breve elenco dei principali confronti fra successioni che hanno tutte limite $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

4. SUCCESSIONI LIMITATE E DI CAUCHY

Teorema 4.1. *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

Esempio 4.2. - La successione $a_n = (-1)^n$ è limitata e indeterminata, però la sua sottosuccessione $\{a_{2n}\}_n$ è convergente.

Dimostrazione - Data $\{a_n\}_n$ esistono $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha_0 \leq a_n \leq \beta_0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

In almeno uno dei due intervalli

$$\left[\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}, \beta_0 \right]$$

cascano infiniti termini della successione. Chiamiamo $[\alpha_1, \beta_1]$ tale intervallo, o uno dei due se in entrambi cascano infiniti elementi. Si osservi che

$$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}.$$

Dividendo ulteriormente a metà si avrà che in almeno uno dei due intervalli

$$\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1 \right]$$

cascano infiniti termini della successione. Chiamiamo $[\alpha_2, \beta_2]$ tale intervallo (ne scegliamo uno se in entrambi cascano infiniti elementi). Si osservi che

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{4}.$$

Iterando il procedimento si ottengono due successioni

$$\{\alpha_j\}_{j \in \mathbf{N}} \text{ crescente} \quad \text{e} \quad \{\beta_j\}_{j \in \mathbf{N}} \text{ decrescente}$$

con la proprietà

$$\beta_j - \alpha_j = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^j}.$$

Ora per trovare una sottosuccessione convergente è sufficiente scegliere, per ogni $j \in \mathbf{N}$,

$$a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j].$$

Dalla monotonia di $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ e $\{\beta_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ si ottiene che le due successioni ammettono limite. Poichè $\alpha_j \leq \beta$ e $\beta_j \geq \alpha$ per ogni $j \in \mathbf{N}$ tali limiti sono finiti. Inoltre, poiché

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} (\beta_j - \alpha_j) = 0,$$

tali limiti sono uguali. Dal fatto che

$$\alpha_j \leq a_{n_j} \leq \beta_j$$

si conclude usando il teorema dei due carabinieri. \square

Osservazione 4.3. - Attenzione! Se $\lim_n (a_n - b_n) = 0$ non significa che $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ ammettano limite.

Esempio: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$.

Definizione 4.4. Una successione $\{a_n\}_n$ è detta di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$(6) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq N.$$

Osservazione 4.5. - Si osservi che una successione di Cauchy è limitata. La dimostrazione (non a caso, visto il teorema che segue) è uguale a quella del Teorema 1.13: fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq N.$$

Considerando l'insieme

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N + \varepsilon, a_N - \varepsilon\}$$

si ha che

$$\min A \leq a_n \leq \max A \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

visto che, in particolare, si ha $|a_n - a_N| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

Teorema 4.6. Una successione $\{a_n\}_n$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione - (\Rightarrow) Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Allora, considerando $n, m \geq N$, si ha

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \ell) - (a_m - \ell)| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon$$

per ogni $n, m \geq N$.

(\Leftarrow) Poiché $\{a_n\}_n$ è limitata, $\{a_n\}_n$ ammette una sottosuccessione convergente, sia essa $\{a_{n_j}\}_j$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j} = \ell \in \mathbf{R}$. Poiché è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_1 \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } n, m \geq N_1.$$

In corrispondenza dello stesso ε esiste anche N_2 tale che

$$|a_{n_j} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } n_j \geq N_2.$$

Scegliendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ si ottiene che

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, n_j \geq N.$$

In particolare si è mostrato che, fissato ε arbitrario, si è trovato N tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per $n \geq N$ \square

Osservazione 4.7. - Supponiamo che $\{a_n\}_n$ sia di Cauchy, cioè fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che valga (6). In particolare (6) vale anche per $m = n + p$ con $p \in \mathbf{N}$ e quindi possiamo riscrivere (6) in maniera equivalente come segue:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N, \text{ per ogni } p \in \mathbf{N}.$$

Di conseguenza passando all'estremo superiore si ottiene

$$\sup_{p \in \mathbf{N}} |a_n - a_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Si osservi che quello che abbiamo scritto significa che

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \in \mathbf{N}} |a_n - a_{n+p}| \right) = 0.$$

Quindi una successione è di Cauchy se e solo se soddisfa (per definizione) (6), se e solo se ammette limite finito e se e solo se soddisfa (7).

5. UNA SUCCESSIONE PARTICOLARE: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Vediamo in questo paragrafo la famiglia di successioni, dipendenti da un parametro $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$,

$$x_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Un caso particolare sarà quello con $x = 1$ e precisamente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Vediamo innanzitutto che tale successione è strettamente crescente. Utilizziamo per fare ciò la disuguaglianza delle medie (si veda il Capitolo 3 - Il principio di induzione) che qui ricordiamo: dati k numeri y_1, \dots, y_k positivi si ha che

$$(8) \quad \sqrt[k]{y_1 \cdot \dots \cdot y_k} \leq \frac{y_1 + \dots + y_k}{k}$$

e la disuguaglianza è stretta se e solo se i numeri y_i non sono tutti uguali. Una volta fissato $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, consideriamo

$$k = n + 1$$

e prendiamo

$$y_1 = \dots = y_n = 1 + \frac{x}{n}, \quad y_{n+1} = 1.$$

Si osservi che i numeri y_i non sono necessariamente positivi, condizione per avere (8), ma

$$(9) \quad y_i > 0 \quad \iff \quad x > -n \quad (n > -x).$$

Non essendo gli y_i tutti uguali si ha che la disuguaglianza (8) risulta essere stretta, cioè si ha

$${}^{n+1}\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} < \frac{1}{n+1} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{x}{n}\right)}_{n \text{ volte}} + 1 \right] = \frac{1}{n+1} [n + 1 + x]$$

da cui, elevando a $n + 1$, si ricava

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

cioè la successione $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ è definitivamente strettamente crescente e, per la condizione (9), precisamente si ha

$$\begin{cases} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right\}_n & \text{è strettamente crescente se } x > 0 \\ \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right\}_n & \text{è definitivamente strettamente crescente se } x < 0 \end{cases}$$

Si osservi inoltre che da quanto appena ottenuto la successione

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \quad \text{è (definit.) strettamente decrescente.}$$

Prendiamo ora in esame due casi particolari: quelli con $x = 1$ e con $x = -1$ e definiamo

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_k := \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-k}.$$

Si verifica facilmente che

$$(10) \quad a_n \leq b_k \quad \text{per ogni } n, k \in \mathbf{N}^*.$$

Verificare la precedente disuguaglianza è equivalente a risolvere:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \leq 1 \quad \iff \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leq 1.$$

Se $n \leq k$ usiamo la monotonia della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ per dedurre che

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k.$$

Il termine a sinistra è ovviamente minore di 1, da cui

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k < 1.$$

Nel caso in cui $n \geq k$ si ragiona analogamente e si ottiene

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < 1.$$

Per cui $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata e $\{b_k\}_k$ è inferiormente limitata. Poiché $\{a_n\}_n$ è crescente ammette limite, poiché è superiormente limitata tale limite è finito.

Chiameremo e questo numero, per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Si è visto che anche la successione

$$\tilde{b}_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

è strettamente crescente, per cui avrà limite. Di conseguenza la successione

$$b_n = (\tilde{b}_n)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

sarà strettamente decrescente, e poiché è inferiormente limitata (si veda (10)) avrà limite finito. Si osservi che

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

per cui

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Il numero e è irrazionale e le sue prime cifre decimali sono

$$2,71828\dots$$

ma anche senza conoscere esplicitamente il suo valore si può affermare che

$$2 < e < 3.$$

Infatti valutando a_n per $n = 1$ si ottiene il valore 2, da cui $e > 2$, valutando b_n per $n = 6$ si ottiene $(5/6)^{-6}$ che è circa 2,98, da cui $e < 3$.

In generale, data una successione

$$\{c_n\}_n, \quad \text{crescente e tale che} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty,$$

si ha

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e.$$

La verifica è immediata: infatti

$$[c_n] \leq c_n < [c_n] + 1$$

per cui da una parte

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]+1} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right),$$

d'altra parte

$$\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \geq \left(1 + \frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]} = \left(1 + \frac{1}{[c_n]+1}\right)^{[c_n]+1} \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{-1}.$$

Poiché se $\{c_n\}_n$ è crescente (ma la cosa vale in generale)

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{[c_n]}\right)^{[c_n]} \right\}_n$$

è una sottosuccessione di $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ avrà lo stesso limite di $\{a_n\}_n$, per cui passando al limite si ottiene il risultato cercato.

Ovviamente si ottiene anche

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = e.$$

Basta procedere come fatto per ottenere (11).

Per quanto riguarda la successione x_n dividiamo lo studio in due casi. Non dimostreremo qual è il suo limite, o meglio lo mostreremo utilizzando una proprietà che ancora non abbiamo visto:

se una successione $\{a_n\}_n$ converge ad a allora la successione $\{a_n^x\}_n$ converge

ad a^x .

Consideriamo dapprima $x > 0$: utilizzando (12) si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x.$$

Se invece $x < 0$ basta scrivere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{(-x)}{n}\right)^{-\frac{n}{(-x)}}\right]^x$$

e concludere usando il limite per $x > 0$ e (13).

Esercizio - Si dica qual è la più grande tra le due quantità

$$n^{n+1} \quad \text{e} \quad (n+1)^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Si ha che

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$$

che è definitivamente minore di 1, per cui

$$(n+1)^n < n^{n+1} \quad \text{per (almeno) ogni } n > 3.$$

Approfondimento - Ancora sulla base naturale e .

Supponiamo che un capitale C venga investito per un anno. È più conveniente ricevere un interesse j dopo un anno oppure un interesse $j/2$ ogni sei mesi?

Soluzione - Dopo un anno si ha che il capitale è $C + jC = C(1 + j)$ se l'interesse viene dato tutto assieme dopo un anno. Se invece dopo sei mesi si ottiene un interesse di $j/2$ si ha alla scadenza dei sei mesi un capitale pari a

$$C + \frac{j}{2}C = C(1 + j/2)$$

e dopo altri sei mesi

$$[C(1 + j/2)] + [C(1 + j/2)]j/2 = C\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2.$$

Si vede facilmente (e si è dimostrato) che $1 + j < (1 + j/2)^2$. Se l'interesse maturato venisse pagato, e quindi reinvestito assieme al capitale iniziale, ogni mese si otterrebbe a fine anno

$$C\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12}.$$

Analogamente, se l'interesse venisse pagato giornalmente, reinvestendo dopo un anno si avrebbe

$$C\left(1 + \frac{j}{365}\right)^{365}.$$

Se l'accredito fosse *istantaneo*, il capitale maturerebbe diventando dopo un anno

$$Ce^j.$$

6. ALCUNI LIMITI PARTICOLARI: LIMITI NOTEVOLI

Vediamo ora alcuni limiti particolari, detti a volte “notevoli”. In tutta la trattazione di questi limiti con $\{a_n\}_n$ si denoterà una successione con la proprietà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } a_n}{a_n} = 1$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{a_n} - 1}{a_n} = \log b, \quad b > 0 \quad (\log = \log_e)$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + a_n)^p - 1}{a_n} = p, \quad p \in \mathbf{R}.$

Osservazione 6.1. - Osserviamo la seguente cosa: date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ per le quali si abbia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell \in \mathbf{R},$$

allora necessariamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Infatti si ottiene che, scelto $\varepsilon > 0$, definitivamente vale $(\ell - \varepsilon)a_n < b_n < (\ell + \varepsilon)a_n$ e dal teorema dei due carabinieri si conclude.

Da ciò, una volta mostrati i limiti 1.-6., si concludono i seguenti fatti:

per ogni successione $\{a_n\}_n$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ si ha

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{sen } a_n = 0,$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = 1,$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = 1,$
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(1 + a_n) = 0,$
- (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n)^p = 1.$

Si osservi come da queste si deduca facilmente anche quanto segue:

per ogni successione $\{a_n\}_n$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ si ha

$$(f) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = b^a,$$

$$(g) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \log a_n = \log a,$$

$$(h) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^p = a^p.$$

Vediamo la prima, le altre si mostrano in maniera analoga. Supponendo che valga (c) vogliamo mostrare (f). Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b^{a_n} - b^a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^a (b^{a_n - a} - 1) = 0$$

poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a) = 0$.

Quanto visto nei punti (f), (g), (h) è una proprietà delle funzioni esponenziale, logaritmo, potenza ed è detta *continuità*, che definiremo e studieremo più avanti.

I punti (a) e (b) mostrano la continuità di seno e coseno in 0 (e solo in 0).

Vediamo ora le dimostrazioni dei limiti di sopra.

1. Si consideri $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vale allora

$$0 < \sin x < x.$$

Se invece $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ vale

$$x < \sin x < 0.$$

In entrambi i casi si ottiene $0 < \sin^2 x < x^2$. Riscrivendo $\sin^2 x$ come $1 - \cos^2 x$ si ha

$$0 < 1 - \cos^2 x < x^2$$

$$\Downarrow$$

$$1 - x^2 < \cos^2 x < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{1 - x^2} < \cos x < 1.$$

Valutando il tutto per $x = a_n$ si ha

$$\sqrt{1 - a_n^2} < \cos a_n < 1$$

e passando al limite, usando il teorema dei due carabinieri, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos a_n = 1.$$

Ora, poiché

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies 0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \\ x < 0 &\implies \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < x < \operatorname{sen} x < 0, \end{aligned}$$

in entrambi i casi si ha

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Allora, usando il teorema dei due carabinieri in

$$\cos a_n < \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} < 1,$$

si conclude.

2. Scriviamo

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}$$

da cui

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Da quanto visto al punto 1. si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \cos a_n} = \frac{1}{2}.$$

3. Dalla monotonia della successione $\{x_n\}_n$ del paragrafo precedente si ha

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x, \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} > e^x \quad (x \neq 0).$$

Valutando entrambe per $n = 1$ si ottengono

$$(14) \quad 1 + x < e^x \quad \text{e} \quad e^x < (1 - x)^{-1}$$

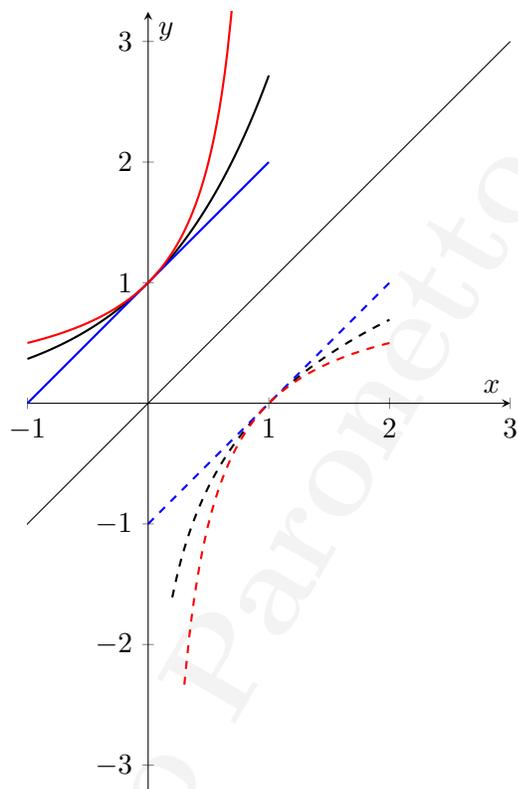
da cui

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies 1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1 - x}, \\ x < 0 &\implies \frac{1}{1 - x} < \frac{e^x - 1}{x} < 1. \end{aligned}$$

Valutando in a_n e utilizzando il teorema dei due carabinieri si ottiene la tesi.

Di seguito i grafici delle funzioni $x \mapsto e^x$ (in nero), $x \mapsto x + 1$ (in blu), $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (in rosso), per mostrare (14).

Figura 1



4. EX - (Suggerimento: si scriva $b = e^\beta$ per qualche β)
5. In Figura 1 sono riportati, tratteggiati, anche i grafici delle inverse delle tre funzioni evidenziate in nero, rosso, blu. Per ricavare le disuguaglianze analoghe a (14) sulle inverse dobbiamo invertire le funzioni (che sono strettamente crescenti). Per far ciò basta porre $y = f(x)$ ed esprimere x in termini di y :

$$y = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 1;$$

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y;$$

$$y = \frac{1}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{y}.$$

Da ciò si ottengono le disuguaglianze, per $y \neq 1$,

$$1 - \frac{1}{y} < \log y < y - 1.$$

Se al posto di y ora mettiamo $1+x$ (per nostra comodità) otteniamo infine, per $x \neq 0$,

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

Si noti come la seconda di queste due si sarebbe ottenuta facilmente anche da (14). A questo punto dividendo per $x > 0$ si ottiene

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1,$$

dividendo per $x < 0$ si ottiene

$$1 < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}.$$

Inserendo a_n al posto di x , passando al limite ed usando il teorema dei due carabinieri si conclude.

6. Scrivendo

$$\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = \frac{e^{\log(1+a_n)^p} - 1}{a_n} = \frac{e^{p \log(1+a_n)} - 1}{a_n}$$

e chiamando b_n la successione $p \log(1+a_n)$ (si osservi che la successione $\{b_n\}_n$ è infinitesima per l'Osservazione 6.1) si ottiene

$$\frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = \frac{e^{b_n} - 1}{a_n} = \frac{e^{b_n} - 1}{b_n} \frac{b_n}{a_n}.$$

Ora, passando al limite, per il punto 3. si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{b_n} - 1}{b_n} = 1;$$

mentre per il secondo fattore si ha, usando il punto 5.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p \log(1+a_n)}{a_n} = p.$$