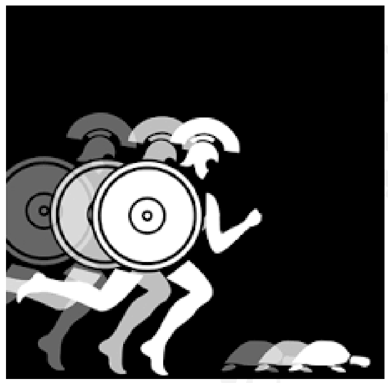
7 - Serie numeriche

Ultimo aggiornamento: 24 settembre 2023



1. Premessa

Può la "somma di infiniti numeri" dare come risultato una quantità finita? È quello che ci si chiede studiando le serie numeriche. Vediamo un esempio: si consideri la somma (infinita)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

Come si vedrà più avanti scriveremo tale "somma infinita" come

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

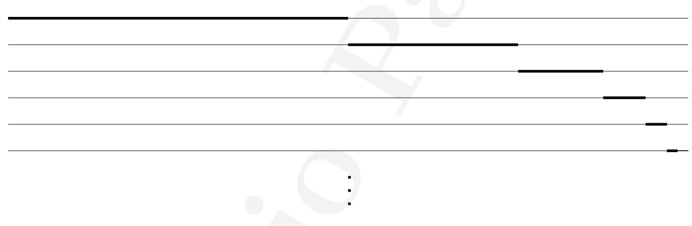
La somma appena vista è alla base di uno dei paradossi di Zenone, quello del corridore (analogo a quello di Achille e la tartaruga). Si supponga che un corridore debba compiere un tragitto (un giro di stadio, nel caso di Zenone) e si supponga che il corridore vada a velocità costante. Per compiere tale tragitto il corridore dovrà compiere prima metà del tragitto e per fare ciò impiegherà un certo tempo T. Dopodiché per percorrere la metà del tragitto rimanente (cioè la metà della metà di tutto il tragitto), e poiché corre a velocità costante, impiegherà un tempo $T/2$. Poi percorrerà la metà del tragitto rimanente (cioè la metà di un quarto) in un tempo $T/4$, e così via.

Poiché sommiamo infiniti tempi,

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\frac{T}{16}+\cdots,$$

Zenone conclude che il corridore non raggiungerà mai la meta. Forse la questione era più filosofica che matematica, ma alla base c'è anche il fatto che al tempo non ci si era chiesto se "la somma di infiniti numeri" possa dare un risultato finito. Perlomeno (credo) fino ad Archimede [1] .

Vediamo ora graficamente come ci si può convincere che la "somma infinita" (1) dà come risultato un numero (e non $+\infty$).
Come mostrato nella figura sottostante, si consideri un segmento, che supporremo per semplicità di lunghezza 1, disegniamo varie volte tale segmento evidenziando ogni volta una diversa parte del segmento: nel primo caso marchiamo in neretto la prima metà del segmento, che misura 1/2, poi marchiamo una metà della metà restante, che misura 1/4, poi la metà della metà rimanente, che misura 1/8, e così via. Ci si accorge dalla figura che tale somma è, o almeno non supera, 1. Tra breve vedremo che tale somma è proprio 1.



A questo punto, per tornare a Zenone, il tempo che impiega il corridore per giungere alla fine del percorso è

$$T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\frac{T}{16}+\cdots=2T\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)=2T\,.$$

Numeri con parte decimale periodica - Vediamo ora un altro esempio, che ha sempre a che fare con le serie, il cui studio stiamo per affrontare. Si consideri il numero

$$\alpha=0,99999999\cdots=0,\bar{9}\,.$$

[1] Il primo, inconsapevole, tentativo può essere considerato quello di calcolare l'area del cerchio inscrivendo una successione di poligoni regolari, di cui si conosce l'area, all'interno del cerchio (principio di esaustione) da parte di Anassagora, Antifonte e Brisone di Eraclea, quasi contemporanei a Zenone. Un primo vero calcolo utilizzando una "serie", la serie geometrica, è dovuto ad Archimede (ben più tardi di Zenone) con diversi esempi: uno fra tutti, il calcolo dell'area della parte di piano delimitata da una retta ed una parabola. Lo studio vero e proprio delle serie arriverà più tardi: da circa metà del '600 fino a metà dell'800 con uno studio più sistematico dovuto a Cauchy. Ma per qualche notizia storica più dettagliata si consiglia di leggere le ultime pagine di uesto capitolo, tratte dal libro di Enrico Giusti.

Ci domandiamo: α è minore oppure è uguale ad 1? Proviamo a fare qualche semplice calcolo e moltiplichiamo per 10 il numero α. Otteniamo

$$10\alpha = 9 + \alpha\,.$$

Da questa uguaglianza si deduce che $\alpha = 1$. Il legame con le somme infinite è il seguente:

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots\,. \tag{2}$$

2. Serie numeriche a termini reali

2.1. Risultati preliminari.

Affronteremo ora lo studio delle serie numeriche a termini reali, ma vedremo alcuni risultati anche per serie a termini complessi. Dapprima vedremo risultati riguardanti serie a termini reali. Data $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione a valori reali si può definire un'altra successione nel modo seguente:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

che viene detta successione delle *somme parziali.*

Definizione 2.1 (serie)**.** *Una serie si può identificare con una coppia di successioni*

$$\big(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}\big)$$

dove $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *è una successione data, ed è detta successione dei termini generali, e* $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *rappresenta la successione delle somme parziali. Più spesso e più semplicemente una serie si denota con*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,. \tag{3}$$

A questo punto ha senso chiedersi se il limite

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \tag{4}$$

della successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ esiste con l'ovvia identificazione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n\,.$$

Studiare il **carattere della serie** significa studiare il limite (4).

Definizione 2.2 (carattere di una serie)**.** *Data* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *a valori reali diremo che la serie* (3) *è* convergente *se il limite* (4) *esiste finito.*
Diremo che la serie (3) *è* divergente positivamente (negativamente) *se il limite* (4) *esiste ed è* $+\infty$ $(-\infty)$*.*
Si dice che la serie (3) *è* indeterminata *o* indefinita *o* irregolare *se il limite* (4) *non esiste.*
Talvolta si dice che una serie è regolare *se* (4) *esiste, finito o infinito.*

Abbiamo già intuito che è possibile capire che una somma infinita dà come risultato un numero e anche che sia possibile calcolarlo. Questo non deve trarre in inganno. Non si riesce a calcolare, se non in pochissimi casi, la somma di una serie e ci si deve accontentare di studiarne il carattere; e anche in questo caso spesso bisogna accontantarsi di considerare situazioni particolari.

Una serie a termini reali converge se e solo se il limite (4) esiste finito e ciò è vero se e solo se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy; $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$\big|s_{n+p} - s_n\big| < \epsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N, \text{ per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Una volta definita la quantità

$$r_{n,p} := s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

possiamo quindi affermare il seguente teorema.

Teorema 2.3 (Criterio di Cauchy)**.** *Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbf{N}} |r_{n,p}| = 0,$$

cioè se e solo se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *è di Cauchy.*

Commento - Il risultato precedente è una caratterizzazione delle serie convergenti, ma risulta poco utile per studiarne il carattere, e anche quando lo è risulta poco pratico. Quello che segue (serie armonica) è un esempio di utilizzo di tale criterio, ma, come vedremo in seguito, la serie che studiamo potrà essere studiata in molti altri modi più immediati.

Commento - Spesso nelle ipotesi dei criteri che vedremo dal prossimo sottoparagrafo supporremo vere alcune ipotesi sui termini della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ in maniera *definitiva*, cioè vere da un certo $\nu \in \mathbf{N}$ in poi. Che una certa ipotesi sia verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$ o *definitivamente* è equivalente ai fini dello studio del carattere della serie. Quello che conta è il comportamento asintotico di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, come il Teorema 2.3 mostra.

Serie armonica - La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è detta serie armonica. Possiamo scrivere, e stimare, la sua somma come segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \geqslant \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \quad \left(\frac{1}{2}\right) \quad + \qquad \left(\frac{1}{2}\right) \qquad + \ldots
\end{aligned}$$

da cui si deduce che la serie diverge positivamente. Volendo usare il Teorema 2.3 si osservi che

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \frac{1}{2^n + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ termini}} \geqslant \frac{1}{2}$$

Teorema 2.4. *Condizione necessaria affinché una serie a termini reali* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *sia convergente è che*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0\,.$$

Dimostrazione - Per ipotesi il limite (4) esiste ed è un numero $s \in \mathbf{R}$. Il generico termine della serie può essere scritto come segue:

$$a_n = s_n - s_{n-1}\,.$$

Ne segue che passando al limite si ottiene

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.5. - Questo risultato è praticamente inutile per capire se una serie è convergente. È però utile in negativo: se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste o non è zero possiamo concludere che la serie non converge.

Esempio 2.6. - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{7n+4}$ non converge. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{7n+4} = \frac{1}{7} \neq 0\,.$$

Possiamo dire qualcosa in più? Certo! Poiché ogni termine è positivo la successione delle somme parziali è strettamente crescente, per cui concludiamo che la serie diverge positivamente.

Serie geometrica - Si consideri $q \in \mathbf{R}$. Vogliamo studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\,. \tag{5}$$

Se $q = 1$ tale somma evidentemente diverge positivamente. Supponiamo ora $q \neq 1$ e moltiplichiamo per $1 - q$ le somme parziali. Si ottiene

$$(1-q)s_n = (1-q)\sum_{n=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}\,.$$

Da questo si ottiene che converge solo se $|q| < 1$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } q \in (-1,1) \\ +\infty & \text{se } q \geqslant 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leqslant -1 \end{cases}$$

Si osservi che, in maniera simile a prima, si ottiene che, sempre per $|q| < 1$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}\,. \tag{6}$$

A questo punto possiamo verificare che la serie (1) converge a 1 e che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$$

da cui ritroviamo (si veda anche più avanti il punto *ii*) del sottoparagrafo **Operazioni con le serie**) che il numero α in (2) è 1.

Curiosità - Vediamo una dimostrazione dell'uguaglianza (6) meno immediata di quella vista precedentemente, ma carina ed elegante, che usa le successioni per ricorrenza (si ringrazia Alessio).
Si fissi $b > 1$ e si definisca la successione

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1, \\ a_1 &:= b^q, \\ a_2 &:= b^q b^{q^2} = b^{q+q^2}, \\ a_3 &:= b^q b^{q^2} b^{q^3} = b^{q+q^2+q^3}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

È evidente che la successione $(a_n)_n$ è crescente e quindi ammette limite $\ell \in (1, +\infty]$.
Cerchiamo ora di scrivere $(a_n)_n$ in maniera ricorrente: si osservi che la successione può essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} a_0 := 1, \\ a_{n+1} := (b\,a_n)^q. \end{cases}$$

A questo punto, sapendo già che tale successione ammette limite e sfruttando l'espressione ricorsiva, si ha

$$\ell = (b\,\ell)^q \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = b^{\frac{q}{1-q}}.$$

Poiché

$$a_n = b^{q+q^2+q^3+\cdots q^n} = b^{\sum_{k=1}^n q^k}$$

si ottiene anche che

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} b^{\sum_{k=1}^n q^k} = b^{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n q^k} = b^{\sum_{k=1}^{+\infty} q^k}\,.$$

Serie telescopiche - Si supponga che il termine generale della serie sia del tipo

$$a_n = b_n - b_{n+1} \qquad \text{(oppure} \qquad a_n = b_{n+1} - b_n)\,.$$

In questo speciale caso si ha che la successione delle somme parziali è data da

$$s_n = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}.$$

Supposto che $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esista, basterà fare il limite del termine generale per conoscere la somma (e non solo il carattere) della serie che è dato da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

Analogamente si tratta il caso in cui $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Esempio 2.7. - Mostriamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

Osservando che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ si deduce immediatamente che

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

da cui la tesi.

Altro esempio: studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

In questo caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, ma questo non ci aiuta. Valutando le somme parziali, e scrivendo $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, si ha

$$\begin{aligned} s_n = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \\ + \cdots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = \log\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) \end{aligned}$$

oppure, scrivendo

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n,$$

si ottiene la serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\log(n+1) - \log n\big)$$

le cui somme parziali sono date da

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \log(n+1)$$

per cui la serie diverge positivamente.

EX - Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$.

Esempio 2.8. - Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n}$.

Si osservi che

$$\frac{2}{n^2+2n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Ponendo $b_n = \frac{1}{n}$ si ottiene che la serie data si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(b_n - b_{n+2}\big).$$

Calcolando allora le somme parziali

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+2}\big) = \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \frac{1}{9}\right) \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

che converge a $3/2$. La cosa si può più facilmente risolvere osservando che

$$\big(b_n - b_{n+2}\big) = \big(b_n - b_{n+1}\big) + \big(b_{n+1} - b_{n+2}\big).$$

A questo punto trattando separatamente i due termini si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+1}\big) = b_1 - b_{n+1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \big(b_{k+1} - b_{k+2}\big) = b_2 - b_{n+2}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n} \big(b_k - b_{k+2}\big) = b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}.$$

Si conclude che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n} = \frac{3}{2}$.

EX - Si calcolino le somme di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ e di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Ancora sulla serie armonica - Un altro modo (ma ce ne sono tanti) per vedere la divergenza della serie armonica è il seguente. Usando il fatto noto che

$$e \geqslant \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1,$$

si ottiene

$$1 = \log e \geqslant \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = n \log\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

da cui

$$\frac{1}{n} \geqslant \log(n+1) - \log n$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \big(\log(n+1) - \log n\big) = \log(N+1)$$

e mandando N a $+\infty$ si conclude.
Si osservi che stimando $2 \leqslant \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ si ottiene anche la disuguaglianza opposta (a meno di una costante moltiplicativa)

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\log 2}\big(\log(n+1) - \log n\big)$$

da cui si deduce non solo che la serie armonica diverge, ma anche il suo andamento all'infinito, infatti

$$\log(N+1) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\log 2}\log(N+1)\,. \tag{7}$$

Operazioni con le serie - Si considerino due serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Dalle proprietà dei limiti si deduce che:

i) se le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono entrambe allora converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n;$$

ii) per ogni $\lambda \neq 0$ le due serie $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ hanno lo stesso carattere e (con l'ovvio significato)

$$\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\, a_n;$$

iii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ e $\sum_{k=1}^{n} b_k \geqslant c$ $(\leqslant c)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = +\infty \ (-\infty).$$

2.2. Criteri di convergenza per serie a termini positivi.

Le serie a termini reali e positivi sono quelle sulle quali si può dire di più, infatti la successione delle somme parziali è monotona crescente, per cui queste serie non sono mai indeterminate e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty\,.$$

Per semplicità e per alleggerire la notazione spesso scriveremo

$$\sum a_n \qquad \text{in vece di} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

Proposizione 2.9 (Criterio del confronto)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi tali che*

$$a_n \leqslant b_n \qquad \textit{definitivamente}\,.$$

Allora

i) *se* $\sum b_n$ *è convergente lo è anche* $\sum a_n$*;*

ii) *se* $\sum a_n$ *è divergente lo è anche* $\sum b_n$*.*

Dimostrazione - Supponiamo per semplicità che $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Le somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \sigma_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

soddisfano

$$s_n \leqslant \sigma_n\,.$$

Per la monotonia di $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ e $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, passando al limite si ottengono le tesi. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty;$$

nel caso $\lim \sigma_n = \sigma \in (0, +\infty)$, la conclusione che $\lim s_n$ esista deriva dal fatto che $\{s_n\}_n$ è monotona crescente, il fatto che anche $\lim s_n$ sia finito dal fatto che $\{s_n\}_n$ è limitata da σ; quindi non è né indeterminata, né divergente a $-\infty$, né divergente a $+\infty$. $\square$

Corollario 2.10 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0,+\infty] \qquad \textit{allora}$$

i) *caso* $l \in (0,+\infty)$*: le due serie hanno lo stesso carattere;*

ii) *caso* $l = 0$*: se* $\sum b_n$ *è convergente lo è anche* $\sum a_n$*, se* $\sum a_n$ *è divergente lo è anche* $\sum b_n$*;*

iii) *caso* $l = +\infty$*: se* $\sum a_n$ *è convergente lo è anche* $\sum b_n$*, se* $\sum b_n$ *è divergente lo è anche* $\sum a_n$*.*

Dimostrazione - *i*) Per ipotesi esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2} \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,,$$

cioè

$$\left(\frac{1}{2}\,l\right) b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}\,l\right) b_n \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Per il criterio del confronto le due serie hanno lo stesso carattere.
ii) In questo caso esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,,$$

cioè $a_n < b_n$ per ogni $n \geqslant \nu$. Per il criterio del confronto si conclude.
iii) Si mostra analogamente a *ii*) oppure si invertono i ruoli di a_n e b_n: visto che $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$. $\square$

Esempio 2.11. - Abbiamo già visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Usiamo queste informazioni per studiare le tre seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+7}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{diverge,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+7}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+7} \quad \text{diverge,}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

Teorema 2.12 (Criterio della radice)**.** *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Se esiste* $h \in (0,1)$ *tale che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant h \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge.}$$

Se

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \quad \textit{per infiniti valori di } n \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Supponiamo, per semplicità, esista $h \in (0,1)$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leqslant h$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si ha allora

$$a_n \leqslant h^n$$

La serie $\sum h^n$ è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi converge, e per il criterio del confronto si conclude.
Nel secondo caso ci sono infiniti termini per i quali

$$a_n \geqslant 1.$$

Poiché manca la condizione necessaria per la convergenza e la serie è a termini positivi, diverge positivamente. □

Osservazione 2.13. - Si osservi come la condizione

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

non garantisca nulla, ma serve quella più forte enunciata nel teorema ($\sqrt[n]{a_n} \leqslant h$ con $h < 1$). Ad esempio, la successione $a_n = 1/n$ soddisfa tale condizione, ma sappiamo che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.

Teorema 2.14 (Criterio del rapporto di D'Alembert)**.** *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Se esiste* $h \in (0,1)$ *tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant h \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge.}$$

Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \textit{definitivamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.}$$

Dimostrazione - Vediamo solo il secondo punto, il primo è lasciato per esercizio. Supponiamo per semplicità che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,.$$

Ciò significa che la successione è crescente ed essendo positiva non può essere infinitesima, di conseguenza la serie non può convergere. □

Osservazione 2.15. - Si osservi come nel caso in cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad \text{per infiniti valori di } n$$

non si possa concludere. Si consideri ad esempio la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{per } n \text{ pari,} \\ \dfrac{3}{n^2} & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases}$$

oppure

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{per } n \text{ pari,} \\ \dfrac{1}{4^n} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\frac{n^2}{(n+1)^2} \geqslant 2 \qquad \text{definitivamente per } n \text{ pari,}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^n}{2^{n+1}} = 2^{n-1} \qquad \text{per } n \text{ dispari,}$$

ma in entrambi i casi le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono.

Corollario 2.16. *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty].$$

Se

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \ell < 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge,} \\ \ell > 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.} \end{aligned}$$

Dimostrazione - Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in (0,1)$, per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $\ell + \varepsilon < 1$ si conclude usando il criterio della radice.
Se $\ell > 1$ allora per infiniti termini si ha

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

e si conclude poiché non vale la condizione necessaria per la convergenza. □

Corollario 2.17. *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo esista*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty].$$

Se

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \ell < 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{converge,} \\ \ell > 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \sum a_n \quad \textit{diverge.} \end{aligned}$$

Se

Dimostrazione - Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in (0,1)$, per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $\ell + \varepsilon < 1$ si conclude usando il criterio del rapporto. Analogamente se $\ell > 1$ per ogni ε esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Scegliendo ε in modo tale che $\ell - \varepsilon > 1$ si conclude nuovamente usando il criterio del rapporto. □

Osservazione 2.18. - Si osservi come il caso $\ell = 1$ nel corollari non sono presi in considerazione. Si considerino a tal proposito le due serie $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ di cui conosciamo già il carattere. Poniamo $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$. Si osservi come si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

nonostante la prima serie diverga, la seconda converga.

Esempio 2.19. - Dato $a > 0$ si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n!}$.
Usiamo i criteri appena visti: denotando con a_n il termine generale con il criterio del rapporto si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to_{n\to+\infty} 0,$$

con il criterio della radice si ottiene

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} \to_{n\to+\infty} 0.$$

In entrambi i casi si conclude che la serie converge qualunque sia il valore di a.

Come si è visto dall'Esempio 2.19 i due limiti (quello del rapporto e quello della radice) possono essere uguali, ma in generale non sempre lo sono. Il legame tra i due è dato dal seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 2.20. *Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a termini positivi si ha*

$$\textit{se esiste} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \Longrightarrow \qquad \textit{esiste} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

e i due limiti sono uguali.

Osservazione 2.21. - Vediamo con un esempio che il contrario della tesi del Teorema (2.20) in generale è falso. Si consideri

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

mentre la successione $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ non può avere limite dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Osservazione 2.22. - Si riveda anche l'Osservazione 2.15 alla luce di questo risultato.

Osservazione 2.23. - Il Teorema 2.20 può essere utile quando si deve calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ per una qualche successione e per qualche motivo esiste e risulta più semplice da calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Esempio: si dica se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{n!}} = l \in (0, +\infty).$$

Se si considera

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e\,.$$

Quindi $\alpha > 0$ esiste ed è 1.

Teorema 2.24 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione decrescente e a termini positivi. Allora le due serie*

$$\sum a_n \qquad e \qquad \sum 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione - L'idea è simile a quella usata per studiare il carattere della serie armonica, cioè di raggruppare 2^n termini. Infatti grazie alla monotonia di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si ha che per un fissato $n \in \mathbf{N}$ valgono

$$\frac{1}{2}\, 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = 2^n a_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leqslant 2^n a_{2^n+1} \leqslant 2^n a_{2^n}\,.$$

Si osservi che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k = \sum_{j=2}^{+\infty} a_j$ per cui

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

e dal criterio del confronto si conclude. □

EX - Nelle ipotesi del teorema precedente, cioè che $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sia una successione decrescente e a termini positivi, fissato $k \in \mathbf{N}$, cosa si può dire della serie

$$\sum k^n a_{k^n}?$$

Esempio 2.25. - È bene ricordarsi di verificare sempre la monotonia della successione dei termini generali nel caso si voglia utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy. Vediamo qui con un esempio come la conclusione del teorema può essere falsa se non si ha la monotonia. Si consideri la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n = 2^k \quad \text{per un qualche } k \in \mathbf{N}, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiamo il carattere della serie $\sum a_n$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2^k} a_n + \sum_{n\neq 2^k} a_n \leqslant \sum_{n=2^k} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

quindi per confronto la serie converge. Se andiamo a valutare i termini $2^n a_{2^n}$ si ottiene

$$2^n a_{2^n} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_n 2^n a_{2^n} = +\infty.$$

Esempio 2.26. - Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$.

È possibile usare il criterio del confronto (asintotico) confrontando il termine $1/\log n$ con $1/n$ per concludere. Ma vogliamo usare qui il criterio di condensazione appena visto, per mostrare la sua utilità quando si ha a che fare con un logaritmo.
Denotato con a_n il temine $1/\log n$, si osservi (e si verifichi sempre!) innanzitutto che

$$a_{n+1} \leqslant a_n;$$

dopodiché valutiamo il temine

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{\log 2^n} = \frac{2^n}{n \log 2}\,.$$

È evidente che la serie

$$\sum \frac{2^n}{n}$$

diverge, per cui divergerà anche la serie data.

Serie armonica generalizzata - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad\qquad p > 0 \text{ parametro fissato.}$$

Il criterio di condensazione di Cauchy è un modo semplice per studiare questa serie. Infatti, una volta verificato che $a_{n+1} \leqslant a_n$ dove a_n denota $1/n^p$, si ha che

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{(2^n)^p} = \frac{2^n}{(2^p)^n} = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

quindi la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ altro non è che la serie geometrica di ragione $1/2^{p-1}$. Tale serie converge se, e solo se, $1/2^{p-1} < 1$, e cioè per

$$p > 1.$$

2.3. Serie a segno alterno: Criterio di Leibniz.

Le serie a segno alterno sono speciali serie a termini reali del tipo

$$\sum b_n \qquad \text{dove} \quad b_n = (-1)^n a_n.$$

Vediamo ora un criterio ad hoc per questo tipo di serie.

Teorema 2.27. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una successione soddisfacente*

i) $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$*,*

ii) $a_{n+1} \leqslant a_n$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$*,*

iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*.*

Allora la serie $\sum(-1)^n a_n$ *converge e inoltre vale la stima*

$$\left| \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leqslant a_k \,. \tag{8}$$

Dimostrazione - Consideriamo le successioni delle somme parziali di indice pari e di indice dispari. Si osservi che

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant s_{2n}, \tag{9}$$

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant s_{2n+1}, \tag{10}$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \tag{11}$$

Da (9) e da (10) deduciamo che

$$\begin{aligned} &\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}} \qquad \text{è decrescente,} \\ &\{s_{2n+1}\}_{n\in\mathbf{N}} \qquad \text{è crescente} \end{aligned}$$

e quindi le due sottosuccessioni ammettono limite. Inoltre da (11) si deduce che $s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant s_1$, e quindi in particolare che $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ è inferiormente limitata. Analogamente si mostra che $\{s_{2n+1}\}_{n\in\mathbf{N}}$ è superiormente limitata. Da queste informazioni si deduce che i limiti sono finiti, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \sigma \in \mathbf{R}\,.$$

Da (11) e l'ipotesi *iii*) si ha che

$$s - \sigma = \lim_{n \to +\infty} \big(s_{2n} - s_{2n+1}\big) = 0\,.$$

Poiché la sottosuccessione di indici pari e quella di indici dispari hanno lo stesso limite deduciamo che (perché l'unione dei pari e dei dispari è tutto $\mathbf{N}$)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s = \sigma\,.$$

Infine, poiché $s_{2n-1} \leqslant s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$ si ha

$$\begin{aligned} \big|s - s_{2n}\big| &\leqslant \big|s_{2n+1} - s_{2n}\big| = a_{2n+1} \\ \big|s - s_{2n-1}\big| &\leqslant \big|s_{2n-1} - s_{2n}\big| = a_{2n} \end{aligned}$$

da cui per ogni $k \in \mathbf{N}$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right| = \big|s - s_k\big| \leqslant a_{k+1}\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.28. - Attenzione! Per la conclusione dell'ultimo teorema abbiamo usato il fatto che poiché la sottosuccessione di indici pari e la sottosuccessione di indici dispari di $\{s_n\}_n$ convergono ad uno stesso limite σ allora anche $\{s_n\}_n$ converge a σ.
Questo accade solamente perché l'unione (insiemistica) delle due sottosuccessioni è tutta la successione $\{s_n\}_n$. In generale è falso che se una successione ha due sottosuccessioni convergenti ad uno stesso limite ℓ anche la successione data converge ad ℓ.

Esempio 2.29. - Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Si ha che $a_n = 1/n$ soddisfa i punti *i*), *ii*), *iii*), per cui la serie data converge.

Vediamo con un esempio come le ipotesi del criterio di Leibniz siano ottimali. Si consideri la successione

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari,} \\[2mm] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

che non è monotona decrescente e non soddisfa quindi il punto *ii*) del criterio di Leibniz. Si provi che la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ diverge positivamente.

3. Convergenza assoluta

Definizione 3.1. *Data* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *successione, diremo che la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

è assolutamente convergente *se è convergente la serie (a termini non negativi)*

$$\sum_n |a_n|.$$

Per meglio distinguerla dalla convergenza assoluta, talvolta la convergenza è detta convergenza semplice.

Teorema 3.2. *Una serie assolutamente convergente è anche semplicemente convergente. Inoltre*

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|. \tag{12}$$

Dimostrazione - Per il criterio di Cauchy (Teorema 2.3) la serie $\sum a_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu, \quad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Per ipotesi la serie $\sum |a_n|$ converge: allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu, \quad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Quindi, poiché dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|,$$

la serie $\sum a_n$ è anche (semplicemente) convergente. Ora considerando le somme parziali, stimando $\Big|\sum_{n=0}^{N} a_k\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n|$ e mandando N a $+\infty$ si ottiene anche (12). □

Esempio - Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$.

In questo caso la convergenza non è facile da studiare, non possiamo applicare nessun criterio per serie a segno costante e la serie non è a segni alterni. Però

$$\Big|\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\Big| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

e poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, convergerà anche la serie data.

4. Prodotti infiniti

Data una successione $\{a_n\}_n$ a termini positivi ci si può chiedere se il seguente prodotto "infinito" converge o meno

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$$

definendo il carattere di tale prodotto come il carattere del limite dei prodotti parziali

$$p_k := a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = \prod_{j=0}^{k} a_j, \qquad \prod_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{n \to +\infty} p_n.$$

Applicando il logaritmo a p_k si ottiene

$$\log p_k = \log \prod_{j=0}^{k} a_j = \sum_{j=0}^{k} \log a_j = \sum_{j=0}^{k} \log b_j$$

dove $b_j = \log a_j$. Chiaramente dalla monotonia della funzione logaritmo si ha che il carattere dei due limiti seguenti (convergente, divergente, indeterminato) è lo stesso:

$$\lim_{n \to +\infty} p_n \,, \qquad \lim_{n \to +\infty} \log p_n,$$

per cui il problema si riduce a studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log a_n.$$

Esempi - Il prodotto $\prod_{n=0}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$ è divergente.

Infatti la serie dei logaritmi di $\sqrt[n]{n}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log \sqrt[n]{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \qquad \text{è divergente.}$$

Il prodotto $\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ è convergente. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e\,.$$

Ricordando che

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}^*$$

si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right) < e^{1/n^2}.$$

Di conseguenza

$$\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

per cui per confronto la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{è convergente.}$$

Il prodotto $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$, al contrario, è divergente. Infatti, sempre dalla disuguaglianza ricordata precedentemente, si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geqslant \log 2^{1/n} = \frac{\log 2}{n}$$

da cui si conclude per confronto.

Veniamo ora alle serie a termini complessi; è chiaro da quanto precede che la serie Σz_n sarà convergente se e solo se lo sono le serie $\Sigma \operatorname{Re}(z_n)$ e $\Sigma \operatorname{Im}(z_n)$; a queste si possono applicare, ovviamente, i risultati dei paragrafi 14 e 15. Alle serie complesse si può inoltre estendere il teorema 15.1 (dell'assoluta convergenza): *se la serie dei moduli $\Sigma |z_n|$ è convergente, sarà tale anche la serie Σz_n*, come segue direttamente dalle disuguaglianze [8.10] del capitolo 1 e dal teorema 15.1 applicato alle serie $\Sigma \operatorname{Re}(z_n)$ e $\Sigma \operatorname{Im}(z_n)$.

Vale anche l'analogo del teorema 12.2, e cioè: *se una serie Σz_n converge, allora si deve avere* $\lim z_n = 0$.

Esempio 18.1
La serie geometrica complessa

$$\Sigma \alpha^n, \qquad \alpha \in \mathbf{C},$$

è convergente se $|\alpha| < 1$, non convergente se $|\alpha| \geqslant 1$.

Infatti, se $|\alpha|<1$, la serie $\Sigma |\alpha^n| = \Sigma |\alpha|^n$ è convergente; se invece $|\alpha| \geqslant 1$, la serie non può essere convergente perché $|\alpha^n| \geqslant 1$, e dunque non è verificata la condizione necessaria $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. ∎

Esempio 18.2
La serie esponenziale complessa

$$\sum^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è convergente per ogni $z \in \mathbf{C}$.

Infatti si ha $|z^n/n!| = |z|^n/n!$, e la serie reale $\Sigma |z|^n/n!$ è convergente per ogni valore di $|z|$ (vedi esercizio 15.3 (c)). ∎

Notizie storiche

La prima serie che appare nella storia della matematica è la serie geometrica, usata da Archimede nella quadratura della parabola, cioè nel calcolo dell'area del segmento di parabola. Non risulta che le serie fossero state usate precedentemente: ad esempio non si ha notizia dell'uso di esse nella discussione dei famosi paradossi di Zenone, alcuni dei quali, in particolare quello famoso di Achille e della tartaruga, si prestano a essere trattati per mezzo della serie geometrica.

La matematica classica non va al di là della serie geometrica, né grandi progressi si registrano nel Medioevo, se si eccettua una dimostrazione della divergenza della serie armonica, con un'argomentazione essenzialmente simile alla nostra (vedi esempio 12.1). Ancora agli inizi del diciassettesimo secolo la serie geometrica è praticamente la sola che venga usata con profitto, ad esempio da Fermat per trovare le aree di numerose figure.

Il grande sviluppo delle serie inizia nella seconda metà del Seicento, con la scoperta di Nicolaus Mercator (circa 1620-1687) che riesce, con uno sviluppo in serie, a eseguire la quadratura dell'iperbole, e dunque a calcolare i logaritmi (vedi cap. 5, § 8 e cap. 6, § 7).

Quasi contemporaneamente, Isaac Newton (1642-1727) trova un grandissimo numero di sviluppi in serie, tra cui, indipendentemente, quello di Mercator, con i quali viene fra l'altro a fornire una quadratura del cerchio, cioè a trovare una serie la cui somma sia l'area del cerchio:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{120} - \frac{5}{1152} - \dots,$$

obiettivo, peraltro, raggiunto anche da Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

che, per l'occasione, introduce il criterio che porta il suo nome (vedi teorema 15.2), e in un certo senso ancor prima da John Wallis (1616-1703) con il suo prodotto infinito:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots} = \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{63}{64}\cdots$$

E' comunque per opera di Newton che la teoria degli sviluppi in serie viene portata a perfezione, divenendo uno dei pilastri del calcolo infinitesimale newtoniano.

Allo sviluppo dei metodi basati sulle serie non corrisponde un altrettanto profondo studio delle questioni di convergenza, che anzi vengono esplicitamente tralasciate: ad esempio dalla formula, valida per $|x|<1$, che dà la somma della serie geometrica (vedi esempio 2.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

si arriva talora perfino a concludere, ponendo $x=2$,

$$-1 = 1+2+4+8+16+\cdots$$

Se nelle mani di un grande matematico come Eulero estrapolazioni come la precedente possono portare a risultati di rilievo, grazie soprattutto alla sua profonda intuizione matematica che gli consente di evitare i trabocchetti che si nascondono dietro una manipolazione acritica delle formule, a lungo andare la situazione diventa poco sostenibile e si fa strada la convinzione che sia necessaria una revisione critica della teoria delle serie, come peraltro di tutto il calcolo infinitesimale.

Questa rifondazione è compiuta da Cauchy nel suo già citato *Cours d'Analyse*, nel quale viene definita e studiata la convergenza delle serie, limitando le operazioni e le manipolazioni alle serie convergenti, e vengono dimostrati quei criteri di convergenza che abbiamo descritto nei paragrafi 14 e 15 del presente capitolo.

Uno strumento di grande importanza e duttilità si rivela, a questo proposito, il criterio di convergenza di Cauchy (vedi teorema 12.1) che è enunciato dal matematico francese come evidente, e si trova prima ancora nell'opera di Bernhard Bolzano (1781-1848), il quale ne tenta anche una dimostrazione; questa, in mancanza di una teoria dei numeri reali, non poteva che rivelarsi illusoria.

La dimostrazione del principio di Cauchy diventa possibile non appena si sia fatta chiarezza sugli assiomi che individuano il sistema dei numeri reali, ovvero si sia dato di questi un modello sulla base dei numeri naturali.

Molto più moderna è la teoria delle successioni, se si eccettua una trattazione dovuta al matematico bolognese Pietro Mengoli (1625-1686) che nella sua *Geometria speciosa*, del 1659, ne definisce correttamente i limiti (e le operazioni con questi). Le idee di Mengoli restano ignorate, anche perché l'interesse per le successioni non si manifesta che molto più tardi, man mano che progredisce lo studio delle proprietà topologiche della retta reale (§ 11), e in generale degli spazi metrici, nei quali le successioni convergenti determinano le funzioni continue (cap. 3, teorema 4.1 e le successive osservazioni) e dunque, in analisi, la topologia.

Capitolo 3

Funzioni e loro limiti; funzioni continue

1 Generalità

Siano A e B due insiemi. Si dice *funzione* o *applicazione* di A in B una legge che ad ogni elemento x di A fa corrispondere un elemento y di B.

Una funzione f di A in B si indica con il simbolo

$$f: A \to B;$$

l'elemento y di B che corrisponde all'elemento x di A si indica con $f(x)$.

Esempio 1.1. Alcune funzioni incontrate in precedenza:

(a) Una successione a valori reali è una funzione di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$.
(b) La legge che ad ogni numero reale fa corrispondere la sua parte intera è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{Z}$.
(c) La funzione esponenziale (di base $A > 0$) che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ fa corrispondere A^x è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^+$, l'insieme dei numeri reali positivi (vedi cap. 2, § 8). ■

Osservazione 1.1. Il concetto di funzione (come quello ad esso strettamente legato di insieme) è uno di quelli per i quali non c'è di meglio che fare appello all'intuizione del lettore. In effetti, quella che abbiamo appena data non è una definizione, ma piuttosto una spiegazione; abbiamo cioè enunciato un certo numero di sinonimi (applicazione, legge) con la speranza di favorire il formarsi di un'idea il più possibile precisa della natura delle funzioni.

Certamente sarebbe possibile definire rigorosamente il concetto di funzione, allo stesso modo, per esempio, in cui abbiamo definito rigorosamente il limite; tuttavia tale definizione richiamerebbe altre nozioni e queste altre ancora, in una concatenazione al termine della quale resterebbe comunque affidata all'intuito qualche nozione primitiva, oggetto cioè non di definizioni, bensì, appunto, di spiegazioni. La scelta di