# 6 - Successioni per ricorrenza

Ultimo aggiornamento: 25 ottobre 2022

Le successioni definite per ricorrenza sono successioni definite implicitamente tramite una funzione $f$ a partire da alcuni valori della successione assegnati. Di conseguenza per sapere chi è l'$n$-esimo termine della successone vanno prima calcolati tutti i termini precedenti, cioè $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Le più semplici sono successioni del tipo

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \tag{1}$$

dove $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione data. Ad esempio, se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è $f(x) = x^2$ una possibile successione per ricorrenza definita tramite $f$ è

$$\begin{cases} a_0 := 3 \\ a_{n+1} := f(a_n) = a_n^2. \end{cases}$$

I primi termini della successione sono quindi $a_0 = 3, a_1 = 9, a_2 = 81, a_3 = 81^2$, e così via. Diciamo "una" possibile perché variando $\alpha$ varia la successione.

Si potrebbe avere una funzione di due variabili, $f : \mathbf{R} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ per cui la successione è definita come segue:

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = f(a_n, n). \tag{2}$$

Ad esempio, se $f : \mathbf{R} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ è $f(x, n) = x^2 + n^2$ una possibile successione per ricorrenza definita tramite $f$ è

$$\begin{cases} a_0 := 1 \\ a_{n+1} := f(a_n) = a_n^2 + n^2 \end{cases}$$

e quindi i primi termini della successione in questo caso sono $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 8$, e così via.

Più in generale, data una funzione $f : \mathbf{R}^k \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, cioè $f$ funzione di $k + 1$ variabili, e assegnati $k$ valori $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{k-1} \in \mathbf{R}$ si costruisce una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_0 := \alpha_0 \\ a_1 := \alpha_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{k-1} := \alpha_{k-1} \\ a_{n+1} := f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}, n) \end{cases}$$

È chiaro quindi che, assegnati i primi $k-1$ valori, quelli successevi saranno dati da

$$\begin{aligned} a_k &:= f(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1, a_0, k-1) \\ a_{k+1} &:= f(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, k) \\ a_{k+2} &:= f(a_{k+1}, a_k, \ldots, a_3, a_2, k+1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

e per calcolare l'$n$-esimo valore si ha bisogno di conoscere i $k$ valori precedenti. Perciò senza avere assegnati i primi $k$ valori non si può procedere.

Noi ci limiteremo a considerare i casi più semplici, cioè (1) e (2).

Come già detto anche nei casi più semplici non si riesce a conoscere esplicitamente il termine $n$-esimo della successione se non calcolando tutti i termini precedenti e questo è un problema quando si vuole studiare il comportamento asintotico di $\{a_n\}_n$, cioè capire se esiste il limite di tale successione ed eventualmente trovarlo.
In rari casi si riesce a esplicitare tutta la successione, e in questi casi chiaramente studiare il limite di $\{a_n\}_n$ risulta più facile. Esempio:

$$\begin{cases} a_0 := 0 \\ a_{n+1} := a_n + 1. \end{cases}$$

In questo caso si riesce a passare da una formulazione implicita ad una esplicita facilmente, infatti si può intuire (e poi mostrare, ad esempio per induzione) che

$$a_n = n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

In generale non è così e la formulazione implicita nella maggior parte dei casi rimane tale.

Ci si pone ora il problema di trovare, se possibile, il limite di una successione definita come segue

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := f(a_n) \end{cases}$$

dove $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, è una funzione <u>continua</u>, cioè (non abbiamo ancora visto le funzioni continue, per ora prendiamo per buona questa richiesta) che verifica

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(b) \qquad \text{se } \{b_n\}_n \text{ è una successione convergente a } b \in \mathbf{R}$$

dove $b, b_n$ appartengono al dominio di $f$. Supponendo che

$$a_n \;\; \text{converga ad } \ell \in \mathbf{R}$$

si ha che, passando al limite nell'equazione $a_{n+1} := f(a_n)$ si ottiene che $\ell$ deve soddisfare l'equazione

$$\ell = f(\ell). \tag{3}$$

Potrebbe essere che

$$a_n \text{ diverga a } +\infty \text{ o } -\infty.$$

Di conseguenza, supponendo che il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esista, tale limite andrà cercato tra le possibili soluzioni dell'equazione (3) oltre a $+\infty$ e $-\infty$.

Ovviamente non è detto che una successione definita per ricorrenza abbia limite, come mostra il seguente esempio:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = -a_n.$$

In questo caso $a_{n+1} = f(a_n)$ dove $f$ è la funzione costante $-1$. La successione può essere scritta in maniera esplicita come $a_n = (-1)^n$, che non ammette limite.
Una classe di successioni che ammette limite è quella delle successioni definitivamente monotone, quindi per essere certi, e per poi trovarne il valore, dell'esistenza del limite bisogna:

*i* ) provare a dimostrare la monotonia della successione,

*ii* ) risolvere l'equazione (3) usando la continuità di $f$,

il tutto tenendo conto del valore del primo termine $\alpha$ che potrebbe incidere sull'andamento della successione e che il possibile limite potrebbe essere anche $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, si può mostrare facilmente che la successione

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = a_n^2$$

si può scrivere in maniera esplicita come $a_n = \alpha^{2^n}$. Di conseguenza la successione risulta monotona, ma è crescente per $\alpha > 1$ e $\alpha < -1$, costante (definitivamente) per $\alpha = -1, 0, 1$, decrescente per $\alpha \in (-1, 1)$, da cui deduciamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty && \text{se } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 1\\
&\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 && \text{se } \alpha = -1 \text{ o } \alpha = 1\\
&\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 && \text{se } -1 < \alpha < 1.
\end{aligned}$$

Proviamo, fingendo di non sapere quello che abbiamo capito dall'espressione esplicita, a procedere come nei punti *i*, ) e *ii* ). La successione è crescente se

$$a_{n+1} \geqslant a_n.$$

Provando a risolvere questa disequazione si ottiene

$$a_n^2 \geqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \leqslant 0 \ \text{ o } \ a_n \geqslant 1.$$

Poiché non è possibile che $a_n$ sia negativa (definitivamente), al più infatti si avrà solamente il primo termine $a_0 < 0$, si avrà che $\{a_n\}_n$ è definitivamente crescente se $a_n = 0$ o se $a_n \geqslant 1$ definitivamente. E a questo punto si può cercare di mostrare quello che vorremmo per induzione. Nel primo caso ci si rende conto che

$$a_0 = 0 \ \text{ e } \ a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = 0.$$

Nel secondo, se ipotizziamo che $a_0$ sia maggiore o uguale a 1, si ricava

$$\begin{aligned} a_0 = 1 \quad &\Longrightarrow \quad a_n = 1 \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}, \\ a_0 > 1 \quad &\Longrightarrow \quad a_{n+1} > a_n > 1 \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Se si ipotizza che $a_0$ sia minore o uguale a $-1$ si ricava

$$a_0 \leqslant -1,\ a_1 \geqslant 1 \ \text{ e } \ a_n \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} \geqslant 1.$$

Si conclude che che se $a_0 \leqslant -1$ oppure $a_0 = 0$ oppure $a_0 \geqslant 1$ la successione è costante o definitivamente crescente.
Ci chiediamo ora se per caso la successione possa essere decrescente:

$$a_{n+1} = a_n^2 \leqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \geqslant 0 \ \text{ e } \ a_n \leqslant 1.$$

Provando per induzione, escludendo i casi $a_0 = 0$ e $a_0 = 1$ già visti, se si suppone che $0 < a_0 < 1$ si ha

$$a_0 \in (0, 1) \quad \Longrightarrow \quad 0 < a_{n+1} < a_n < 1 \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Abbiamo quindi verificato che, qualunque sia il valore di $\alpha$, la successione è monotona. Vediamo di capire quali possono essere i valori del limite di $\{a_n\}_n$. Risolvendo l'equazione (3) ($f(x) = x^2$)

$$\ell = \ell^2 \quad \Longrightarrow \quad \ell(\ell - 1) = 0$$

abbiamo le due possibilità $\ell = 0$ o $\ell = 1$, ai quali vanno aggiunte le possibilità $+\infty$ e $-\infty$. Poiché definitivamente $a_n$ è non negativa, non può essere che il limite sia $-\infty$.
In conclusione: se $a_0 = 0$ il limite è 0, se $a_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ la successione è strettamente (definitivamente) positiva e decrescente per cui l'unica scelta tra $0, 1, +\infty$ è 0, se $a_0 = -1$ o $a_0 = 1$ la successione è (definitivamente) costante e il limite è 1, se $a_0 > 1$ la successione è crescente e il limite non può essere 0 o 1 dal momento che $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$: si conclude che in questo caso il limite è $+\infty$; lo stesso limite si ha per $a_0 < -1$.

**Idea dal punto di vista grafico -** Dal punto di vista grafico vediamo che si può intuire, disegnando il grafico di $f$, come si comporterà la successione definita da

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

seguendo l'idea mostrata nella figure seguenti. L'idea è di partire da $a_0$ nell'asse delle ascisse, considerare $f(a_0)$ nell'asse delle ordinate. Poiché $f(a_0)$ sarà anche $a_1$ l'idea è di riportarlo nell'asse delle ascisse e ripetere il procedimento. Questa idea è mostrata nelle prime figure, numerate da 1 a 2. Nella figura chiamata 1-2 si mostra come riassumere questi primi due passaggi trasportando il punto $(a_0, 0)$ in $(a_1, a_1)$.
Nelle figure 3 e 4 si ripete il procedimento fatto nelle figure 1 e 2 e nella 3-4 si riassumono i due passaggi.
L'idea è quella riportata in Figura $\infty$ dove si riportano alcuni passaggi. Si vede che il percorso così costruito si avviluppa attorno al punto $(\ell, f(\ell))$.

Figura 1

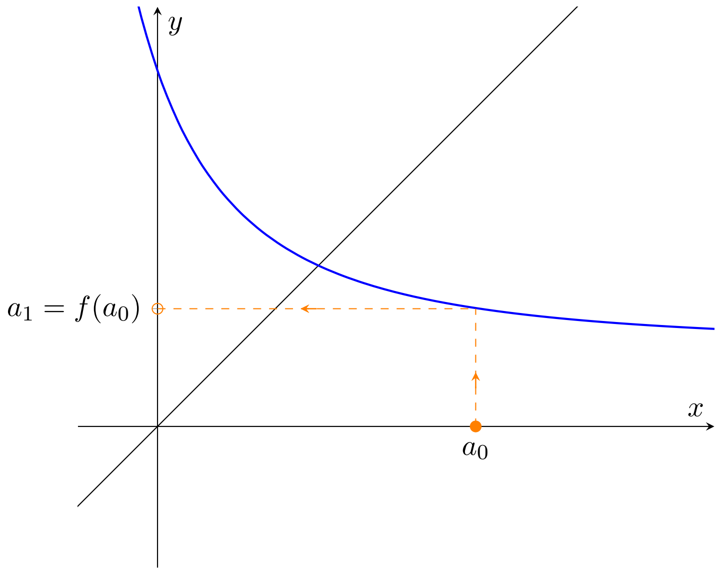



Figura 2

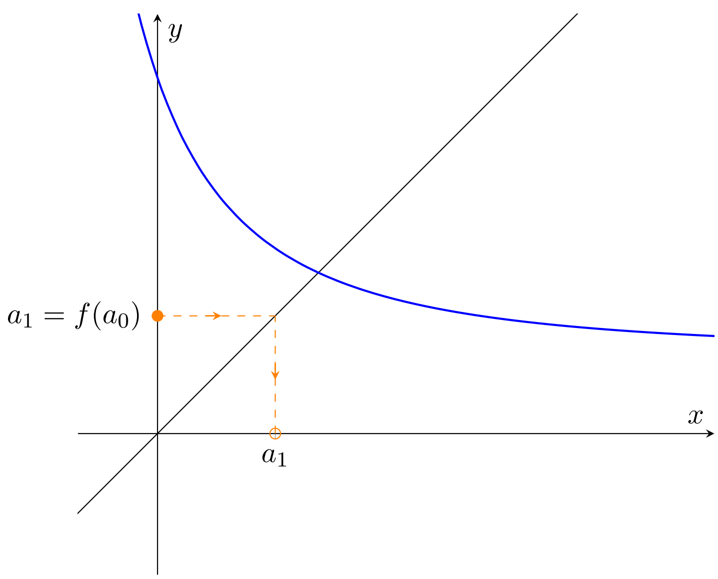


Figura 1-2

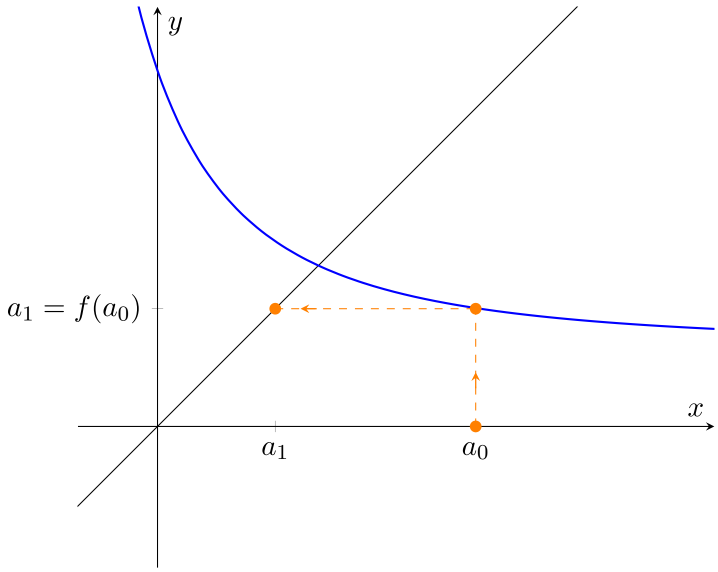



Figura 3

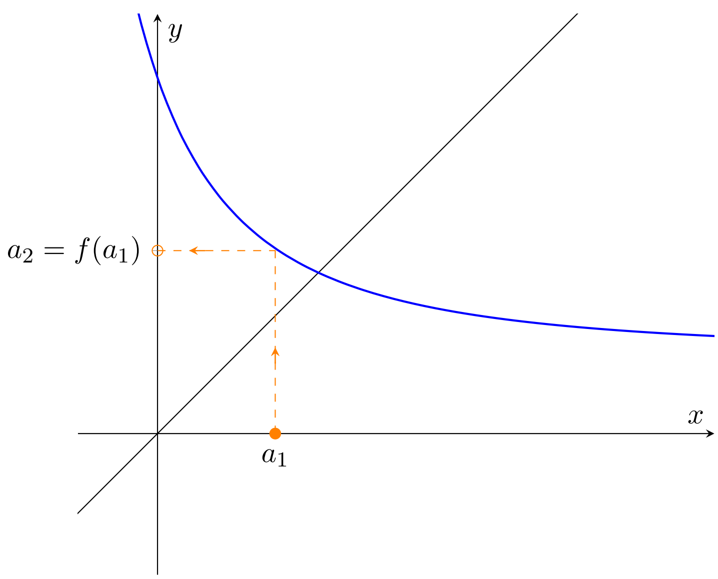


Figura 4

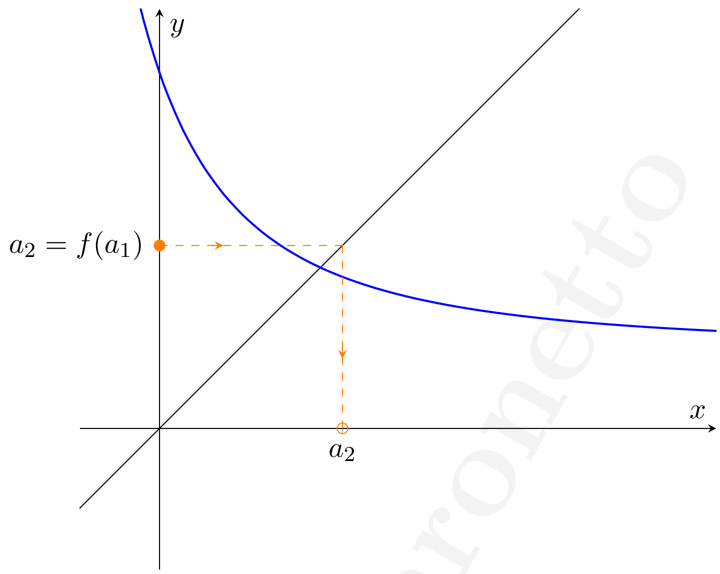
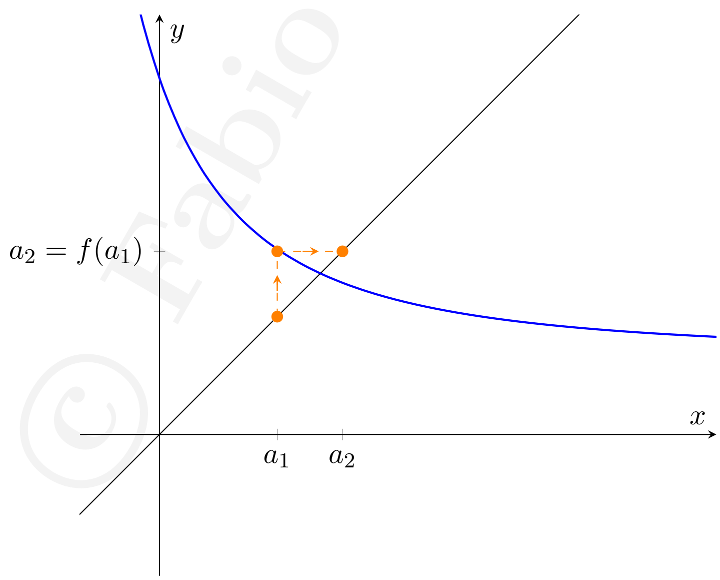



Figura 3-4



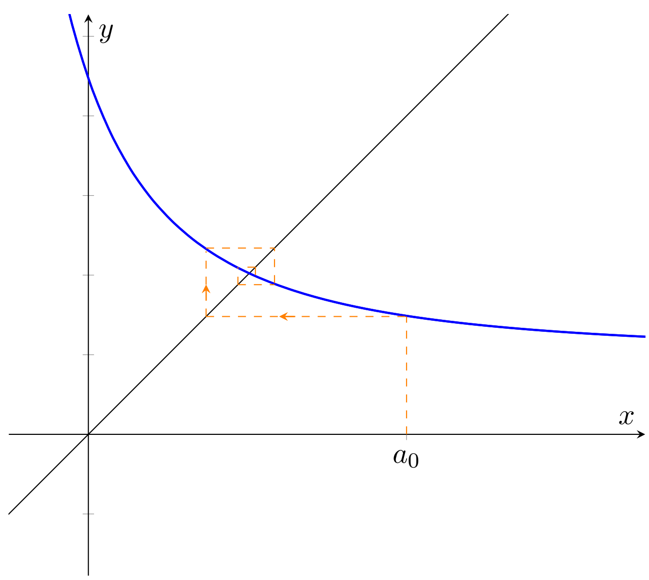



Si è già osservato che i possibili limiti vanno cercati tra i punti che soddisfano

$$x = f(x),$$

solamente uno nell'esempio che stiamo considerando nella varie figure, oltre a $-\infty$ e $+\infty$.
In Figura $\infty$ sono segnati i passaggi eliminando alcune parti dei cammini segnati nelle figure precedenti. Si osservi come il punto in cui si incontrano i due grafici, quello di $f$ e quello di $g$, $g(x) = x$, è il valore (in questo esempio uno solo) del possibile limite $\ell$.

Figura $\infty$




Nella figura che segue un possibile esempio in cui $f$ e $g$, $g(x) = x$, si incontrano in due punti, $A$, più vicino all'origine, e $B$, più lontano. Si intuisce che se si parte da un valore maggiore di una coordinata del punto $B$ la successione diverge a $+\infty$, se invece si parte da un valore più piccolo si converge al valore di una coordinata del punto $A$.

Figura $A$