9 - Funzioni continue

Ultimo aggiornamento: 12 novembre 2023

1. definizione e primi esempi

Definizione 1.1. *Siano* $f : D \to \mathbf{R}$*,* $D \subset \mathbf{R}$*, e* $x_o \in D$*. Diciamo che* f *è* continua in x_o *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$x \in D,\ |x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Si dice che f *è continua in* $A \subset D$ *se* f *è continua in ogni punto di* A*.*

Osservazione 1.2. - Si osservi che δ dipende da ε, ma dipende anche dalla scelta di x_o, quindi δ è una funzione di due variabili ($\delta = \delta(x_o, \varepsilon)$).

Osservazione 1.3. - Differenze con la definizione di limite
1^o) il punto x_o appartiene a D e non è di accumulazione per D
2^o) $|x - x_o| < \delta$ significa che x può anche essere x_o, mentre nella definizione di limite x non può essere x_o;
d'altra parte se $x = x_o$ ovviamente $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$
3^o) se $x_o \in D$ e x_o è di accumulazione per D si ha che

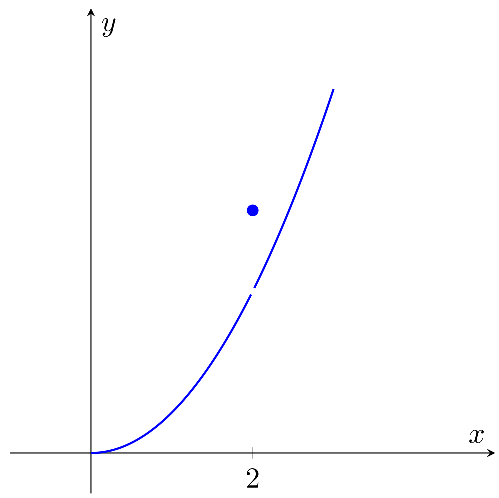
$$f \text{ continua in } x_o \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Esempi 1.4. - Vediamo qualche esempio che ci aiuterà a capire.

1. Sia f la funzione $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 5 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

In figura un tentativo di riprodurne il grafico.

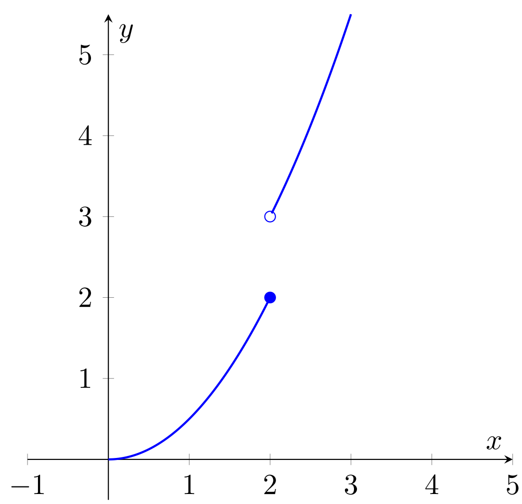


La funzione f non è continua nel punto 2. Si osservi che

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2).$$

2. Sia f la funzione $f : [0,4] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

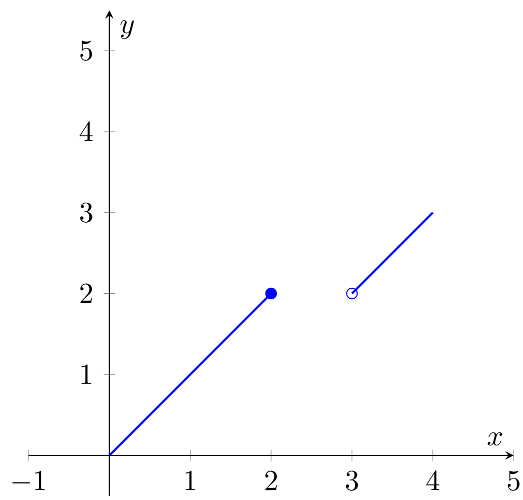


La funzione f non è continua nel punto 2. Si osservi che

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

3. Sia f la funzione $f : [0, 2] \cup (3, 4] \to \mathbf{R}$,

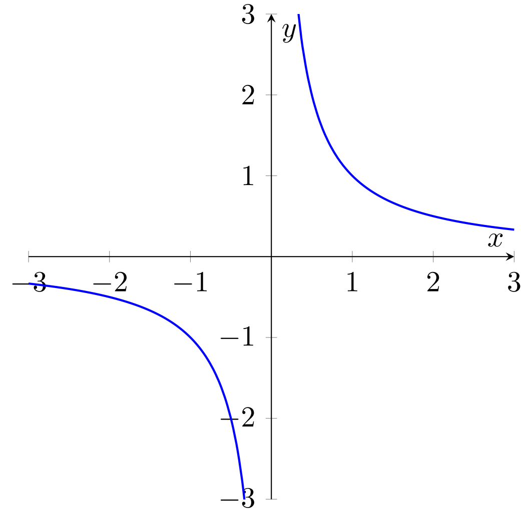
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 2] \\ x - 1 & \text{se } x \in (3, 4]. \end{cases}$$



La funzione f è continua in tutto il suo dominio. Si osservi che la funzione è anche invertibile, ma la sua inversa **non** è continua.

4. Sia f la funzione $f : [0, 2) \cup (2, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ è continua.

5. La funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in ogni punto del suo dominio.



Continuità a destra e a sinistra - Se $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, e x_o è un punto interno a I si dice che f è continua a sinistra in x_o se

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o),$$

è continua a destra in x_o se

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o).$$

Ovviamente se f è continua sia a destra che a sinistra in un punto, in tale punto è continua. Ad esempio, la funzione dell'Esempio **??**.2 è continua a sinistra in 2.

Discontinuità - Data $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, e $x_o \in I$ si ha che

- x_o è un punto di <u>discontinuità eliminabile</u> se i seguenti limiti esistono finiti

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

e sono uguali tra loro, ma diversi da $f(x_o)$. Si veda, e.g., l'Esempio **??**.1.
Si osservi che si potrebbe avere $\{x \in I \,|\, x < x_o\}$ oppure $\{x \in I \,|\, x > x_o\}$ vuoto. In tal caso si ha un solo limite, ma diverso da $f(x_o)$. Per esempio, la funzione dell'Esempio **??**.1 ristretta all'intervallo $[0, 2]$ ha comunque una discontinuità eliminabile in 2.

- x_o è un punto di <u>discontinuità di prima specie</u> se i seguenti limiti esistono finiti

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

ma diversi. È il caso della funzione nell'Esempio **??**.2. A volte è detta anche discontinuità di tipo salto.

- x_o è un punto di <u>discontinuità di seconda specie</u> se f non è continua in x_o

e non siamo in uno dei due casi precedenti. Vediamo alcuni esempi:
1) la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di seconda specie in 0. Si noti che f è continua a sinistra in 0;

2) la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di seconda specie in 0. Si noti che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$.

3) la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

non è continua in alcun punto (ogni punto di $\mathbf{R}$ è un punto di discontinuità di seconda specie).

Prolungamento per continuità - Se una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo, non è definita in un punto x_o e x_o è di accumulazione per I e uno dei due limiti

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x), \qquad \lim_{x\to x_o^+} f(x)$$

esiste finito ed è ℓ oppure entrambi i limiti esistono finiti e sono entrambi ℓ si può *prolungare per continuità* la funzione ad un'altra funzione $\tilde{f} : I \cup \{x_o\} \to \mathbf{R}$ così definita

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \\ \ell & \text{se } x = x_o \end{cases}$$

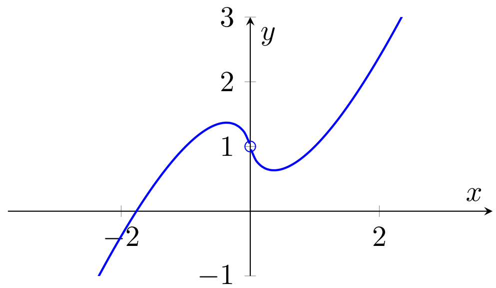
Spesso, per semplicità, si continua a denotare con f la funzione $\tilde{f}$. Vediamo alcuni esempi.

1) La funzione dell'Esempio **??**.4 può essere prolungata per continuità. La sua estesa è $\tilde{f} : [0, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.

2) La funzione $f(x) = 1 + x \log |x|$ è definita in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ed è continua, ma

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

per cui possiamo prolungare la funzione f estendendola ad una funzione $\tilde{f}$ assegnandole il valore 1 in 0. Segue il grafico di f.



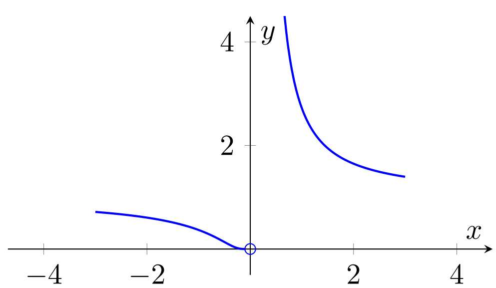
3) La funzione $f(x) = e^{1/x}$ è definita in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ed è continua. Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Possiamo estendere f alla funzione $\tilde{f}$ così definita

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si osservi che l'estensione ora non è continua, ma $\tilde{f}$ ha una discontinuità di seconda specie in 0. Di sotto il grafico di f.



Fatto - Le seguenti funzioni sono continue:

$\mathbf{R} \ni x \mapsto x^m, \quad m \in \mathbf{N},$

$\mathbf{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-m}, \quad m \in \mathbf{N}^*,$

$\mathbf{R} \ni x \mapsto x^{\frac{1}{2k+1}}, \quad k \in \mathbf{N},$

$[0, +\infty) \ni x \mapsto x^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$

$\mathbf{R} \ni x \mapsto a^x, \quad a > 0$

$(0, +\infty) \ni x \mapsto \log_a x, \quad a > 0,$

le funzioni trigonometriche (nel loro dominio naturale)

2. Risultati principali

Teorema 2.1 (della permanenza del segno)**.** *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua in $x_o \in I$. Se $f(x_o)$ soddisfa una disuguaglianza stretta esiste un intorno di x_o $B_\delta(x_o)$ tale che in $I \cap B_\delta(x_o)$ è verificata la stessa disuguaglianza.*

Dimostrazione - Vogliamo mostrare che se $f(x_o) > 0$ (oppure se $f(x_o) < 0$) esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in I \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ allora $f(x) > 0$ (rispettivamente $f(x) < 0$).
Dalla continuità in x_o fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se

$$|x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Nel caso in cui $f(x_o) > 0$ scegliendo, ad esempio, $\varepsilon = f(x_o)/2$, si ottiene un valore $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_o)}{2}.$$

Se invece $f(x_o) < 0$ scegliendo $\varepsilon = -f(x_o)/2$ si ottiene che

$$|x - x_o| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) < \frac{f(x_o)}{2}.$$

□

Proposizione 2.2. *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ continue in $x_o \in I$. Allora*

- *$f + g$ è continua in x_o*
- *fg è continua in x_o*
- *se $g(x_o) \neq 0$ la funzione $\frac{f}{g}$ è continua in x_o*

Dimostrazione - Vediamo solo l'ultimo punto, gli altri sono lasciati per esercizio. Se $g(x_o) \neq 0$ dal teorema della permanenza del segno si ha che esiste $\delta > 0$ tale che $g(x) \neq 0$ per $x \in B_\delta(x_o) \cap I$. Allora la funzione $\frac{f}{g}$ è definita (almeno) in $B_\delta(x_o) \cap I$. Allora

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_o)}{g(x_o)}.$$

□

Proposizione 2.3. *Siano $f : I \to J, g : J \to \mathbf{R}$, $x_o \in I, y_o \in J$, I e J intervalli, $y_o = f(x_o)$. Se f è continua in x_o e g è continua in y_o allora $g \circ f$ è continua in x_o.*

Dimostrazione - Per ogni successione $\{x_n\}_n$ convergente a x_o si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_o).$$

Dalla continuità di g si ha

$$\lim_{n \to +\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(x_o)\big).$$

Poiché ciò vale per ogni successione $\{x_n\}_n$ convergente a x_o si conclude. $\square$

Teorema 2.4 (degli zeri)**.** *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua, I intervallo. Siano $a, b \in I$ tali che $f(a)f(b) < 0$ (f assume valori di segno opposto in a e in b). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione - Si supponga che $f(a) < 0$ e che $f(b) > 0$. Nell'altro caso la dimostrazione è analoga.
Definiamo ora tre successioni per ricorrenza partendo da $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Dopodiché si sceglie il punto medio tra a_0 e b_0,

$$c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Se $f(c_0) = 0$ abbiamo finito, altrimenti nel caso in cui $f(c_0) < 0$ poniamo

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0,$$

se invece $f(c_0) > 0$ poniamo

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0,$$

Si osservi che in entrambi i casi si ha

$$f(a_1) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_1) > 0$$

e

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

Ora definiamo

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Di nuovo, se $f(c_1) = 0$ abbiamo finito, altrimenti nel caso in cui $f(c_1) < 0$ poniamo

$$a_2 := c_1, \quad b_2 := b_1,$$

se invece $f(c_1) > 0$ poniamo

$$a_2 := a_1, \quad b_2 := c_1,$$

Di nuovo si ha

$$f(a_2) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_2) > 0$$

e

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{4}.$$

Continuando così, e supponendo che $f(c_n)$ non sia mai zero altrimenti ci si ferma, si ottengono tre successioni

$$\{a_n\}_n \text{ crescente}, \qquad \{b_n\}_n \text{ decrescente}, \qquad c_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$
$$a_n < c_n < b_n \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

con le proprietà

$$f(a_n) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) > 0, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{1}$$

Dalla monotonia e poiché $\{a_n\}_n$ è superiormente limitata, $\{b_n\}_n$ è inferiormente limitata, si ha che le due successioni convergono

$$\lim_n a_n = \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \lim_n b_n = \beta \in \mathbf{R},$$

e da (**??**) e dalla continuità di f si deduce che

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \lim_n f(a_n) \leqslant 0, \\ f(\beta) &= \lim_n f(b_n) \geqslant 0, \\ \alpha &= \beta. \end{aligned}$$

Chiamando c il numero $\alpha = \beta$ si conclude che $f(c) = 0$ e c è il (un) punto cercato. $\square$

Esempi 2.5. - Vediamo dei controesempi al teorema appena visto.
1. Togliamo l'ipotesi di continuità. Sia f la funzione

$$f(x) = -1 \text{ per } x \in [-1, 0], \quad f(x) = 1 \text{ per } x \in (0, 1].$$

Si ha $f(-1)f(1) < 0$, ma chiaramente non esiste nessun punto dove f si annulla.
2. Togliamo l'ipotesi che f sia definita in un intervallo. Sia f la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{definita per } x \in \mathbf{R}^*.$$

Si ha $f(-1)f(1) < 0$, ma chiaramente non esiste nessun punto dove f si annulla.

Esempi 2.6. - Vediamo alcune osservazioni che si possono fare usando il teorema degli zeri.

1. Ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero reale.
Infatti dato un polinomio p di grado dispari si ha sempre uno dei due casi:

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$
$$\text{oppure}$$
$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty.$$

Di conseguenza esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $p(a)p(b) < 0$ ed esiste quindi un punto c intermedio ad a e b nel quale il polinomio si annulla.
Si osservi che la stessa cosa non è (sempre) vera se p ha grado pari.

2. Più in generale se $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, $a, b \in [-\infty, +\infty]$, f continua in (a,b) e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty.$$

esiste (almeno) un punto $x_o \in (a,b)$ nel quale f si annulla.
3. Vogliamo risolvere l'equazione

$$h(x) = 0, \qquad x > 0,$$

dove $h(x) = \log x + x$. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

si ha che esiste almeno una soluzione. Chiamiamo $f(x) = \log x$ e $g(x) = x$ definite per $x > 0$. Poiché sia f che g sono strettamente crescenti lo sarà anche h. Di conseguenza la soluzione sarà unica.
Si osservi che risolvere $h(x) = 0$ è equivalente a risolvere $f(x) = -g(x)$. Poiché f è strettamente crescente e $-g$ strettamente decrescente, se si incontrano sarà in un punto solamente. Si disegnino i grafici di f e $-g$ per convincersene.
Si osservi come, in generale, se f è strettamente crescente e g strettamente decrescente non è detto che esista x tale che $f(x) = g(x)$. Ad esempio basta considerare $f(x) = 1/x$ e $g(x) = -1/x$ con $x > 0$: f è sempre positiva, g è sempre negativa e quindi non possono essere uguali.
Nell'esempio appena visto il teorema degli zeri ci garantiva l'esistenza di almeno uno zero, la stretta monotonia di f e $-g$ l'unicità.

Un corollario del teorema degli zeri è il seguente risultato, noto anche come teorema dei valori intermedi.

Teorema 2.7 (teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua in I, I intervallo. Allora $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione - Mostrare che $f(I)$ è un intervallo significa che, presi $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha \neq \beta$, un qualunque valore γ compreso tra α e β appartiene a $f(I)$. Dire che $\alpha, \beta \in f(I)$ significa che esistono $a, b \in I$ tali che

$$f(a) = \alpha, \qquad f(b) = \beta.$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) := f(x) - \gamma, \qquad x \in I.$$

Poiché $\alpha < \gamma < \beta$ oppure $\beta < \gamma < \alpha$ si ha che $g(a)g(b) < 0$. Di conseguenza esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$g(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(c) = \gamma,$$

cioè $\gamma \in f(I)$. $\square$

Esercizio 2.8. - Dato $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, si consideri $\mu = \inf A$. Si mostri che esiste una successione $\{a_n\}_n \subset A$ tale che

$$\lim_n a_n = \mu.$$

Analogamente si può mostare che esiste una successione che ha limite $\sup A$.

Si supponga $\mu \in \mathbf{R}$. Per la caratterizzazione vista nel capitolo 2 si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A \text{ t.c. } \inf A \leqslant a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon.$$

A questo punto si ha che

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*\ \exists\, a_n \in A \text{ t.c. } \inf A \leqslant a_n < \inf A + \frac{1}{n}.$$

Passando al limite ed usando il teorema dei due carabinieri si conclude.
Se $\mu = -\infty$ si ha che A è inferiormente illimitato e quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $a_n \in A$ tale che

$$a_n \leqslant -n.$$

Passando al limite e usando il teorema del confronto si conclude.

Teorema 2.9 (Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Allora f ammette massimo e minimo.*

Osservazione 2.10. - Quello che serve è la continuità di f definita, non tanto in un intervallo chiuso e limitato, quanto in un dominio sia chiuso che limitato; che il dominio sia un intervallo non è rilevante.

Dimostrazione - Sia $\mu = \inf f\big([a, b]\big)$. Allora esiste una successione $\{y_n\}_n \subset f\big([a, b]\big)$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \mu.$$

Allora esiste $\{x_n\}_n \subset [a, b]$ tale che $f(x_n) = y_n$. Dalla limitatezza del dominio si ha che la successione $\{x_n\}$ risulta limitata ($a \leqslant x_n \leqslant b$). Di conseguenza $\{x_n\}_n$ ammette una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_j$ convergente ad un elemento $\bar{x}$ e tale elemento appartiene ad $[a, b]$ (qui si è usata la chiusura del dominio per avere che $\bar{x}$ appartiene al dominio di f). Infine

$$\mu = \lim_n y_n = \lim_n f(x_n) = \lim_j f(x_{n_j}) = f(\bar{x}),$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la continuità di f. Abbiamo cioè mostrato che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ nel quale f assume il valore $\inf f$, cioè $\inf f$ è in realtà il minimo. Analogamente si procede per l'estremo superiore di f. $\square$

Osservazione 2.11. - Il teorema appena visto garantisce che se f è definita in C insieme chiuso e limitato ed è continua in C allora $f(C)$ è un chiuso e limitato. Se C è un intervallo come nell'enunciato che abbiamo dato, allora dal teorema di Weierstrass e dal teorema dei valori intermedi si ha che $f\big([a, b]\big)$ è un intervallo chiuso e limitato. Si potrebbe riformulare il teorema appena visto come segue: $f : D \to \mathbf{R}$ continua in D, allora f manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati.

Domanda: se $f : D \to \mathbf{R}$ è continua in D, possiamo dire che f manda intervalli aperti in intervalli aperti?

Esempi 2.12. - Vediamo, al solito, qualche controesempio.

1. Se f è continua ed è definita in un insieme limitato, ma non chiuso, non è detto che esistano massimo e minimo. Si preda ad esempio $f(x) = \operatorname{tg} x$ con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

2. Se f è continua ed è definita in un insieme chiuso, ma non limitato, non è detto che esistano massimo e minimo. Si preda ad esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x$ con $x \in \mathbf{R}$.

3. Se f è definita in un insieme chiuso e limitato, ma non è continua, non è detto che esistano massimo e minimo. Si consideri ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-2 & \text{se } x \in (1,4) \\ x-4 & \text{se } x \in [4,5] \end{cases}$$

Il teorema di Weierstrass può essere applicato parzialmente anche se f è definita in un aperto ed f è illimitata, almeno in certi casi. Si supponga, ad esempio, che

$$f : (a,b) \to \mathbf{R}, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

con $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ ed f continua. In tal caso si può considerare un qualunque intervallo chiuso e limitato $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a,b)$ e in tale intervallo f ammetterà sia minimo che massimo. Si concluderà che f ammette minimo in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ e, poiché $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ sono arbitrari, ammette minimo in (a,b), e ovviamente non ammette massimo visto che è superiormente illimitata.
Analogamente si può concludere che f ammette massimo se è continua in (a,b) e i due limiti agli estremi sono uguali a $-\infty$.
Ad esempio, se si considera la funzione

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

f è illimitata superiormente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Ragionando come si sopra si deduce che f ammette minimo.

Definizione 2.13. *I valori minimo e massimo di una funzione f sono detti estremanti. I punti corrispondenti al minimo e al massimo sono detti punti di estremo.*

Teorema 2.14 (Rolle - prima versione)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continua con $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ di estremo per f.*

Dimostrazione - Se f è costante ogni punto è di estremo e la tesi è verificata. Supponiamo che f non sia costante. Per il teorema di Weierstrass esistono due punti $c_1, c_2 \in [a,b]$ tali che $f(c_1)$ è il minimo ed $f(c_2)$ è il massimo di f in $[a,b]$. Se c_1 è interno abbiamo finito. Se c_1 è un estremo dell'intervallo allora c_2 deve essere interno poiché $f(c_1) = f(a) = f(b)$. □

Vediamo ora qualche altro risultato che non mostreremo.

Teorema 2.15. *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *continua e invertibile,* I *intervallo. Allora* $f^{-1} : f(I) \to I$ *è continua.*

Teorema 2.16. *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *monotona,* I *intervallo. Allora* f *è continua se e solo se* $f(I)$ *è un intervallo.*

Teorema 2.17. *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *continua e invertibile,* I *intervallo. Allora* f *è monotona.*

3. Uniforme continuità

Definizione 3.1. *Una funzione* $f : D \to \mathbf{R}$ *si dice* *uniformemente continua in* $E \subset D$ *se per ogni* ε *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\text{se } x, y \in E \text{ e } |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Osservazione 3.2. - 1. L'uniforme continuità è una proprietà globale, che f ha, o non ha, in un insieme E. La continuità è locale.
2. Si verifica facilmente che se f è uniformemente continua in E allora è continua in ogni punto di E.
3. Fissato ε si trova un δ che dipenderà, oltre che da ε, dall'insieme E, nella definizione di continuità dipende, oltre che da ε, dal punto in cui la funzione è continua.

Esempi 3.3. -

1. La funzione $f : [0, a] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ è uniformemente continua. Infatti
$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leqslant 2a|x - y|$$
per cui fissato ε è sufficiente prendere δ in modo tale che $2a\delta = \varepsilon$.
2. La funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua. In questo caso non si riesce a fare la stima come prima. Infatti se un valore di δ che fosse uniforme in tutto $[0, +\infty)$ esistesse si avrebbe quanto segue. Per semplicità si considerino due valori $x, y > 0$ tali che la distanza tra loro sia proprio δ (se si vuol far minore si prenda $\delta/2$, ma non è questo il punto). Si immagini di muovere questi due punti verso $+\infty$ mantenendo la loro differenza costante: si avrebbe che
$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = \delta|x + y|$$
con $x + y$ che tende a $+\infty$: ovviamente non può essere controllato da ε. Per far sì che la quantità
$$|x^2 - y^2|$$
sia controllata da ε bisognerebbe rimpicciolire δ man mano che ci si allontana dall'origine fino a farlo tendere a zero. Quindi un δ positivo e uniforme su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$ non esiste.

3. Il problema non sta nel fatto che l'insieme di definizione è illimitato. Anche la funzione $\operatorname{tg} x$ non è uniformemente in $(-\pi/2, \pi/2)$.
4. La funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua. Verifichiamolo: fissato $\epsilon > 0$ consideriamo $\delta = \epsilon^2$. Allora si ha che se $|x - y| < \delta = \epsilon^2$ allora $\sqrt{|x - y|} < \epsilon$.
   Si osservi che, dati $a, b \geqslant 0$, vale

(2)
$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

   Infatti questa disuguaglianza è vera se e solo se (elevando al quadrato e poiché i termini sono positivi)
$$a + b \leqslant a + b + 2\sqrt{ab}$$
   che è sempre verificata. Supponiamo ora che $x > y$: usando (**??**) con $a + b = x$ e $b = y$ si ha
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}$$
   se invece $x < y$ si ottiene $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$. In conclusione
$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$$
   per cui se $\sqrt{|x - y|} < \epsilon$ si ha anche $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \epsilon$.

Teorema 3.4. *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.*

Dimostrazione - Sia per assurdo f non uniformemente continua in $[a, b]$. Allora si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ esistono $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$
Ma dalla compattezza di $[a, b]$ si possono estrarre due sottosuccessioni convergenti
$$x_{n_j} \to \bar{x}, \qquad y_{n_j} \to \bar{y},$$
con $\bar{x}, \bar{y} \in [a, b]$. Poiché $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ si ha che $\bar{x} = \bar{y}$. Poiché f è continua si ha
$$f(x_{n_j}) \to f(\bar{x}), \qquad f(y_{n_j}) \to f(\bar{y}), \qquad f(\bar{x}) = f(\bar{y})$$
ma questo è impossibile se $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. $\square$