8 - Limiti di funzioni

Ultimo aggiornamento: 8 novembre 2023

1. definizione

Sia $f : D \to \mathbf{R}$ e sia x_o un punto di accumulazione per D. Diciamo che

- $$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D}} f(x) = \ell, \qquad \ell \in \mathbf{R},$$
  se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
  $$0 < |x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- $$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D}} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$
  se per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che
  $$0 < |x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \quad (f(x) < M)$$

- $$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = \ell, \qquad \ell \in \mathbf{R},$$
  se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{R}$ tale che
  $$x > N \quad (x < N) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- $$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$
  se per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{R}$ tale che
  $$x > N \quad (x < N) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \quad (f(x) < M)$$

Possiamo cercare di unificare tutte queste definizioni nel modo seguente: consideriamo $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.
Diciamo che $-\infty$ è un punto di accumulazione per D se D è inferiormente illimitato, $+\infty$ è un punto di accumulazione per D se D è superiormente illimitato, definiamo intorno di $-\infty$ una qualunque semiretta $(-\infty, M]$, definiamo intorno di $+\infty$ una qualunque semiretta $[M, +\infty)$. A questo punto

possiamo scrivere:

siano $f : D \to \mathbf{R}$, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione per D, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Diciamo che

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D}} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno I di ℓ esiste un intorno J di x_o tale che

$$x \in J \setminus \{x_o\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I.$$

Definizione 1.1 (Limite destro e limite sinistro)**.** *Data $f : D \to \mathbf{R}$ e x_o un punto di accumulazione per D definiamo i due insiemi*

$$D^-_{x_o} = \{x \in D \,|\, x < x_o\}, \qquad D^+_{x_o} = \{x \in D \,|\, x > x_o\}.$$

Definiamo limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_o, se esiste,

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D^-_{x_o}}} f(x),$$

definiamo limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_o, se esiste,

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in D^+_{x_o}}} f(x).$$

Vediamo qualche esempio.
A parte casi particolari, si vedano a tal proposito gli esempi 1.2.4, 1.2.5 e 1.2.6, siccome considereremo sempre D un intervallo, non specificheremo $x \in D$ e d'ora in poi scriveremo semplicemente

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

oppure

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \ell.$$

Esempi 1.2. - Vediamo qualche esempio che ci aiuterà a capire il concetto di limite (e anche perché abbiamo messo D che serve a dare una definizione più generale).

1. Sia f la funzione $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Mostriamo che

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ vogliamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon. \tag{1}$$

Si osservi che

$$0 < |x - 2| < \delta \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 - \delta < x < 2 + \delta \quad \text{e} \quad x \neq 2$$

per cui, poiché $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)|$, si ha che

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 4| < \delta|x + 2| < \delta(4 + 2).$$

Quindi segliendo, ad esempio, $6\,\delta \leqslant \varepsilon$, cioè

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$$

si ha che, fissato $\varepsilon > 0$,

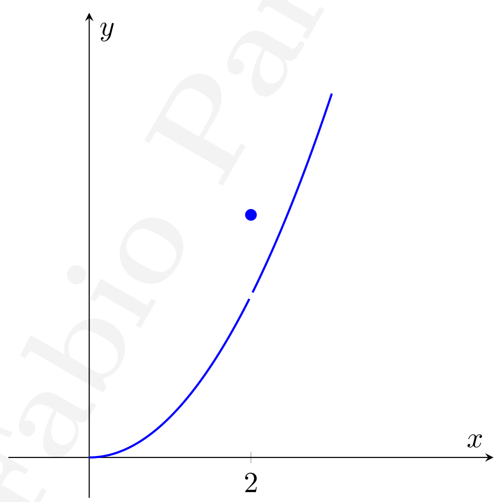
$$0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon,$$

e quindi si è mostrato che $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

2. Sia f la funzione $f : [0,4] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 5 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

In figura un tentativo di riprodurne il grafico.



Si ha che

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

3. Sia f la funzione $f : [0,2) \cup (2,4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Si noti che 2 è di accumulazione per il dominio di f. Si ha che

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

4. Sia f la funzione $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ con $D = \big([0,2) \cup (2,4]\big) \cap \mathbf{Q}$. Si noti che 2 è di accumulazione per il dominio di f. Si ha che

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \in D}} f(x) = 4$$

5. Sia f la funzione $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ con $D = (0,2)$. Si noti che 2 è di accumulazione per il dominio di f. Si ha che

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \in D}} f(x) = 4$$

Si osservi che in questo il limite è il limite sinistro.

6. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ (! abbiamo a che fare con una successione). Allora

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in D = \mathbf{N}}} f(x) = 0$$

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

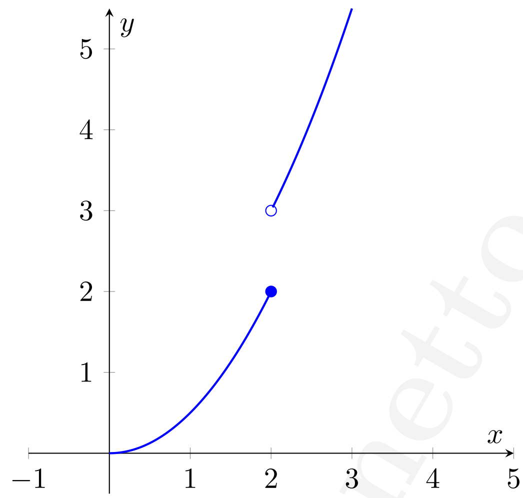
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

8. Considerata $f : [0,4] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$



si avrà che

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5.$$

D'ora in poi enunceremo i risultati solo per il limite scrivendo

$$\lim_{x\to x_o} f(x)$$

considerando come dominio di f un intervallo I e non per i limiti destro e sinistro (anche se gli enunciati, come ad esempio i due che seguono, valgono anche per i limiti destro e sinistro, cosa che potrebbe essere considerata specificando $x \in I$ anche nei casi simili a quelli dell'esempio 1.2.5).

Teorema 1.3 (Unicità del limite)**.** *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione per I, $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$. Se*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_2$$

allora $\ell_1 = \ell_2$. Inoltre

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = \lim_{x\to x_o^+} f(x) = \ell.$$

Siano $f : I \to \mathbf{R}$, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione per I, I intervallo, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ e supponiamo che

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell.$$

Se $\ell \in \mathbf{R}$ diciamo che f *converge* a ℓ per x che tende a x_o;
se $\ell = +\infty$ diciamo che f *diverge* positivamente per x che tende a x_o;
se $\ell = -\infty$ diciamo che f *diverge* negativamente per x che tende a x_o.

Teorema 1.4. *Siano $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto di accumulazione per I, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Si ha che*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$
$$\Updownarrow$$
$$\textit{per ogni successione } \{x_n\}_n \textit{ con } \lim_n x_n = x_o \textit{ si ha } \quad \lim_n f(x_n) = \ell.$$

Dimostrazione - Se esiste il limite $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ è chiaro che per ogni successione $\{x_n\}_n$ che ha limite x_o vale $\lim_n f(x_n) = \ell$.
Viceversa: supponiamo per assurdo che la cosa non sia vera e mettiamoci nel caso in cui $x_o, \ell \in \mathbf{R}$. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ per il quale per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si può trovare $x_n \in I$, $x_n \neq x_o$, tale che

$$0 < |x_n - x_o| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Ma chiaramente $\{x_n\}_n$ converge a x_o, ma $\{f(x_n)\}_n$ non può convergere ad ℓ, il che contraddice l'ipotesi.
Gli altri casi (x_o e/o ℓ infiniti) si mostrano in maniera simile. □

Questo risultato può essere comodo quando si vuole mostrare l'esistenza di un limite, ma non certo da un punto di vista operativo. Da questo punto di vista invece può essere molto comodo in negativo, cioè se si vuole mostrare che un certo limite non esiste basterà trovare due successioni $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ che hanno lo stesso limite x_o, ma $\{f(x_n)\}_n$ e $\{f(y_n)\}_n$ invece non hanno lo stesso limite.
Esempio: mostriamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \qquad \text{non esiste.}$$

Prendendo le successioni $x_n = \pi n$ e $y_n = 2\pi n + \pi/2$ si ottiene che

$$\lim_n \operatorname{sen} x_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_n \operatorname{sen} y_n = 1$$

quindi per il teorema precedente si conclude che il limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.
Per esercizio si verifichi che $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ non esiste.

Altro paio di maniche è mostrare che $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} n$ (n naturale), anche se la dimostrazione non è difficile. Vediamola.

La successione $a_n := \operatorname{sen} n$ non ammette limite.

Si supponga per assurdo che tale limite esista, sia $a \in [-1, 1]$. Si ha

$$\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen}(n-1) = 2 \cos n \ \operatorname{sen} 1.$$

Passando al limite si deduce che

$$\lim_n \cos n = 0.$$

Poiché
$$\operatorname{sen}(n+1) = \operatorname{sen} n \cos 1 + \cos n \operatorname{sen} 1$$
passando al limite si deduce che
$$a = a \cos 1.$$
A questo punto l'unica possibilità perché sia valida l'uguaglianza è che a sia zero. A questo punto passando al limite nell'espressione
$$\cos^2 n + \operatorname{sen}^2 n = 1$$
si ottiene $0 = 1$.

Vediamo ora una serie di risultati analoghi a risultati già visti per le successioni. Ci limitiamo ad enunciarli senza dimostrarli.

Teorema 1.5. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ di accumulazione per I, f monotona. Allora esistono*
$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to x_o^+} f(x).$$
Se f è crescente si ha
$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \sup f\Big(\{x \in I \,|\, x < x_o\Big), \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \inf f\Big(\{x \in I \,|\, x < x_o\Big),$$
se f è decrescente si ha
$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \inf f\Big(\{x \in I \,|\, x < x_o\Big), \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \sup f\Big(\{x \in I \,|\, x < x_o\Big).$$

Teorema 1.6. *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ di accumulazione per I. Si supponga che*
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \in \mathbf{R}.$$
Allora esistono un intorno J di x_o e $C > 0$ tali che
$$|f(x)| \leqslant C \quad \textit{per ogni } x \in J \setminus \{x_o\}.$$

Teorema 1.7 (permanenza del segno)**.** *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o, \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, x_o di accumulazione per I. Sia*
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \neq 0.$$
Allora esiste un intorno J di x_o tale che
$$\begin{aligned} \ell > 0 \ (\textit{anche } +\infty) \quad &\Longrightarrow \quad f(x) > 0 \textit{ per ogni } x \in J \setminus \{x_o\}, \\ \ell < 0 \ (\textit{anche } -\infty) \quad &\Longrightarrow \quad f(x) < 0 \textit{ per ogni } x \in J \setminus \{x_o\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.8 (del confronto)**.** *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ di accumulazione per I. Se*
$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \textit{per ogni } x \in I \setminus \{x_o\}$$

ed esistono $\lim_{x\to x_o} f(x)$, $\lim_{x\to x_o} g(x)$ *allora*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_o} g(x).$$

Teorema 1.9 (due carabinieri)**.** *Siano* $f, g, h : I \to \mathbf{R}$*,* I *intervallo,* $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ *di accumulazione per* I*. Se*

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \qquad \textit{per ogni } x \in I \setminus \{x_o\}$$

ed esistono $\lim_{x\to x_o} f(x)$, $\lim_{x\to x_o} g(x)$ *e sono uguali, allora esiste anche*

$$\lim_{x\to x_o} h(x)$$

ed è uguale ai primi due.

Operazioni con i limiti - Si considerino $f, g : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, $x_o \in \overline{\mathbf{R}}$ di accumulazione per I. Si hanno:

- se $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_1 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to x_o} g(x) = \ell_2 \in \mathbf{R}$, allora $\lim_{x\to x_o} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell_1 + \ell_2$
- se $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_1 \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to x_o} g(x) = \ell_2 \in \mathbf{R}$, allora $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$
- se $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ ed esiste $C > 0$ tale che $|g(x)| \leqslant C$ per ogni $x \in I \setminus \{x_o\}$, allora $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = 0$
- sia $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$
  - se g è inferiormente limitata (superiormente limitata) allora $\lim_{x\to x_o} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$ $(-\infty)$
  - se $g \geqslant \alpha > 0$ allora $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = +\infty$ $(-\infty)$
  - se $g \leqslant \alpha < 0$ allora $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = -\infty$ $(+\infty)$
- sia $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell)$
  - se $\ell \in \mathbf{R}$, $\ell \neq 0$ allora $\lim_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$
  - se $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
  - se $\ell = 0$ o $\ell = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_o} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$

2. Limiti notevoli

Vediamo alcuni limiti, i cui analoghi abbiamo già visto per le successioni.

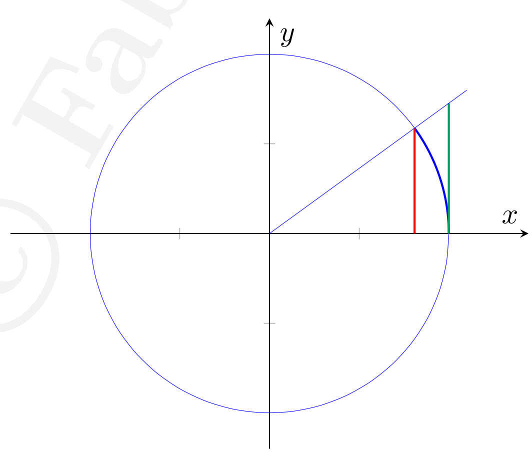
1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

3'. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

4'. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$

Dimostrazioni 1. Si consideri $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ $(x \neq 0)$. Non sarà restrittivo, visto che vogliamo considerare il limite per $x \to 0$. Supponiamo che x sia positivo e sia l'angolo individuato dall'asse delle ascisse e la semiretta in parte disegnata nella figura di sotto. Si ha (il disegno non è una dimostrazione, ma è convincente) che

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x. \tag{2}$$



Analogamente per $x < 0$ si avrà

$$\operatorname{tg} x < x < \operatorname{sen} x.$$

Da (2) si hanno le due disuguaglianze

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Passando al limite per $x \to 0^+$, usando la continuità della funzione coseno nel punto 0 e il teorema dei due carabinieri si ottiene il risultato cercato. Analogamente si procede con il limite per $x \to 0^-$.

2. Dal punto 1. si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0}(1+\cos x)\,\frac{1-\cos x}{x^2}. \end{aligned}$$

Da questo si ha che, se il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ esiste,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

3. Dalle disuguaglianze (già viste nel capitolo sulle successioni)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

prese con $n = 1$ si hanno

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}.$$

Da queste si hanno

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x}$$

e passando al limite si conclude.

4. Facendo il cambio di variabile $y = \log(1+x)$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y - 1} = 1.$$

5. Scrivendo $(1+x)^p = e^{p\log(1+x)}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p - 1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{p\log(1+x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{p\log(1+x)} - 1}{p\log(1+x)}\;\frac{p\log(1+x)}{x} = p. \end{aligned}$$

3'. e 4'. sono lasciati per esercizio.