Integrali generalizzati o impropri

Ultimo aggiornamento: 10 dicembre 2020

Nel seguito considereremo funzioni integrabili secondo Riemann e per brevità scriveremo R-integrabile (se non lo scriveremo è solo per dimenticanza).

1. Integrali generalizzati

Parleremo di integrali generalizzati o impropri di una funzione f quando il sottografico di f del quale si intende calcolare l'area risulta essere una figura illimitata. Ricordiamo che con il simbolo $\overline{\mathbf{R}}$ si intende $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Definizione 1.1. *Data una funzione*

$$f : [a, b) \to \mathbf{R}, \qquad b \in \overline{\mathbf{R}}, \qquad f \text{ R-integrabile in } [a, c] \text{ per ogni } c < b,$$

si dice che f *è* integrabile in senso improprio (o generalizzato) *se* *<u>esiste</u>* *ed è* *<u>finito</u>* *il limite*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \tag{1}$$

e tale limite è detto integrale improprio (o generalizzato) *di* f *in* $[a, b)$*. In tal caso l'integrale improprio si denota semplicemente con*

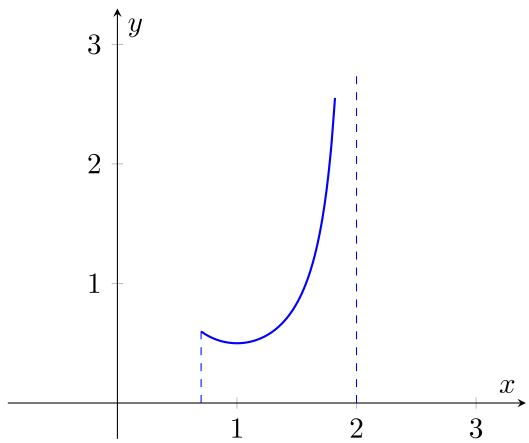
$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

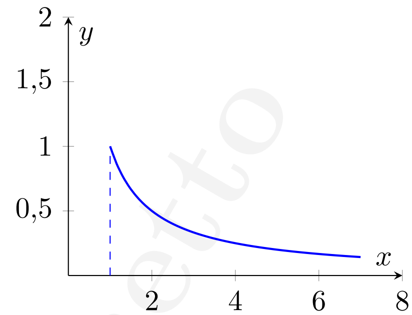
Spesso si usa la stessa terminologia delle serie, per cui se il limite (1) esiste finito di dice che

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{converge.}$$

Allo stesso modo si parla di carattere per il limite (1), convergente, divergente o indeterminato a seconda che il limite esista finito, infinito o non esista.

I due casi interessanti che si possono presentare sono i seguenti: nel primo $b \in \mathbf{R}$ (in figura $b = 2$) e il sottografico è illimitato perché la funzione ha un asintoto verticale, nel secondo $b = +\infty$.





In maniera analoga si può estendere l'integrale di f in $[c, b]$ all'intervallo $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Noi enunceremo i risultati per funzioni definite in $[a, b)$ con $b \in \mathbf{R}$ o $b = +\infty$, ma tutti gli analoghi risultati potranno essere enunciati per funzioni definite in $(a, b]$ con $a \in \mathbf{R}$ o $a = -\infty$.

Esempio 1.2. - La funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, è integrabile in senso generalizzato. Infatti

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^c \right) = \lim_{c \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{c} \right) = 1\,.$$

D'altra parte, invece, la funzione $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, non è integrabile in senso generalizzato. Infatti

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\bigg|_c^1 \right) = \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c} \right) = +\infty\,.$$

Consideriamo la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Si ha

$$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \log x \bigg|_1^c = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty\,.$$

In generale (lo si mostri per esercizio) valgono

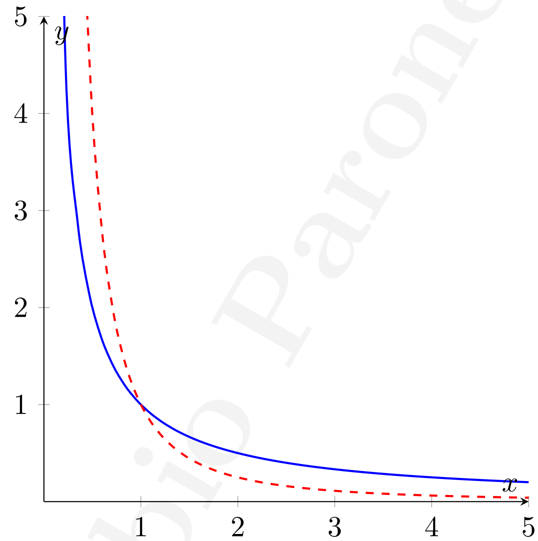
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \text{per } \alpha > 1,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty \qquad \text{per } 0 < \alpha \leqslant 1,$$

mentre

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \qquad\qquad \text{per } 0<\alpha<1,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty \qquad\qquad \text{per } \alpha \geqslant 1\,.$$

Nella figura che segue sono mostrati due grafici di funzioni tipo quelle appena viste, $x^{-\alpha}$ in blu, $x^{-\beta}$ tratteggiata in rosso, con $0<\alpha<\beta$.



Osservazione 1.3. - Data una funzione $f:(a,b] \to \mathbf{R}$ che sia Riemann integrabile in $[c,b]$ per ogni $c \in (a,b)$ si può passare dallo studio dell'integrale improprio sull'intervallo limitato $(a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

allo studio di un integrale improprio su una semiretta. Ad esempio effettuando i due cambi di variabile

$$s = \frac{x-a}{b-a} \qquad t = \frac{1}{s}$$

si passa dall'intervallo $(a,b]$ all'intervallo $(0,1]$ e da questo a $[1,+\infty)$.

EX - Dato $\alpha > 0$, si effettui il cambio di variabile $y = x^{-\alpha}$ per trasformare il problema di studiare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ in un integrale improprio su $[1,+\infty)$. Cosa si deduce?

Definizione 1.4. *Una funzione* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ *è integrabile in senso generalizzato in* (a, b) *se*

$$f \text{ R-integrabile in } [c_1, c_2] \text{ per ogni } c_1, c_2 \text{ con } a < c_1 < c_2 < b$$

e inoltre, preso $\xi \in (a, b)$, *si ha che*

$$f \text{ è integrabile in senso generalizzato in } (a, \xi] \text{ e in } [\xi, b)$$

ed in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Osservazione 1.5. - Si osservi che la definizione appena data è ben posta, nel senso che non dipende dalla scelta di ξ.

Osservazione 1.6. - Si osservi che entrambi gli integrali a destra di (2) sono integrali impropri, cioè vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1 \to a^+} \int_{c_1}^\xi f(x)\,dx + \lim_{c_2 \to b^-} \int_\xi^b f(x)\,dx$$

cioè per definire il termine a sinistra in (2) i due limiti a destra devono esistere separatamente ed essere entrambi finiti! Vediamo un esempio per capire cosa si intende: si consideri la funzione

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1 + x^2}\,. \tag{3}$$

Si ha che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{2} \log(1 + c^2) = +\infty\,.$$

Analogamente

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = -\infty\,.$$

In realtà si ha che per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ valgono

$$\int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^\xi f(x)\,dx = -\infty\,.$$

Allora la funzione f non è integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}$.

EX - Si osservi come, presa f definita in (3),

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^c f(x)\,dx = 0 \qquad \text{(poiché } f \text{ è dispari)}$$

e

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c^2} f(x)\,dx = +\infty.$$

Domanda: dato $a > 0$, è possibile trovare una funzione $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{g(c)} f(x)\,dx = a?$$

Si faccia attenzione al seguente fatto: si supponga di avere $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ Riemann integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, +\infty)$ e che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{sia convergente.}$$

Non è detto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\int_0^{N+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2}$$

e passando al limite si ottiene che l'integrale improprio converge. Però

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{non esiste!}$$

Quel che è vero è che per ogni $A > 0$

$$\text{(4)} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{è convergente} \qquad \text{sse} \qquad \lim_{c\to+\infty} \int_c^{c+A} f(x)\,dx = 0.$$

Infatti, detta F la funzione integrale

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx,$$

se l'integrale improprio esiste si ha, per definizione, che

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) \qquad \text{esiste, finito.}$$

Quindi

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \ell, \qquad \lim_{c\to+\infty} F(c + A) = \ell$$

da cui

$$\lim_{c\to+\infty} \left[F(c + A) - F(c)\right] = \lim_{c\to+\infty} \int_c^{c+A} f(x)\,dx = 0.$$

Ciò che invece è vero però è che

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{è convergente} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{esiste} \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Un'altra cosa vera è che se il limite esiste e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{non è convergente.}$$

Infatti: si supponga per semplicità

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}, \ell \neq 0.$$

Prendendo ad esempio $A = 1$ in (4), si deduce che

$$\lim_{c\to+\infty} \int_c^{c+1} f(x)\,dx = \ell$$

e quindi, da (4), l'integrale improprio non converge.
Se ℓ fosse $+\infty$ o $-\infty$ si conclude in maniera analoga.

2. Integrali generalizzati per funzioni non negative

Vediamo ora qualche criterio che ci aiuti a studiare la convergenza nel caso di funzioni non negative (analoghe conclusioni si potranno trarre per funzioni non positive).
Si osservi come, data una funzione $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ con $b \in \overline{\mathbf{R}}$ e definita la sua funzione integrale $F(c) := \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$, si abbia

$$f \geqslant 0 \ \text{ in } [a,b) \quad \Longrightarrow \quad F \ \text{ crescente in } [a,b) \quad \Longrightarrow \quad \text{esiste} \lim_{c\to b^-} F(c),$$

ma la stessa conclusione vale anche per funzioni non positive:

$$f \leqslant 0 \ \text{ in } [a,b) \quad \Longrightarrow \quad F \ \text{ decrescente in } [a,b) \quad \Longrightarrow \quad \text{esiste} \lim_{c\to b^-} F(c).$$

Teorema 2.1 (Criterio del confronto)**.** *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, localmente integrabili in I e supponiamo valga*

$$0 \leqslant f \leqslant g \qquad \text{in } I.$$

Se g è integrabile in senso generalizzato in I allora anche f lo è.
Se f non è integrabile in senso generalizzato in I allora neanche g lo è.

Dimostrazione - Supponiamo che $I = [a,b)$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$. Allora

$$0 \leqslant \int_a^c f(x)\,dx \leqslant \int_a^c g(x)\,dx\,.$$

I limiti, per $c \to b^-$, di queste due quantità esistono, come osservato precedentemente, e quindi passando al limite si conclude. $\square$

I seguenti risultati sono un corollario del teorema appena visto e si dimostrano in maniera simile agli analoghi risultati per le serie. Lasciamo quindi le verifiche per esercizio (**EX**). Di seguito useremo la stessa nomenclatura usata per le serie.

Criterio del confronto asintotico - Siano $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $f, g \geqslant 0$, f, g localmente R-integrabili in $[a, b)$, cioè integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$. Allora

- se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty) \quad \Longrightarrow$

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\, dx \qquad \text{hanno lo stesso carattere;}$$

- se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\, dx = +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx < +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx = +\infty$;
- se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\, dx < +\infty$.

Idea della dimostrazione: sia $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, +\infty]$. Se

$$\begin{array}{lll} \ell \in (0, +\infty) & \text{si ottengono le stime} & \dfrac{\ell}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3\ell}{2}\, g(x) \quad x \in I_1, \\ \ell = 0 & \text{si ottiene la stima} & f(x) \leqslant g(x) \quad x \in I_2, \\ \ell = +\infty & \text{si ottiene la stima} & g(x) \leqslant f(x) \quad x \in I_3, \end{array}$$

dove I_1, I_2, I_3 sono opportuni intorni sinistri di b.

Analoghi risultati si possono enunciare se $f, g : (a, b] \to \mathbf{R}$ con $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Osservazione 2.2. - I criteri asintotici appena visti valgono anche se $f : [a_1, b) \to \mathbf{R}$ e $g : [a_2, b) \to \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, con $a_1 \neq a_2$. Infatti, si supponga $a_1 < a_2$, si ha che

$$\int_{a_1}^c f(x)\, dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx + \int_{a_2}^c f(x)\, dx$$

e a questo punto, considerando il limite per $c \to b^-$, si confrontano $\int_{a_2}^b f(x)\, dx$ e $\int_{a_2}^b g(x)\, dx$, mentre la quantità $\int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx$ è sicuramente finita.

Esempio 2.3. - Si dica se il seguente integrale è finito o meno:

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{dove } f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 7}\,.$$

Si osservi innanzitutto che $x^2 - 5x + 7$ non si annulla mai.
Sappiamo che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$, si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

per cui $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

3. Esempi

In questo paragrafo vediamo alcuni esempi.

1. Si consideri un polinomio di secondo grado $P(x) = x^2 + 2px + q$ e si studi l'integrabilità di

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\,dx\,.$$

i) Se P non ha radici reali ($q - p^2 > 0$) si può scrivere (in questo caso il grafico sarà tipo quello in Figura 1)

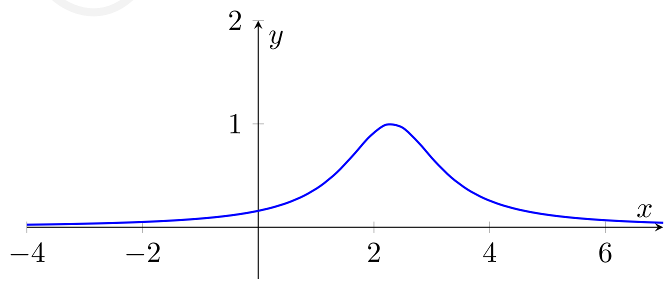
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2px + q}\,dx$$

con α arbitrario e confrontare i due integrali rispettivamente con

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

(si veda l'Osservazione 2.2) per concludere che l'integrale dato è finito (o convergente).

Figura 1



In questo caso possiamo facilmente anche calcolarne il valore: scrivendo

$$P(x) = (x+p)^2 + q - p^2$$

e scegliendo $\alpha = -p$ e facendo i cambi di variabile $y = x+p$ e $z = y/\sqrt{q-p^2}$ si ha

$$\int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2px+q}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+q-p^2}\, dy = \\ = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \frac{\pi}{2}\,.$$

Per simmetria il risultato è $\dfrac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}$.

ii) Se P ha un solo zero (due radici coincidenti) si può scrivere

$$x^2 + 2px + q = (x+p)^2$$

per cui l'integrale diventa (si veda la Figura 2)

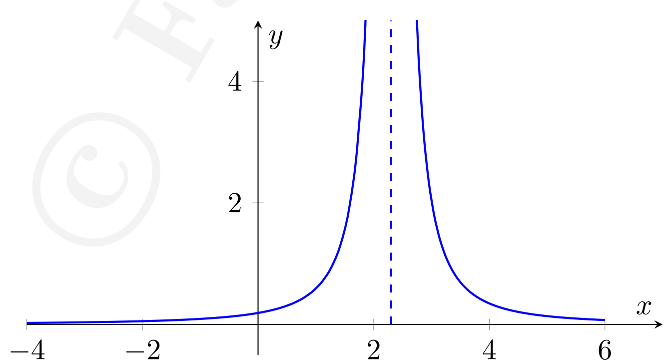
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^2+2px+q}\, dx = \int_{-\infty}^{-p} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx + \int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx\,.$$

Ognuno dei due integrali è divergente: infatti scegliendo $\alpha \in (-p, +\infty)$ arbitrariamente

$$\int_{-p}^{+\infty} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx = \lim_{c_1 \to -p^-} \int_{c_1}^{\alpha} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx + \lim_{c_2 \to +\infty} \int_{\alpha}^{c_2} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx$$

si ha che il secondo limite è finito, ma il primo è $+\infty$. Analogamente diverge $\int_{-\infty}^{-p} \frac{1}{(x+p)^2}\, dx$.

Figura 2



iii) Nel caso in cui P avesse due radici (reali) distinte, α e β, e supponiamo $\alpha < \beta$, la funzione $\frac{1}{P}$, il cui possibile grafico è mostrato in Figura 3, non è integrabile in senso improprio, ma si noti che, dalla definizione che

abbiamo dato, la questione non ha senso (si veda la Definizione 1.4).
In questo caso si ha che

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Può aver senso porsi la domanda se $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio separatamente nei tre intervalli

$$(-\infty, \alpha), \quad (\alpha, \beta), \quad (\beta, +\infty).$$

Ciò che si può dire è che in nessuno dei tre intervalli $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio e, nelle due semirette, l'integrale diverge positivamente, mentre nell'intervallo limitato diverge negativamente.
Ma si osservi la cosa seguente:

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx = +\infty$$

per un motivo diverso dal caso *ii*). Infatti scrivendo (con $\xi < \alpha$ arbitrario)

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx + \int_{\xi}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx$$

si ha che il primo dei due integrali a destra converge poiché la funzione è limitata in $(-\infty, \xi]$ e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

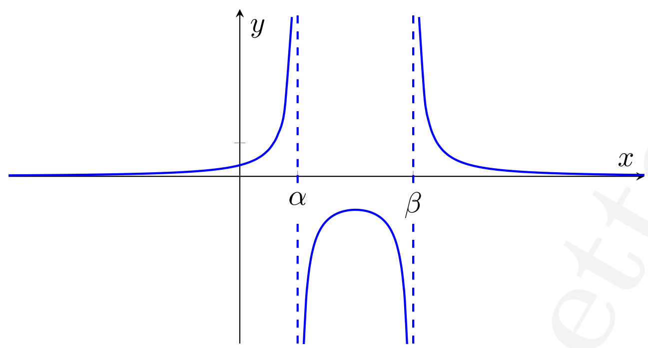
il secondo diverge per confronto con $-(x-\alpha)^{-1} > 0$. Infatti

$$\lim_{x \to \alpha^-} \frac{\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}}{-\frac{1}{x-\alpha}} = \frac{1}{\beta-\alpha},$$

quindi l'ordine di infinito è 1 e non 2 come nel caso *ii*). In conclusione

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx = +\infty, \\
&\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx = -\infty, \\
&\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx = +\infty, \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\, dx \qquad \text{è indeterminato.}
\end{aligned}$$

Figura 3



2. Se P è un polinomio ci si può chiedere se $\frac{1}{P}$ è integrabile in senso improprio in un intervallo del tipo (a, b) dove a e b sono due zeri di P, oppure $a = -\infty$ e b uno zero, oppure a è uno zero e $b = +\infty$, oppure infine in un intervallo che sia un sottointervallo di uno dei tre casi precedenti.

Fattorizzando P il problema si può quindi ridurre a studiare i casi

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^k}\, dx$$
$$\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^k (x-b)^h}\, dx\,.$$

Nel primo caso l'integrale esiste in senso improprio (converge) se e solo se $a > x_o$ (e quindi per $a = x_o$ è $+\infty$), nel secondo non esiste e l'integrale diverge a $+\infty$ (h e k sono interi).

In generale, dati $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, si che

$$\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}\, dx$$

converge per $\alpha < 1$ e $\beta < 1$.

3. Gaussiana - Si studi

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\, dx$$

dove la funzione integranda è nota con il nome di funzione di Gauss. Per vedere che l'integrale è finito è sufficiente osservare che la funzione è pari e studiarla solo per $x \geqslant 0$, dopodiché scrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,. \tag{5}$$

Si tratta di capire se il secondo integrale a destra è finito oppure no. Possiamo stimare in uno dei modi seguenti la funzione $g(x) = e^{-x^2}$ in $[1, +\infty)$:

i) usando il confronto asintotico si ha che per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{-x^2} = 0$$

per cui, poiché per $n \geqslant 2$ l'integrale $\int_1^{+\infty} x^{-n}dx$ è finito, si conclude che è finito anche (5). In realtà si ha che $e^{-x^2} \leqslant x^{-n}$ per ogni x, ma non è immediato mostrarlo.

ii) e *iii*) Si usino, dopo averle dimostrate per esercizio, le seguenti stime

$$\begin{aligned} &e^{-x^2} \leqslant e^{-x} && \text{in } [1, +\infty), \\ &e^{-x^2} \leqslant 2\,x\,e^{-x^2} && \text{in } [1, +\infty) \end{aligned}$$

e integrando direttamente si ottiene, in entrambi i casi, che

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leqslant 1\,.$$

Curiosità - Ricordiamo il valore dell'integrale della gaussiana:

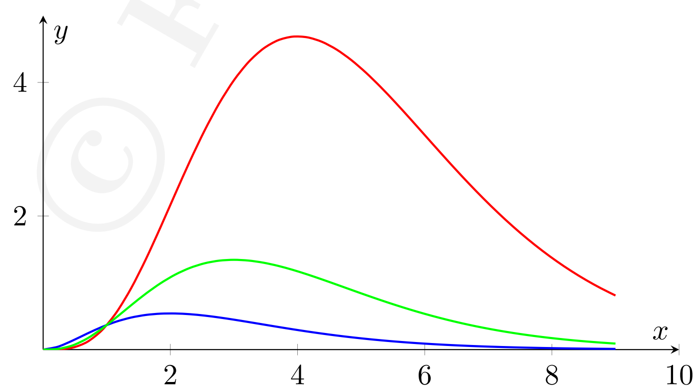
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

valore che può essere calcolato con diverse tecniche, utilizzando anche solo strumenti del primo corso di analisi, anche se in maniera alquanto laboriosa. A tal proposito, se interessati, si veda l'appendice a questo capitolo.
Un modo, sorprendente per la sua semplicità, passa dall'utilizzo degli integrali in più variabili.

4. La gamma di Eulero - Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx\,. \tag{6}$$

Il grafico della funzione integranda è mostrato in figura per tre valori positivi di t:



Si noti che $f_t(x) = x^t e^{-x}$ ha massimo in $x = t$ e il valore massimo è $\left(\dfrac{t}{e}\right)^t$.

Facendo il confronto all'infinito con $1/x^\alpha$, $\alpha > 0$, si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_t(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} x^{t+\alpha}\, e^{-x} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0 \text{ (e per ogni } t \in \mathbf{R}).$$

Nell'origine se $t < 0$ la funzione non è definita in $x = 0$ e l'integrale (6) converge solo se $t > -1$.
Definiamo ora

$$F(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx \qquad \text{per } t \in (-1, +\infty)$$

ed effettuiamo ora il seguente calcolo (valido quindi solo per $t > -1$):

$$F(t+1) = \int_0^{+\infty} x^{t+1} e^{-x}\, dx = -x^{t+1} e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (t+1)\, x^t (-e^{-x})\, dx =$$
$$= (t+1) \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx = (t+1) F(t)\,.$$

Ricorda qualcosa l'espressione

$$F(t+1) = (t+1)F(t)?$$

Valutiamo $F(0)$:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1\,.$$

Con quest'ulteriore informazione si deduce che

$$F(n) = n! \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

Curiosità - La funzione F è utile, facendo una sorta di sviluppo di Taylor all'infinito, per dare una buona approssimazione di $n!$, cosa molto utile quando non esistevano calcolatrici o calcolatori (e anche quelle o quelli all'inizio avrebbero avuto parecchia difficoltà). Tramite la funzione F si può ottenere la cosiddetta formula di Stirling, che in prima approssimazione può essere espressa come segue:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n + o(1)\,.$$

La funzione F, traslata, è nota come gamma di Eulero, precisamente si ha

$$\Gamma(t) := F(t-1) \qquad t > 0\,.$$

Curiosità - La funzione Γ può essere definita anche per $t < 0$, ma t non intero, e anche essere estesa al piano complesso tranne che in 0 e nei punti interi negativi.

4. Convergenza assoluta

Consideriamo in questo paragrafo il caso in cui una funzione $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ con $b \in \overline{\mathbf{R}}$, non ha un segno costante in $[a, b)$. Come per le serie, anche in questo caso c'è un criterio generale tramite il quale ci si riconduce a studiare integrali di funzioni non negative.

Teorema 4.1. *Sia $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ tale che $|f|$ risulti integrabile in senso generalizzato in $[a, b)$. Allora anche f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b)$ e si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx\,. \tag{7}$$

Dimostrazione - Si considerino le due funzioni

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

Si osservi che si hanno

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \qquad \text{e} \qquad 0 \leqslant f^- \leqslant |f|,$$

per cui, utilizzando le ipotesi e il criterio del confronto, si deduce che

$$f^+ \quad \text{e} \quad f^- \qquad \text{sono integrabili in senso improprio in } [a, +\infty)$$

e quindi anche

$$f^+ - f^- \qquad \text{è integrabile in senso improprio in } [a, +\infty)\,.$$

Di conseguenza, poiché $f = f^+ - f^-$, si ha che f è integrabile in senso improprio e inoltre

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_a^b f^+(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b f^-(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.\end{aligned}$$

□

Esempio 4.2. - Si dica se la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato in $[3, +\infty)$.
Poiché

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leqslant \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

e $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile in $[3, +\infty)$ si conclude che f è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, in senso generalizzato e

$$\left|\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Analogamente (**EX**) le funzioni $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$ sono assolutamente integrabili per $\alpha > 1$ in $[3, +\infty)$ e in qualunque altro intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$ e

$$\int_a^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\right|\,dx < +\infty, \qquad a > 0,\ \alpha > 1\,.$$

Esempio 4.3. - La funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$. Infatti

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\,dx = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{n\pi}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} = +\infty\,.$$

Esempio 4.4. - La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(0, 1]$ se $\alpha < 1$. Infatti

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx\,.$$

Ad ogni modo si osservi che, con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ ci si riduce a

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}} \operatorname{sen} y\, dy$$

e la funzione $y \mapsto \frac{1}{y^{2-\alpha}} \operatorname{sen} y$ è assolutamente integrabile in $(1, +\infty)$ se $2 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$, ma è integrabile in senso improprio se $2 - \alpha > 0$, cioè $\alpha < 2$ (per questo si veda il paragrafo 6).

Grafico di $x \mapsto \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ per $x > 0$

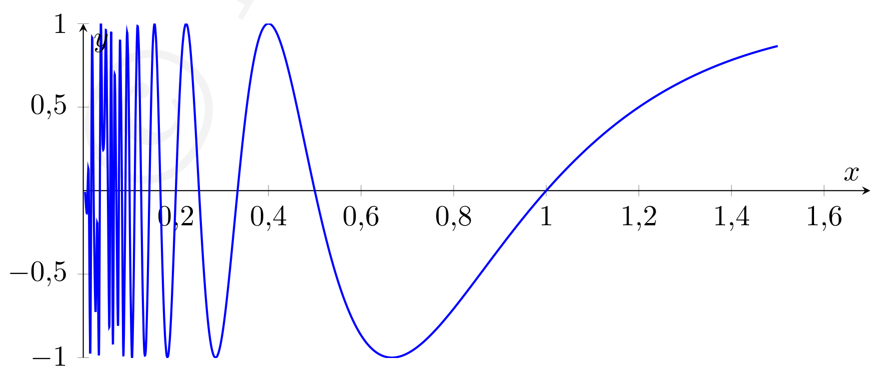
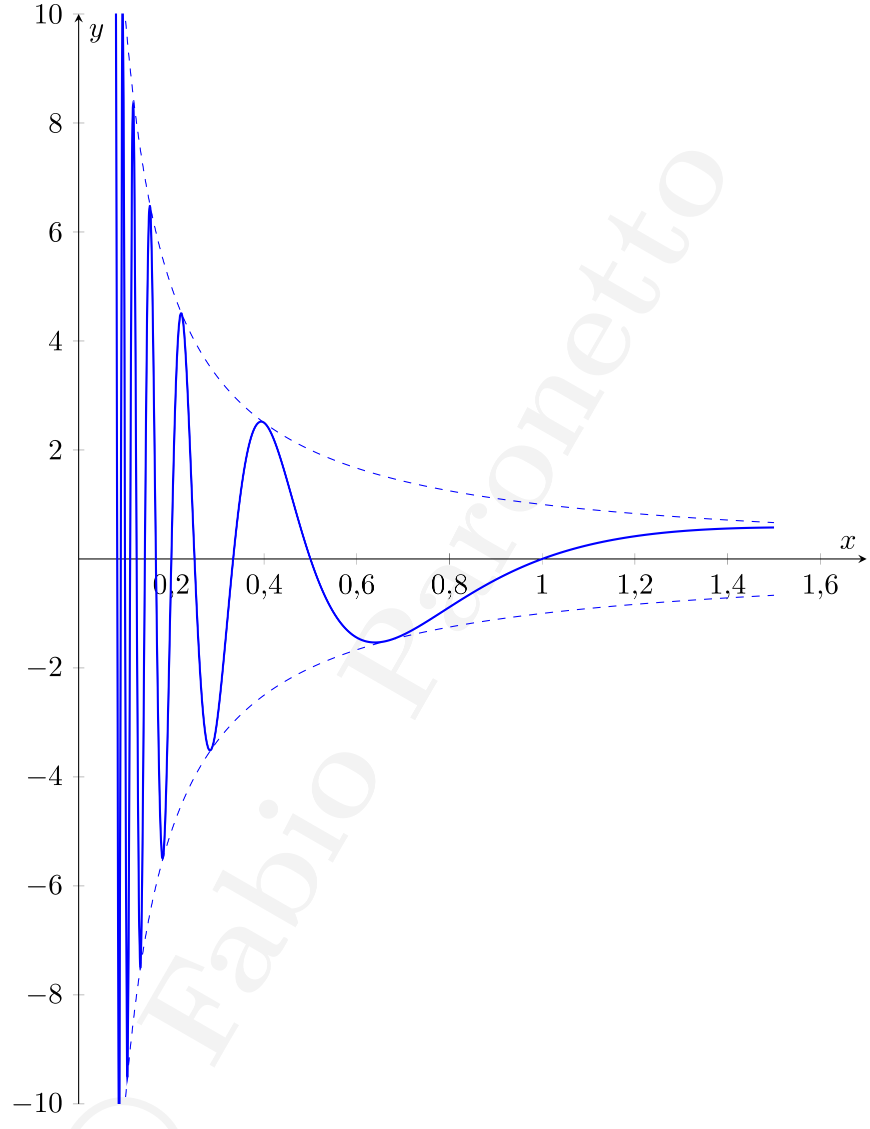


Grafico di $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e, tratteggiati, di $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ e $x \mapsto -\frac{1}{x^\alpha}$ per $x > 0$



5. Integrali generalizzati e serie numeriche

Vediamo ora come gli integrali generalizzati di funzioni definite su intervalli illimitati (semirette) siano strettamente connessi alle serie numeriche. Il seguente risultato è spesso chiamato *Criterio integrale per la convergenza delle serie*, ma ovviamente è anche un criterio per la convergenza degli integrali impropri.

Teorema 5.1. *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *positiva e decrescente. Allora*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{è convergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \quad \text{è convergente},$$

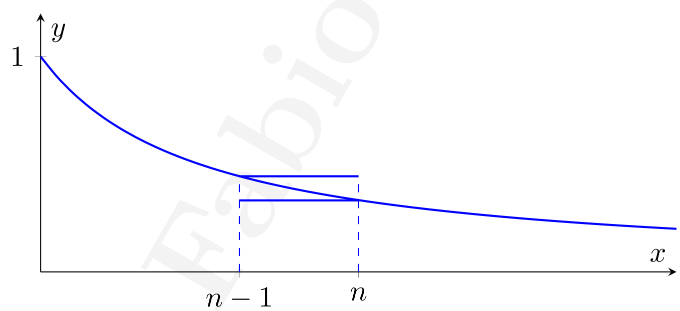
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{è divergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \quad \text{è divergente}.$$

Dimostrazione - Dalla monotonia di f si ottiene che

$$f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n-1) \qquad \text{per } x \in [n-1, n]\,.$$

Integrando tra $n-1$ e n questa serie di disuguaglianze si ottiene (si veda anche la figura più in basso)

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1)\,. \tag{8}$$



Sommando (8) per $n = 1, \ldots, N$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant \int_0^N f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n-1) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\,. \tag{9}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 5.2. - Si osservi che analogamente a (8) si ricava

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

da cui

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Osservazione 5.3. - Si supponga f sia decrescente e mettiamoci nel caso che

$$\sum_n f(n) \quad \text{diverga}\,. \tag{10}$$

Si osservi allora come dalla stima (9) si ricava

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} = 1\,. \tag{11}$$

Infatti considerando le disuguaglianze (9) e dividendo per $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)$ si ottiene

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n) - f(0)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n) - f(N)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \tag{12}$$

Dalle ipotesi (10) passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene (11). Infatti la quantità $f(N)$ è limitata e, anzi, converge poiché f decrescente (ipotesi del teorema). Si ha quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = L \geqslant 0.$$

Si supponga ora che se la serie

$$\sum_n f(n) \quad \text{converga ad un valore } S\,. \tag{13}$$

Da (12) e tenendo conto che in questo caso $L = 0$ si ottengono le stime

$$\frac{S - f(0)}{S} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^N f(x)\,dx}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f(n)} \leqslant \frac{S}{S} = 1,$$

ma soprattutto è possibile dare una stima sulla velocità di convergenza (si veda a tal proposito l'Osservazione 5.2 e (15) per un esempio).

Osservazione 5.4. - Si osservi che se $\lim_n \frac{g(n)}{f(n)} = 1$ esistono due costanti positive c, C tali che

$$c\sum_{n=0}^{N} f(n) \leqslant \sum_{n=0}^{N} g(n) \leqslant C\sum_{n=0}^{N} f(n)\,. \tag{14}$$

Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $(1-\varepsilon)f(n) \leqslant g(n) \leqslant (1+\varepsilon)f(n)$ per ogni $n \geqslant \nu$. Per $n < \nu$ si ha che ci sono $\tilde{c}, \tilde{C}$ tali che

$$\tilde{c}f(n) \leqslant g(n) \leqslant \tilde{C}f(n)$$

per cui è sufficiente definire $c := \min\{\tilde{c}, 1-\varepsilon\}$ e $C := \max\{\tilde{C}, 1+\varepsilon\}$ per ottenere (14).
A questo punto, nelle ipotesi (10) e usando (11), si ottiene che

$$c\int_0^N f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{N} g(n) \leqslant C\int_0^N f(x)\,dx\,.$$

Inoltre in questo caso si può dare una stima della convergenza

Vediamo ora alcuni esempi di serie o integrali il cui comportamento è già noto, solo per vedere come possa essere utile il confronto: talvolta può risultare più semplice effettuare un calcolo esplicito di un integrale anziché studiare il carattere di una serie, talvolta invece può essere più semplice il contrario.

Esempi -

1. Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$.

Utilizzando il criterio appena visto si può calcolare

$$\lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{1}{x\log x} = \lim_{c\to+\infty} \big[\log(\log c) - \log(\log 2)\big] = +\infty$$

per cui si conclude che la serie data diverge.

2. Si studi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Utilizzando il criterio appena visto si può calcolare

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x} = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty$$

per cui si conclude che la serie data diverge.

3. Si studi l'integrale $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ dove $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}$.

Innanzitutto si osservi che la funzione integranda è sempre positiva (perlomeno nell'intervallo in cui va integrata) e limitata (non ci sono punti in cui $x^5 - 7x^2 + 3$ si annulla o cambia segno). Inoltre si osservi che f è, almeno definitivamente, decrescente (è sufficiente calcolare f'). Di conseguenza possiamo semplicemente studiare il carattere della serie

$$\sum_n \frac{n^2+1}{n^5-7n^2+3}\,.$$

Il termine generico di questa serie può essere confrontato con $\dfrac{1}{n^3}$ e, poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, converge anche l'integrale dato.

Si osservino ora le due seguenti cose, che possono essere interessanti. Per far ciò utilizziamo l'Osservazione 5.3.

Serie divergenti - Problema: data una serie divergente è possibile dire quale sia il suo andamento all'infinito? Vediamo un esempio.

Si osservi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ soddisfa le ipotesi (10), per cui vale (11). Questo significa che siamo in grado di dare una stima dell'andamento a $+\infty$ delle somme parziali $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ e, poiché $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \log N$, concludere che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}{\log N} = 1$$

e quindi possiamo dire che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $N \geqslant \nu$ vale

$$(1-\varepsilon)\log N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant (1+\varepsilon)\log N\,.$$

Si confronti a tal proposito la formula (6) del capitolo sulle serie numeriche.

Altro esempio semplice: consideriamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p \in (0,1)$. Poiché

$$\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\,N^{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

l'andamento all'infinito delle somme parziali $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$ sarà quello di N^{1-p}.

Serie convergenti - Nel caso di una serie convergente non possiamo utilizzare in maniera precisa l'Osservazione 5.3 per valutare la somma della serie, ma possiamo stimare in qualche modo l'errore che si commette fermandosi dopo aver sommato N elementi utilizzando l'Osservazione 5.2.

Esempio: consideriamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p > 1$, che sappiamo convergere. Chiamiamo S la somma di tale serie. Poiché

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_N^c \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{N^{p-1}}$$

se ne deduce (usando l'Osservazione 5.2) che

$$\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(N+1)^{p-1}} \leqslant S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{N^{p-1}}\,. \tag{15}$$

In particolare le quantità $S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$ e $\frac{1}{N^{p-1}}$ sono asintotiche, cioè

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}}{\dfrac{1}{N^{p-1}}} = 1. \tag{16}$$

Sia, ad esempio, $p = 4$: volessimo trovare S con una tolleranza di 10^{-3}, basterà sommare una decina di termini.

Approfondimento - Supponiamo ora che la serie data non sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con a_n asintotica a $1/n^2$, cioè

$$a_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che

$$-\epsilon\,\frac{1}{n^2} < o\left(\frac{1}{n^2}\right) < \epsilon\,\frac{1}{n^2} \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$

Di conseguenza (si veda (15))

$$(1-\epsilon)\frac{1}{N} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leqslant (1+\epsilon)\frac{1}{N}$$

e

$$1-\epsilon \leqslant \liminf_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n}{\dfrac{1}{N}} \leqslant \limsup_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n}{\dfrac{1}{N}} \leqslant 1+\epsilon.$$

Poiché ciò è vero per ϵ arbitrario si conclude che se a_n non è uguale a $1/n^2$, ma solamente asintotica a $1/n^2$, vale lo stesso

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} a_n}{\dfrac{1}{N}} = 1$$

come ottenuto in (16) per $a_n = \frac{1}{n^2}$.

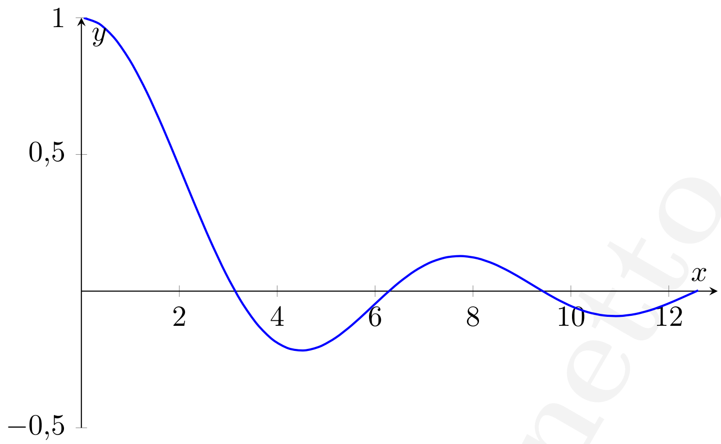
6. Integrali oscillanti

Abbiamo visto nell'Esempio 4.3 che la funzione $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è assolutamente integrabile in $(0, +\infty)$. Ma è integrabile in senso generalizzato? Esiste, cioè, finita la quantità

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad ? \tag{17}$$

Innanzitutto si osservi che la funzione è limitata (il grafico è mostrato in figura), infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$



Quindi possiamo concentrarci sul limite all'infinito

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

Per ogni $c>0$ esiste un unico naturale $n=n(c)$ per cui

$$(18)\quad n\pi \leqslant c < (n+1)\pi, \qquad \left(\text{è la parte intera di } \frac{c}{\pi} \text{ denotata da } \left[\frac{c}{\pi}\right]\right),$$

per cui, se per semplicità poniamo $f(x)=1/x$, possiamo scrivere

$$\int_0^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{n\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx + \int_{n\pi}^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx\,.$$

Ora per ogni $k\in\mathbf{N}$ definiamo

$$(19)\qquad a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,|\operatorname{sen} x|\,dx$$

dimodoché si abbia

$$\int_0^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k + E(c)$$

dove E è un errore, funzione del punto c, ed è

$$E(c) := \int_{n\pi}^c f(x)\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{con } n \text{ soddisfacente (18)}\,.$$

Si osservi che

$$(20)\quad |E(c)| \leqslant \sup_{x\in[n\pi,c]} f(x)\int_{n\pi}^c |\operatorname{sen} x|\,dx \leqslant f(n\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{n\pi}\,.$$

A questo punto si osservi che la somma

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k$$

non è altro che la somma parziale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$, che converge per il criterio di Leibniz perché, dalle proprietà di f, si deduce

$$
(21)\qquad
\begin{array}{lcl}
f \text{ positiva} & \Longrightarrow & a_k > 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}, \\
f \text{ decrescente} & \Longrightarrow & a_{k+1} \leqslant a_k \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 & \Longrightarrow & \lim_{k\to+\infty} a_k = 0\,.
\end{array}
$$

Ricordandoci che

$$n = \left[\frac{c}{\pi}\right]$$

possiamo passare al limite per $c \to +\infty$ e scrivere

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx = \lim_{c\to+\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{c}{\pi}]-1}(-1)^k a_k + \lim_{c\to+\infty} E(c)$$

e poiché, usando (20) e il fatto che la serie converge, i due limiti a destra esistono, finiti, si conclude che esiste finito anche il limite a sinistra e

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k\,.$$

EX - Si mostri che l'integrale (17) converge integrando per parti.

L'esempio appena visto è un tipico esempio di integrale oscillante, caso particolare di

$$(22)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,\cos x\, dx\,.$$

Si osservi come il ragionamento fatto non dipende dalla scelta della funzione $x \mapsto 1/x$, ma da alcune sue proprietà. Possiamo quindi generalizzare quanto appena visto ai due integrali (22) con una generica funzione f. In generale si dovrà dividere lo studio di (22) in due parti scrivendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^{a+1} f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx + \lim_{c\to+\infty}\int_{a+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx\,.$$

A questo punto servono due condizioni che garantiscano l'esistenza dei due limiti separatamente, ma in questo paragrafo concentriamo la nostra attenzione sul problema di studiare il secondo dei due limiti, che è la parte cosiddetta oscillante, essendo il primo un problema già affrontato nei paragrafi precedenti (si veda a tal proposito anche l'osservazione che segue). Affinché esistano i due integrali in (22) richiederemo allora che

(H.1) esista finito $\lim_{x\to a^+} f(x)\,\mathrm{sen}\, x$ nel primo caso,
esista finito $\lim_{x\to a^+} f(x)\,\cos x$ nel secondo caso;

(H.2) f positiva, decrescente e infinitesima all'infinito, cioè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

L'ipotesi (H.1) può

Osservazione 6.1. - Si noti che la condizione richiesta in (H.1), come già detto, serve solo a garantire l'esistenza dell'integrale $\int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ o $\int_a^{a+1} f(x)\cos x\,dx$. Se f fosse illimitata ($\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$) si può dividere il problema in due e studiare separatamente l'integrale in $(a, a+1]$ e in $[a+1, +\infty)$ e in quest'ultimo intervallo la funzione risulta limitata.
Sia ad esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{definita in } (0, +\infty).$$

Come già visto nell'Esempio 4.2 l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ esiste, ma $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ non esiste perché

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = +\infty\,.$$

Osservazione 6.2. - Se la funzione f in (22) è limitata in $[a, +\infty)$ l'ipotesi (H.1) è superflua e l'unica cosa da verificare (analogamente al criterio di Leibniz per le serie numeriche) è l'ipotesi (H.2).

Detto quanto appena osservato, possiamo enunciare il seguente risultato, già dimostrato.

Teorema 6.3. *Data* $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *limitata in* $[a, +\infty)$ *e inoltre positiva, decrescente e infinitesima all'infinito, gli integrali impropri* (22) *esistono.*

Osservazione 6.4. - Ovviamente se f è negativa e crescente il Teorema 6.3 continua a valere. Si può adattare la dimostrazione o più semplicemente, cambiando segno all'integrale, considerare $-f$.

Approfondimento - Si osservi come, oltre alle ipotesi (H.2) su f, si sia usata una speciale proprietà della funzione $x \mapsto \mathrm{sen}\,x$, legata alla periodicità, per dedurre le proprietà (21) sui coefficienti a_k definiti in (19). Una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice periodica di periodo $P > 0$ se

i) $f(x+P) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
ii) $\mu = \inf\{Q \in \mathbf{R} \,|\, f(x+Q) = f(x)\} > 0$ e in tal caso definiamo $P := \mu$.

La funzione $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ soddisfa il punto *i*) con $P = 4\pi$, ma 4π non è il suo periodo.
La funzione costante $f \equiv 1$ soddisfa il punto *i*), ma non ha periodo. Conclusione: la seconda richiesta è fondamentale per definire il periodo.

La proprietà che si è usata, senza rendersene conto, è la seguente: si considera una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

P1) g sia periodica di periodo $2P$;
P2) $|g|$ sia periodica di periodo P.

In tal modo, se f è una funzione soddisfacente (H.2), si ha che le quantità

$$a_k := \int_{kP}^{(k+1)P} f(x)\,|g(x)|\,dx, \qquad k \in \mathbf{N}$$

definiscono una successione $\{a_k\}_k$ che soddisfa le ipotesi del criterio di Leibinz. Senza le proprietà P1 e P2 non sarebbe possibile dedurre che $\{a_k\}_k$ è decrescente e infinitesima. Osservato ciò si può affermare il seguente teorema, che non dimostriamo, ma che è deducibile da quanto visto precedentemente.

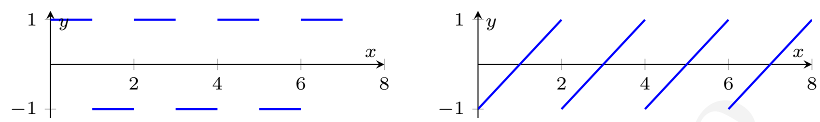
Teorema 6.5. *Siano* $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *e* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *tali che*

i) *f sia limitata, positiva, decrescente e infinitesima all'infinito,*
ii) *g soddisfa* P1 *e* P2 *per un qualche* $P > 0$.

Allora il seguenti integrale improprio esiste

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Si osservi che non si richiede che g sia continua. Ad esempio, se g è la funzione definita da $g(x) = 1$ per $x \in [0,1)$, $g(x) = -1$ per $x \in [1,2)$ ed estesa per periodicità ad $\mathbf{R}$, oppure $g(x) = x - 1$ per $x \in [0,2)$ ed estesa per periodicità ad $\mathbf{R}$, il teorema appena visto vale (si vedano una parte dei grafici in figura).



Esempio 6.6. -

1. Consideriamo $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ e gli integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx \qquad\qquad \alpha > 0 \,.$$

È abbastanza immediato convincersi che le cose funzionano in maniera simile a quanto visto precedentemente; altrimenti è sufficiente porre $y := \alpha x$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{c \to +\infty} \int_a^{\alpha c} f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \operatorname{sen} y \, dy = \frac{1}{\alpha} \int_a^{+\infty} f_\alpha(y) \operatorname{sen} y \, dy$$

dove $f_\alpha(y) = f(y/\alpha)$. Se f_α verifica le ipotesi (H.1) e (H.2) oppure se è limitata e verifica (H.2) gli integrali sono convergenti.
EX - Si mostri che f_α verifica tali ipotesi se e solo se le verifica f.

2. Vediamo che accade per gli integrali (in questo caso si supponga $a \geqslant 0$)

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x) \cos x^\alpha \, dx, \qquad\qquad \alpha > 0, \ \alpha \neq 1 \,. \tag{23}$$

Effettuando il cambio di variabile $y = x^\alpha$ si ottiene

$$\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x^\alpha \, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x) \operatorname{sen} x^\alpha \, dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{c \to +\infty} \int_a^{c^\alpha} \frac{f(y^{1/\alpha})}{y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \operatorname{sen} y \, dy = \frac{1}{\alpha} \int_a^{+\infty} f_\alpha(y) \operatorname{sen} y \, dy$$

dove questa volta

$$f_\alpha(y) = \frac{f(y^{1/\alpha})}{y^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \,.$$

In questo caso la richiesta che f_α sia positiva, decrescente e infinitesima all'infinito è valida sicuramente se f è positiva, decrescente e infinitesima all'infinito e

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} > 0 \qquad \text{cioè} \qquad \alpha > 1 \,.$$

Ma non solo! f potrebbe anche crescere all'infinito. Vediamo un esempio concreto: studiamo il caso

$$\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \,, \qquad \alpha > 0, \tag{24}$$

e separiamo lo studio in due parti, cosicché da considerare tutti i possibili valori di α e β:

$$\int_0^1 x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx + \int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \,. \tag{25}$$

Studiamo prima il secondo integrale: si noti che il secondo integrale è interessante solo per $\alpha > 0$, per $\alpha \leqslant 0$ non è oscillante. Effettuando il cambio di variabile $y = x^\alpha$ e si ottiene

$$\int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx = \int_1^{+\infty} y^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}} \operatorname{sen} y \, dy$$

e questo esiste in senso generalizzato se

$$\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\beta < \alpha - 1}\,.$$

Veniamo al primo integrale in (25): poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha}{x^{\beta+\alpha}} = 1$$

si ha che tale integrale converge se e solo se

$$\beta + \alpha > -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\beta > -\alpha - 1}\,.$$

Mettendo assieme le cose si ha che

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \quad \text{esiste se} \qquad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad -\alpha - 1 < \beta < \alpha - 1\,.}$$

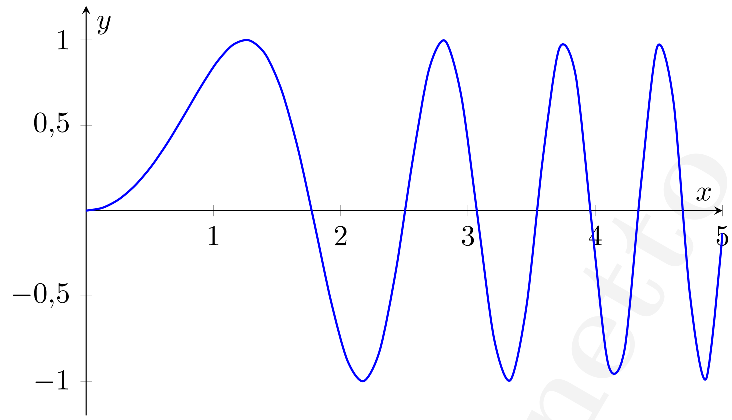
Un analogo discorso vale per integrali del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\beta \cos x^\alpha \, dx$, limitatamente ad $\alpha > 0$, con la differenza che

$$\int_0^1 x^\beta \cos x^\alpha \, dx \qquad \text{converge per ogni} \qquad \beta > -1\,.$$

Per esempio, esistono

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx\,.$$

Grafico di $x \mapsto \operatorname{sen} x^2$



3. Un discorso analogo vale per gli integrali (24) con $\alpha < 0$, ma in questo caso, come già osservato precedentemente, il secondo integrale in (25) non è oscillante se $\alpha \leqslant 0$. Consideriamo allora solamente (e analogamente si farà con il coseno al posto del seno)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \operatorname{sen} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, \qquad \text{con } \alpha > 0.$$

Un caso è già stato considerato nell'Esempio 4.4). Con il cambio

$$y = \frac{1}{x^\alpha}$$

si ottiene che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} \operatorname{sen} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} y^{\frac{\beta-1-\alpha}{\alpha}} \operatorname{sen} y\, dy$$

che converge per

$$\frac{\beta - 1 - \alpha}{\alpha} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\beta < 1 + \alpha}.$$

Vediamo un ultimo risultato, che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 6.7 (Criterio di Abel)**.** *Siano $f, G : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ due funzioni $C^1\big([a, +\infty)\big)$, G limitata, cioè esiste $C > 0$ tale che $|G(x)| \leqslant C$ per ogni $x \geqslant a$. Se*

(26) $$f' \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

definita $g = G'$, si ha che il seguente integrale improprio esiste

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Osservazione 6.8. - Il risultato vale con una generica f monotona, cioè che soddisfa $f' \leqslant 0$ oppure $f' \geqslant 0$ (si veda l'Osservazione 6.4). Si osservi che se $f' \leqslant 0$ e infinitesima all'infinito allora f è positiva, se $f' \geqslant 0$ e infinitesima all'infinito allora f è negativa.

Approfondimento - Per chi fosse curioso di verificare come vengono utilizzate le ipotesi dell'enunciato precedente, aggiungiamo qui la dimostrazione.

Dimostrazione - Integriamo nell'intervallo $[a, c]$ con l'idea che poi valuteremo il limite per $c \to +\infty$. Per ipotesi si ha

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx = f(c)G(c) - f(a)G(a) - \int_a^c f'(x)G(x)\,dx\,. \tag{27}$$

Dalla limitatezza di G ($|G| \leqslant c$) si ha

$$\int_a^c |f'(x)G(x)|dx \leqslant C\int_a^c |f'(x)|\,dx\,.$$

Si tratta di capire se

$$\lim_{c\to+\infty}\int_a^c |f'(x)G(x)|dx \qquad \text{è finito oppure } +\infty.$$

Ora usiamo la monotonia di f: supponiamo dapprima che $f' \geqslant 0$ (f sarà negativa). Allora

$$\int_a^c |f'(x)G(x)|dx \leqslant C\int_a^c |f'(x)|\,dx = C\int_a^c f'(x)\,dx = C\big(f(c) - f(a)\big).$$

Se invece $f' \leqslant 0$ (f sarà positiva) si ha

$$\int_a^c |f'(x)G(x)|dx \leqslant -C\int_a^c f'(x)\,dx = -C\big(f(c) - f(a)\big) = C\big(f(a) - f(c)\big).$$

Poiché $\int_a^c |f'(x)G(x)|dx \leqslant C|f(a)|$ in entrami i casi si deduce che la funzione $f'G$ è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, in senso improprio, e quindi esiste, finito, il seguente limite

$$\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f'(x)G(x)\,dx = \ell.$$

Passando al limite in (27), poiché g è infinitesima all'infinito e G limitata, si conclude che

$$\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)g(x)\,dx = -f(a)G(a) + \ell\,.$$ □

Osservazione 6.9. - Si osservi che rispetto al Teorema 6.3 (e al Teorema 6.5) la f deve essere continua e C^1.
Dall'altra parte il criterio di Abel è più generale riguardo la richiesta su g.

Esempio 6.10. - Si studi l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx$.
In questo caso, definendo

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen}\alpha x$$

si ha che nell'intervallo $[1, +\infty)$

$$f' < 0 \qquad \text{e} \qquad G \quad \text{è limitata}$$

dove $G(x) = -\alpha\cos\alpha x$.

Per gli altri casi mostrati nell'Esempio 6.6 si effettuino gli stessi cambi di variabile prima di applicare il criterio di Abel.

7. Appendice: calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Vediamo qui *un* modo di calcolare il valore di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, fra quelli che conosco il meno immediato, valore che già sappiamo essere finito, per cui chiamiamo $2p$ tale valore, cioè

$$p = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Lo ripetiamo, questo è un modo fra tanti, l'unico di mia conoscenza che usa solo strumenti del primo corso di analisi matematica.
Il calcolo può essere diviso in vari passi, che elenchiamo qui di seguito per sintetizzare i vari passaggi:
1^o *passo* - $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$ se m è pari,
$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \frac{(m-1)!!}{m!!}$ se m è dispari.
2^o *passo* - $\lim_{m\to+\infty} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{\pi}$.
3^o *passo* - $2p = \sqrt{\pi}$.
1^o) Tralasciando $m = 1$, per $m \geqslant 2$, si ha

$$\cos^m t = \cos^{m-2} t\ \cos^2 t = \cos^{m-2} t\left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t\,dt\,.$$

Integrando per parti $\cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m-1}\cos^{m-1} t\right)\operatorname{sen} t$ otteniamo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,\operatorname{sen}^2 t\,dt = -\frac{1}{m-1}\cos^{m-1} t\,\operatorname{sen} t\,\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{m-1}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt$$

quindi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt + \frac{1}{m-1}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^m t\,dt &= \frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} t\,dt = \\ &= \quad \cdots \quad = \frac{(m-1)!!}{m!!}A\end{aligned}$$

dove

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 1 \quad \text{se } m \text{ dispari}, \qquad A = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } m \text{ pari.}$$

Il calcolo è analogo per $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t\,dt$.
2^o) Poiché $0 < \operatorname{sen} x < 1$ per $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} t\,dt < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} t\,dt < \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} t\,dt$$

da cui si ricava, usando il primo punto, che

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\,.$$

Passando ai reciproci e dopodiché moltiplicando per $\pi/2$ e per $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ si ottiene

$$\frac{\pi}{2}\,(2m) < \left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2}\,(2m+1).$$

A questo punto dividendo per m e passando al limite per $m \to +\infty$ si conclude.
3^o) Introducendo una nuova variabile t e ponendo $rt = x$ per $r > 0$ si ha

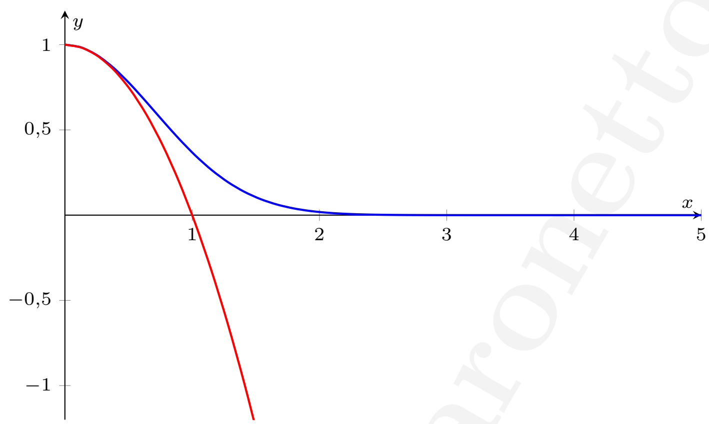
$$p = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-x^2}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_0^1 r e^{-r^2t^2}\,dt\,. \tag{28}$$

Dalla disuguaglianza $e^y - 1 \geqslant y$ si deduce che $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$, per cui $e^{-x^2} \leqslant (1+x^2)^{-1}$ e infine

$$e^{-mx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^m}\,, \qquad m \in \mathbf{N}\,.$$

Sempre dalla disuguaglianza $e^y - 1 \geqslant y$ si deduce anche che $e^{-x^2} \geqslant 1 - x^2$.

Grafici per $x \geqslant 0$ di $x \mapsto e^{x^2}$ in blu e di $x \mapsto 1 - x^2$ in rosso



Allora, per $1 - x^2 \geqslant 0$, cioè $x^2 \leqslant 1$, si deduce che

$$e^{-mx^2} \geqslant (1-x^2)^m\,, \qquad m \in \mathbf{N}\,.$$

Usando entrambe le disuguaglianze ottenute ne segue che

$$\int_0^1 (1-x^2)^m\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx\,.$$

Nel primo integrale a sinistra dell'ultima disuguaglianza si faccia il cambio di variabile $x = \cos t$, nell'ultimo $x = \operatorname{tg} t$: si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} t\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} t\,dt\,,$$

per cui, usando il primo punto,

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leqslant \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx \leqslant \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Moltiplicando per $\sqrt{m}$, usando il secondo punto, si ottiene: a sinistra

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2m+1}\,\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,\sqrt{m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{2m+1}\,\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,;$$

a destra, considerandone il reciproco,

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(2m-2)!!}{(2m-3)!!}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,;$$

di conseguenza il termine centrale ammette limite e

$$\lim_{m\to+\infty} \sqrt{m} \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Infine si conclude poiché, per (28), vale anche

$$\lim_{m\to+\infty} \sqrt{m} \int_0^1 e^{-mx^2}\,dx = p\,.$$