

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

LORENZO BRASCO

INDICE

1. Limite di una successione numerica	1
2. Proprietà dei limiti	5
3. Equivalenze asintotiche ed o -piccoli	6
4. Criteri di convergenza per successioni	8
5. Teoremi di Cesàro per successioni	11
6. La costante di Nepero e	15
7. Serie numeriche	17
8. Criteri di convergenza per serie numeriche a termini positivi	19
9. Criteri di convergenza per serie a termini di segno variabile	22
10. Esercizi	25
10.1. Successioni	25
10.2. Serie numeriche	36
Appendice A. Classificazione di infiniti	45
Appendice B. Alcune serie importanti	46
B.1. Serie armonica generalizzata	46
B.2. Serie geometrica	46
B.3. Serie log -armonica generalizzata	46
Appendice C. Successioni definite per induzione	47

1. LIMITE DI UNA SUCCESSIONE NUMERICA

Definizione 1.1. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa è:

- *convergente*, se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

In tal caso, scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell;$$

- *divergente a $+\infty$* , se

$$\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n > M, \quad \forall n \geq n_M.$$

In tal caso, scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty;$$

- *divergente a $-\infty$* , se

$$\forall M < 0, \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n < M, \quad \forall n \geq n_M.$$

In tal caso, scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

- *irregolare*, se non è né convergente né divergente.

Esempio 1.2. Vediamo alcuni esempi di successioni soddisfacenti la definizione precedente:

- la successione

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

è convergente, più precisamente si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Verifichiamolo usando la definizione di limite. Fissiamo un arbitrario $\varepsilon > 0$, vogliamo dimostrare che esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon,$$

ovvero, in modo equivalente, tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1 + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Osserviamo innanzitutto che il numero $(n-1)/(n+1)$ è sempre più piccolo di 1, quindi la disuguaglianza di destra è sempre soddisfatta. Dobbiamo quindi trovare un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1}, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

RisolviAMO quest'ultima disuguaglianza e vediamo per quali n è vera. Abbiamo

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1} &\iff (1 - \varepsilon)(n+1) < n-1 \\ &\iff 1 + (1 - \varepsilon) < n(1 - \varepsilon) \\ &\iff 2 - \varepsilon < \varepsilon n \\ &\iff \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che se definiamo

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil,$$

in base dalla discussione precedente avremo

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+1}, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon,$$

proprio come volevamo.

- la successione definita da

$$a_n = \log_2(n+2), \quad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$. Verifichiamolo usando la definizione: preso un arbitrario numero $M > 0$, vogliamo trovare un indice $n_M \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log_2(n+2) > M, \quad \text{per ogni } n \geq n_M.$$

Come prima, risolviamo questa disuguaglianza: osservando che la funzione $x \mapsto \log_2 x$ è monotona crescente (strettamente) e scrivendo M come

$$M = \log_2(2^M),$$

si ha

$$\log_2(n+2) > M \quad \Longleftrightarrow \quad n+2 > 2^M \quad \Longleftrightarrow \quad n > 2^M - 2.$$

Se scegliamo quindi

$$n_M = \text{“ il pi\`u piccolo numero naturale strettamente maggiore di } 2^M - 2 \text{”},$$

otteniamo che per ogni $n \geq n_M$, in base alla discussione precedente vale

$$\log_2(n+2) > M, \quad \text{per ogni } n \geq n_M,$$

come volevamo.

Proposizione 1.3 (Sottosuccessioni elementari). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supponiamo che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia convergente o divergente. Allora le nuove successioni $\{a_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{a_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dimostrazione. Proviamo solo il risultato relativo alla successione $\{a_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$, l'altro \u00e8 lasciato come esercizio per lo studente. Supponiamo per semplicit\u00e0 che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia convergente e chiamiamo ℓ il suo limite. Allora, per definizione si avr\u00e0

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Adesso basta osservare che $k \geq 1$, quindi $kn \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, se prendiamo $n \geq n_\varepsilon$, avremo anche $kn \geq kn_\varepsilon \geq n_\varepsilon$. Dalla propriet\u00e0 precedente, otteniamo quindi che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (kn_\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_{kn} - \ell| < \varepsilon, \quad \forall kn \geq kn_\varepsilon.$$

Questo dimostra che vale anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = \ell.$$

Nel caso in cui $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia divergente, la dimostrazione \u00e8 simile e viene lasciata allo studente. $\square$

Esempio 1.4 (Una successione irregolare). Usando il risultato precedente, \u00e8 facile provare che la successione

$$a_n = (-1)^n, \quad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

\u00e8 irregolare. Infatti, osserviamo innanzitutto che la successione \u00e8 limitata, dato che

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi non pu\u00f2 essere divergente. Supponiamo per assurdo che valga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \ell,$$

allora per la Proposizione precedente abbiamo anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = \ell.$$

D'altronde si ha $(-1)^{2n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi in definitiva $\ell = 1$. Avremmo quindi che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |(-1)^n - 1| < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Prendiamo adesso n un indice *dispari* tale che $n > n_\varepsilon$, dalla propriet\u00e0 precedente abbiamo

$$\varepsilon > |(-1)^n - 1| = |-1 - 1| = 2.$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ \u00e8 arbitrario, la propriet\u00e0 precedente $2 < \varepsilon$ non pu\u00f2 essere vera.

Definizione 1.5. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa \u00e8

- *monotona crescente* se vale

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N};$$

- *monotona decrescente* se vale

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 1.6. La successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente. Per vederlo, basta scrivere che

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1},$$

ed osservare che

$$n \mapsto \frac{2}{n+1},$$

è monotona decrescente, quindi

$$n \mapsto -\frac{2}{n+1}$$

è monotona crescente. Si ha quindi

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} \leq 1 - \frac{2}{n+2} = a_{n+1},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.7. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, si dice che essa è

- *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_n \leq M, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Si definisce inoltre

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

con la usuale convenzione che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty,$$

se la successione non è limitata superiormente;

- *limitata inferiormente* se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$m \leq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Si definisce inoltre

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

con la usuale convenzione che

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty,$$

se la successione non è limitata inferiormente;

- *limitata* se è sia limitata superiormente che limitata inferiormente.

2. PROPRIETÀ DEI LIMITI

Proposizione 2.1 (Unicità del limite). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_1 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_2.$$

Allora $\ell_1 = \ell_2$.

Dimostrazione. Usando la definizione di limite, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

D'altra parte, sappiamo che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge anche ad ℓ_2 , quindi fissato lo stesso $\varepsilon > 0$, esisterà $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell_2| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq m_\varepsilon.$$

Usando quindi la disuguaglianza triangolare e prendendo $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, si ottiene

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < 2\varepsilon.$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo, si ottiene $\ell_1 = \ell_2$, come volevamo. $\square$

Proposizione 2.2. *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione convergente. Allora tale successione è limitata.*

Dimostrazione. Chiamiamo ℓ il limite della successione. Prendiamo $\varepsilon = 1$, allora esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < 1, \quad \text{per ogni } n \geq n_1.$$

In altre parole, abbiamo che

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1, \quad \text{per ogni } n \geq n_1.$$

D'altra parte, prendendo

$$c = \min\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\} \quad e \quad C = \max\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\},$$

Si avrà

$$m \leq a_n \leq M, \quad \text{per ogni } 0 \leq n \leq n_1 - 1.$$

Scegliendo

$$m = \min\{m, \ell - 1\} \quad e \quad M = \max\{M, \ell + 1\},$$

si ottiene la conclusione. $\square$

Proposizione 2.3 (Permanenza del segno - "soft"). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione tale che*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n \geq 0, \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora, se la successione è convergente, si ha

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che risulti $\ell < 0$. Si scelga $\varepsilon = -\ell/2$, allora dalla definizione di limite esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In particolare, ricordando la scelta di ε , si ha

$$a_n < \frac{\ell}{2} < 0, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Questo contraddice l'ipotesi sul segno di a_n . Pertanto si deve avere $\ell \geq 0$. $\square$

Corollario 2.4. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ due successioni tali che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n \geq b_n, \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora se le successioni sono convergenti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione 2.3 alla successione $a_n - b_n$, che soddisfa le ipotesi necessarie. $\square$

Proposizione 2.5 (Permanenza del segno – “strong”). Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione tale che

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0.$$

Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > 0, \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, si ha che fissato $\varepsilon = \ell/2 > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In particolare, la prima disuguaglianza implica che

$$a_n > \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

3. EQUIVALENZE ASINTOTICHE ED o -PICCOLI

Le seguenti due definizioni **sono tra le più importanti di tutto il corso**.

Definizione 3.1 (Equivalenza asintotica). Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni. Si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è *asintoticamente equivalente* a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

In tal caso, si userà la notazione

$$a_n \sim b_n \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Esempio 3.2. Le due successioni

$$a_n = n^2 + 7 \quad \text{e} \quad b_n = n^2 - n,$$

sono asintoticamente equivalenti. Infatti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Definizione 3.3 (o -piccolo). Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni. Si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è *o -piccolo* di $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

In tal caso, si userà la notazione

$$a_n = o(b_n) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Esempio 3.4. Le due successioni

$$a_n = n^2 + 7 \quad \text{e} \quad b_n = n^3 - n,$$

sono tali che

$$a_n = o(b_n), \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Infatti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7}{n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Osservazione 3.5 (Algebra degli asintotici e degli o-piccoli). Osserviamo un paio di regole di calcolo per gli o-piccoli, che seguono direttamente dalla definizione:

- se

$$a_n \sim c_n \quad \text{e} \quad b_n = o(c_n), \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

allora

$$a_n + b_n \sim c_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Infatti, usando la definizione di equivalenza asintotica e di o-piccolo, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{c_n} + \frac{b_n}{c_n} \right] = 1 + 0 = 1;$$

- se

$$a_n \sim c_n \quad \text{e} \quad b_n \sim d_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

allora

$$a_n b_n \sim c_n d_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Infatti, usando la definizione di o-piccolo, si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} \frac{b_n}{d_n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

- se

$$a_n \sim c_n \quad \text{e} \quad b_n \sim c_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

allora

$$a_n + b_n \sim 2c_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Lo si dimostri per esercizio, usando la definizione di o-piccolo e le proprietà dei limiti.

Osservazione 3.6 (Equivalenze asintotiche, somme e differenze). ATTENZIONE! Nel caso in cui

$$a_n \sim c_n \quad \text{e} \quad b_n \sim d_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

in generale **NON si può concludere che**

$$a_n + b_n \sim c_n + d_n$$

A titolo di esempio: si prendano le due successioni

$$a_n = \sqrt{n^2 + n^\alpha} \quad \text{e} \quad b_n = -n,$$

dove $0 < \alpha < 2$. Si ha che

$$a_n \sim n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + n^\alpha}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + n^{\alpha-2}} = 1.$$

D'altra parte, NON possiamo concludere che

$$a_n + b_n \sim 0, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

(cosa che non avrebbe senso, tra l'altro) dal momento che dall'Esercizio 10.6 si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ 1/2, & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{se } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

4. CRITERI DI CONVERGENZA PER SUCCESSIONI

Teorema 4.1 (Criterio del confronto). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tre successioni. Supponiamo che:*

(i) *esista $k \in \mathbb{N}$ tale che*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \text{per ogni } n \geq k :$$

(ii) *$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non siano irregolari e valga*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Allora si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi sui limiti di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due indici $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n_0 \in \mathbb{N},$$

ed ogni

$$\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n_1 \in \mathbb{N}.$$

In particolare, se si sceglie $n_2 = \max\{n_0, n_1, k\}$, si ha che per ogni $n \geq n_2$ valgono contemporaneamente le due stime precedenti, nonché l'ipotesi $a_n \leq b_n \leq c_n$. Abbiamo quindi

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_2,$$

ovvero

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_2.$$

Dalla definizione di limite, abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell,$$

come volevamo. □

Proposizione 4.2. *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione limitata e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente a 0. Allora anche $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.*

Dimostrazione. Per ipotesi di limitatezza, si ha che esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|b_n| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Abbiamo dunque che

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Visto che $\varepsilon > 0$ era arbitrario, dalla definizione di limite abbiamo quindi che $a_n b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. $\square$

Esercizio 4.3. La successione definita da

$$c_n = \frac{\sin n}{n}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

converge a 0. Infatti, possiamo scriverla come

$$c_n = a_n b_n, \quad \text{dove } a_n = \sin n \text{ e } b_n = \frac{1}{n}.$$

Osservando che $|a_n| \leq 1$ e b_n converge a 0, otteniamo la conclusione dalla Proposizione 4.2.

Teorema 4.4 (Successioni monotone). Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione monotona. Allora la successione non è irregolare, ovvero essa è convergente oppure divergente. Inoltre, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n, & \text{se } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è crescente,} \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n, & \text{se } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso in cui a_n sia crescente e $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$. Tutti gli altri casi, **vengono lasciati come esercizi per lo studente**. Sia dunque

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Per definizione di estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $M - \varepsilon$ non è un maggiorante. Quindi esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$M - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq M.$$

La seconda disuguaglianza è conseguenza del fatto che M è un maggiorante. D'altra parte, la successione è crescente, quindi si ha

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon}, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Unendo le due informazioni precedenti, si ha dunque

$$M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Ma questa è esattamente la definizione di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$. $\square$

Teorema 4.5 (Criterio della radice n -esima). Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, tali che:

- (i) $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Allora $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, poichè per ipotesi $\ell < 1$, si avrà che

$$0 < \frac{1 - \ell}{2}.$$

Dalla definizione di limite, prendendo $\varepsilon = \frac{1 - \ell}{2}$, sappiamo che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, risulta

$$|\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon,$$

e quindi, in particolare, per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = \ell + \frac{1 - \ell}{2} = \frac{\ell + 1}{2}.$$

Abbiamo quindi provato che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$

$$0 \leq a_n < \left(\frac{\ell + 1}{2}\right)^n,$$

e quindi la tesi segue dal Criterio del confronto (Teorema 4.1), osservando che il termine a destra, nella precedente disuguaglianza, tende a 0, per n che tende a ∞ . $\square$

Osservazione 4.6. Nel caso che la successione dell'Esercizio precedente verifichi invece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

se ne può concludere che deve aversi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. È infatti sufficiente considerare la successione definita da $b_n = a_n^{-1}$, la quale verifica le ipotesi del Teorema 4.5, per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

ovvero $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve tendere a $+\infty$. Niente si può invece concludere sulla successione, nel caso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Teorema 4.7 (Criterio del rapporto). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, tali che:*

- (i) $a_n > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$.

Allora $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un infinitesimo, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Osservazione 4.8. Valgono le stesse osservazioni fatte per il criterio della radice n -esima. Se la successione è tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

allora a_n è divergente a $+\infty$. Di nuovo, non si può dire niente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Esempio 4.9. Sia $b > 1$ una base e $\alpha > 0$ un esponente reale positivo. Usando il Teorema 4.7, si vede facilmente che

$$n^\alpha = o(b^n) \quad \text{ovvero che} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0.$$

Infatti, se chiamiamo $a_n = n^\alpha/b^n$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha}{b^{n+1}} \frac{b^n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{1}{b} = \frac{1}{b} < 1.$$

5. TEOREMI DI CESÀRO PER SUCCESSIONI

Teorema 5.1 (Stolz-Cesàro). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni numeriche, con $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avente le seguenti proprietà:*

- *strettamente positiva, i.e. $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- *strettamente crescente, i.e. $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- *divergente a $+\infty$.*

Se esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

e i valori dei due limiti coincidono.

Dimostrazione. Indichiamo con ℓ il valore del limite di $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell.$$

Usando la definizione di limite otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Sfruttando il fatto che $b_{n+1} > b_n$, possiamo moltiplicare la disuguaglianza precedente per il fattore $(b_{n+1} - b_n)$, ottenendo quindi

$$(\ell - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (\ell + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n), \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Se adesso sommiamo questi termini, per n che va da n_ε ad un certo indice $k > n_\varepsilon$, otteniamo

$$(\ell - \varepsilon) \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (b_{n+1} - b_n) < \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (a_{n+1} - a_n) < (\ell + \varepsilon) \sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (b_{n+1} - b_n),$$

ovvero, osservando che le somme che abbiamo fatto comparire sono *telescopiche*¹, questa può essere riscritta anche come

$$(5.1) \quad (\ell - \varepsilon)(b_k - b_{n_\varepsilon}) < a_k - a_{n_\varepsilon} < (\ell + \varepsilon)(b_k - b_{n_\varepsilon}),$$

¹In altre parole, tutti i termini intermedi si cancellano, infatti

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{k-1} (b_{n+1} - b_n) = (b_{n_\varepsilon+1} - b_{n_\varepsilon}) + (b_{n_\varepsilon+2} - b_{n_\varepsilon+1}) + (b_{n_\varepsilon+3} - b_{n_\varepsilon+2}) + \cdots + (b_k - b_{k-1}).$$

che è valida per ogni $k > n_\varepsilon$. A questo punto dividiamo la (5.1) per b_k , ottenendo quindi

$$(\ell - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right) < \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k} < (\ell + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right),$$

che possiamo riscrivere nella forma seguente

$$(5.2) \quad (\ell - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k} < \frac{a_k}{b_k} < (\ell + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k}, \quad \text{per ogni } k > n_\varepsilon.$$

Osserviamo adesso che per ipotesi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = +\infty,$$

quindi abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[(\ell - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k} \right] = \ell - \varepsilon,$$

ed anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[(\ell + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_k}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_k} \right] = \ell + \varepsilon.$$

Usando questa informazione in (5.2) ed il Corollario 2.4, otteniamo quindi

$$\ell - \varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} \leq \ell + \varepsilon.$$

Dal momento che $\varepsilon > 0$ era arbitrario, questo permette di concludere che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell,$$

proprio come volevamo. □

Osservazione 5.2. È facile vedere che la dimostrazione precedente si adatta anche al caso in cui si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = -\infty.$$

Lo studente provi a scrivere tale dimostrazione come esercizio.

Enunciamo quindi i cosiddetti *Teoremi di Cesàro*, che come vedremo non sono altro che semplici conseguenze del Teorema di Stolz-Cesàro.

Corollario 5.3 (Cesàro I). *Supponiamo che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \ell.$$

Allora vale anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \ell.$$

Dimostrazione. Si tratta di una facile conseguenza del Teorema di Stolz-Cesàro, infatti se come $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ consideriamo la successione

$$b_n = n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

osservando che $b_{n+1} - b_n = 1$, abbiamo che l'ipotesi implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = \ell,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

proprio grazie al Teorema di Stolz-Cesaro. $\square$

Esempio 5.4 (Logaritmi VS. potenze). Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, allora usando il Corollario 5.3 è facile vedere che

$$\log_b n = o(n) \quad \text{ovvero che} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = 0.$$

Si chiami $a_n = \log_b n$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_b \frac{n+1}{n} = 0,$$

grazie alle proprietà dei logaritmi ed al fatto che $(n+1)/n \rightarrow 1$. Applicando il Corollario 5.3, abbiamo dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

come volevamo.

Corollario 5.5 (Cesàro II). *Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, consideriamo la successione $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle sue medie, ovvero la successione definita da*

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al valore ℓ , allora anche $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge allo stesso limite, ovvero

$$(5.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \ell.$$

Dimostrazione. Sfruttiamo il Teorema di Stolz-Cesaro, nel modo seguente: consideriamo le successioni $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite tramite

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad \text{e} \quad b_n = n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora possiamo anche riscrivere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n}.$$

D'altronde le due successioni $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfano le ipotesi del Teorema di Stolz-Cesaro, dal momento che b_n è strettamente positiva, strettamente crescente e illimitata ed esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

In conclusione si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \ell,$$

come volevamo. $\square$

Osservazione 5.6. Ovviamente non vale il viceversa di (5.3). Ad esempio, prendendo la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

si vede facilmente che la successione delle medie converge a 0, mentre $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette limite come mostrato nell'Osservazione 1.4.

Corollario 5.7 (Cesàro III). *Supponiamo che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abbia limite ℓ e che si abbia $a_n > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} = \ell.$$

Dimostrazione. Si definisca la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ come

$$b_n = \log_2 a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ovviamente questa successione tende a $\log_2 \ell$, per ipotesi. D'altronde la successione delle sue medie $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è data da

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log_2 a_k = \frac{1}{n} \log_2 \left(\prod_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \log_2 \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} \right),$$

e per il I Teorema di Cesaro si avrà che $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log_2 \ell$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} \right) = \log_2 \ell,$$

che implica la tesi. □

Corollario 5.8 (Cesàro IV). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vale la seguente implicazione:*

$$(5.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Dimostrazione. Si definisca la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ponendo

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{per } n \geq 1 \quad \text{e} \quad b_0 = a_0.$$

Applicando il Corollario 5.7 sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell,$$

e d'altronde si vede subito che

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^n b_k} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}}} \cdot a_0 = \sqrt[n]{a_n}.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

6. LA COSTANTE DI NEPERO e

Proposizione 6.1. *La successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ definita da*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ammette limite. Inoltre tale limite è un numero reale strettamente compreso tra 2 e 4.

Dimostrazione. Dimostriamo che la successione in esame è *crescente*. Infatti, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Se usiamo adesso la *disuguaglianza di Bernoulli*², otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Non ci resta adesso che calcolare l'ultimo termine: si ottiene con facili calcoli

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^3} \\ &= 1 + \frac{-n^2 - n + (n+1)^2 - n}{(n+1)^3} \\ &= 1 + \frac{-n^2 - n + n^2 + 2n + 1 - n}{(n+1)^3} \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)^3} \geq 1. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

²Ovvero, se $x \geq -1$, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Si veda il capitolo “*Strumenti di base*” per la dimostrazione. Stiamo usando questo risultato con la scelta

$$x = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Usando il Teorema 4.4, abbiamo che esiste il limite di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dobbiamo escludere che l'estremo superiore è $+\infty$, ovvero che la successione diverge. Introduciamo allora la nuova successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Osserviamo che

$$a_n \leq b_n.$$

Inoltre b_n è *decescente*, infatti:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{(n+1)^2}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Usando di nuovo la disuguaglianza di Bernoulli, si ottiene che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n},$$

ovvero

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 1} = 1 - \frac{n+1}{n^2 + 3n + 1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \left(1 - \frac{n+1}{n^2 + 3n + 1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Calcoliamo adesso l'ultima espressione: si ha

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n+1}{n^2 + 3n + 1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) &= 1 - \frac{n+1}{n^2 + 3n + 1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2 + 3n + 1} \\ &= 1 - \frac{n^2 + 3n + 1 - (n+1)^2 - n - 1}{(n+1)(n^2 + 3n + 1)} \\ &= 1 - \frac{n^2 + 3n + 1 - n^2 - 2n - 1 - n - 1}{(n^2 + 3n + 1)} < 1. \end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che

$$b_{n+1} < b_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dal momento che, come abbiamo osservato, vale $a_n \leq b_n$, si avrà allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} b_n = b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4.$$

Questo dimostra che a_n è convergente e che vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 4.$$

D'altra parte, usando che a_n è crescente, si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_1 = 2.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 6.2 (Costante di Nepero). Si chiama *costante di Nepero* il numero, indicato con la lettera e , definito da

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Osservazione 6.3. Scegliamo il numero e come base e consideriamo il logaritmo in questa base, che indicheremo semplicemente con $\log$. Si ha allora

$$(6.1) \quad \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1.$$

Più in generale, se $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ è una base, si ha

$$\log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \log_b e, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Basterà infatti ricordare che

$$\log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (\log_b e) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

7. SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione reale, consideriamo *formalmente* la sommatoria infinita

$$(7.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Essa è detta *serie dei termini* a_n . Per dare un senso a questa somma infinita, definiamo la nuova successione $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tramite

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ogni s_k è detta *somma parziale k -esima della serie* (7.1).

Definizione 7.1. Diremo che la serie (7.1) è:

- *convergente* se la successione delle sue somme parziali $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente. In tal caso, porremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n;$$

- *divergente* se la successione delle sue somme parziali $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è divergente. In tal caso, porremo di nuovo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k,$$

e tale limite sarà uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$, a seconda che $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ diverga a $+\infty$ o a $-\infty$;

- *irregolare* se $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è irregolare, ovvero non è né convergente né divergente.

Osservazione 7.2 (Serie a termini positivi). Se la serie è a termini positivi, ovvero se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora abbiamo solo due possibilità: essa converge oppure diverge a $+\infty$. Infatti, si osservi che la successione delle sue somme parziali è *monotona crescente*, i.e.

$$s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^k a_n + a_{k+1} \geq \sum_{n=0}^k a_n = s_k.$$

Quindi dal Teorema 4.4 si ottiene che $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ammette limite, eventualmente uguale a $+\infty$.

Le stesse conclusioni si hanno nel caso in cui la serie sia a termini negativi (in tal caso, la successione delle somme parziali sarà *monotona decrescente*).

Teorema 7.3 (Condizione necessaria di convergenza). Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Supponiamo che la serie corrispondente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

sia convergente. Allora si ha

$$a_n = o(1) \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n.$$

Per ipotesi, sappiamo che esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \ell.$$

D'altra parte, per la Proposizione 1.3, si ha anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = \ell.$$

Otteniamo quindi che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \ell - \ell = 0.$$

D'altra arte, per definizione di somma parziale, si ha

$$s_k - s_{k-1} = \sum_{n=0}^k a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n = a_k.$$

Abbiamo quindi provato che questa successione deve essere infinitesima, come volevamo. $\square$

8. CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE NUMERICHE A TERMINI POSITIVI

Teorema 8.1 (Criterio del confronto). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ e } C > 0 \quad \text{tale che } a_n \leq C b_n, \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora si ha

$$(8.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty,$$

e

$$(8.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (8.1), lasciando la dimostrazione di (8.2) come utile esercizio per il lettore.

Supponiamo che la serie dei b_n sia convergente. Consideriamo le successioni delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n \quad \text{e} \quad t_k = \sum_{n=0}^k b_n.$$

Sappiamo già che s_k ammette limite, in quanto successione monotona (si veda Osservazione 7.2). Ci basta quindi dimostrare che essa è superiormente limitata. Per ipotesi, abbiamo per ogni $k > n_0$

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^k a_n \leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C \sum_{n=n_0+1}^k b_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C t_k \leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + C \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty. \end{aligned}$$

Questo dimostra che la successione delle somme parziali degli a_n , oltre ad essere monotona crescente, è anche limitata. La serie degli a_n è quindi anch'essa convergente. $\square$

Teorema 8.2 (Criterio del confronto asintotico). *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$b_n > 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty.$$

Allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty,$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo

$$0 \leq \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty.$$

Usando la definizione di limite, otteniamo quindi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In particolare, considerando solo la seconda disuguaglianza e moltiplicando ambo i membri per b_n (si ricordi che $b_n > 0$), otteniamo

$$a_n < (\ell + \varepsilon) b_n, \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

Abbiamo quindi che le due successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfano le ipotesi del Teorema 8.1. Possiamo quindi concludere la dimostrazione usando il *Criterio del confronto per le serie* (ovvero il Teorema 8.1). $\square$

Il criterio precedente ha il seguente importante

Corollario 8.3. *Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali a termini positivi. Supponiamo che*

$$a_n \sim b_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

quindi in particolare il limite del rapporto è finito. Abbiamo quindi, in base al risultato precedente, che

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

D'altra parte, passando al reciproco si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

quindi possiamo usare il risultato precedente, scambiando il ruolo di a_n e b_n . Otteniamo allora anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Teorema 8.4 (Criterio della radice n -esima). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Allora la serie $\sum_n a_n$ converge. Se invece si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

allora la serie diverge.

Dimostrazione. Abbiamo già visto nella dimostrazione del Teorema 4.5, che l'ipotesi

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

implica che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 0 \leq a_n < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che, dal momento che $\ell < 1$, si ha anche

$$\frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Quindi, se chiamiamo

$$b_n = \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n,$$

abbiamo che la serie corrispondente è convergente, in quanto serie geometrica con ragione positiva e minore di 1. Possiamo allora applicare il *Criterio del confronto per le serie* (Teorema 8.1) ed ottenere la convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Il caso in cui

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

è lasciato come esercizio per il lettore. □

Teorema 8.5 (Criterio del rapporto). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$a_n > 0, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

allora la serie $\sum_n a_n$ converge. Se invece si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

allora la serie diverge.

Dimostrazione. È sufficiente usare Cesàro IV (vedi Corollario 5.8). Infatti, usando tale risultato si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Si conclude quindi usando il precedente *Criterio della radice n -esima per le serie* (Teorema 8.4). □

Teorema 8.6 (Criterio di condensazione di Cauchy). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali positivi, tali che*

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \text{converge}.$$

La seconda serie si chiama serie condensata degli a_n .

Dimostrazione. Diamo una traccia della dimostrazione. Supponiamo che la serie condensata converga e dimostriamo che allora converge anche la serie degli a_n . Usando l'ipotesi di monotonia, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_1} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4a_4} + \dots \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty. \end{aligned}$$

Questo dimostra la convergenza della serie originale.

Dimostriamo adesso che vale anche l'implicazione inversa: supponiamo che la serie degli a_n converga, si ha allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots \\ &= \underbrace{a_1 + a_2}_{\leq 2a_1} + \underbrace{a_2 + a_4}_{\leq 2a_2} + \underbrace{a_4 + a_4}_{\leq 2a_3} \\ &\quad + \underbrace{a_4 + a_8}_{\leq 2a_4} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\leq 2a_5} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\leq 2a_6} + \underbrace{a_8 + a_8}_{\leq 2a_7} + \dots \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

9. CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

Definizione 9.1. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali, si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

converge *assolutamente* se risulta convergente la serie dei suoi moduli, ovvero se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Teorema 9.2 (Criterio dell'assoluta convergenza). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Se la sua serie associata converge assolutamente, allora essa è convergente. Inoltre vale*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Dimostrazione. Definiamo le due nuove successioni a termini positivi

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{se } a_n < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad c_n = \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n < 0, \\ 0, & \text{se } a_n \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi che $b_n \leq |a_n|$ e $c_n \leq |a_n|$, quindi usando il Teorema 8.1 abbiamo che entrambe le serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

sono convergenti. Osservando che

$$a_n = b_n - c_n,$$

abbiamo quindi che la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n = \sum_{n=0}^k b_n - \sum_{n=0}^k c_n,$$

converge, in quanto differenza di due successioni che convergono. Questo mostra la convergenza della serie degli a_n . $\square$

Teorema 9.3 (Criterio di Leibniz). *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Supponiamo che*

- $a_n > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- $a_n \geq a_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Allora la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge.

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali

$$s_k = \sum_{n=0}^k (-1)^n a_n.$$

Sarà sufficiente mostrare che le due successioni “complementari” s_{2k} e s_{2k+1} hanno lo stesso limite, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \ell, \quad \text{con } \ell \neq \pm\infty.$$

Osserviamo intanto che s_{2k} è monotona decrescente, mentre s_{2k+1} è monotona crescente. Infatti, si ha

$$s_{2k+2} = \sum_{n=0}^{2k+2} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n \underbrace{-a_{2k+1} + a_{2k+2}}_{\leq 0} \leq s_{2k},$$

grazie alla monotonia di a_n . Similmente, si ha

$$s_{2k+3} = \sum_{n=0}^{2k+3} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n + \underbrace{a_{2k+2} - a_{2k+3}}_{\geq 0} \geq s_{2k+1}.$$

Possiamo quindi usare il Teorema sulle successioni monotone (Teorema 4.4) ed ottenere che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \ell_2.$$

Si osservi che entrambi i limiti sono finiti, dal momento che

$$s_{2k} \leq s_0 = a_0 \quad \text{e} \quad s_{2k+1} \geq s_1 = a_0 - a_1,$$

e che

$$(9.1) \quad s_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n - a_{2k+1} \leq s_{2k}.$$

In definitiva, questo implica che

$$a_0 - a_1 \leq s_{2k+1} \leq s_{2k} \leq a_0,$$

quindi entrambe le successioni sono limitate. Inoltre, da (9.1) e dal Corollario 2.4, si ottiene

$$\ell_1 \geq \ell_2.$$

Supponiamo per assurdo che si abbia $\ell_1 > \ell_2$ e fissiamo

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{4} > 0.$$

Dalla definizione di limite applicata alle due successioni s_{2k} e s_{2k+1} con $\varepsilon > 0$ appena scelto, otteniamo che esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$s_{2k} > \ell_1 - \frac{\ell_1 - \ell_2}{4} \quad \text{e} \quad s_{2k+1} < \ell_2 + \frac{\ell_1 - \ell_2}{4}, \quad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

Unendo queste due informazioni, troviamo allora

$$s_{2k} - s_{2k+1} > \ell_1 - \ell_2 - \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}, \quad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

D'altra parte, per costruzione si ha

$$s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1},$$

da cui si ottiene

$$a_{2k+1} > \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}, \quad \text{per ogni } k \geq k_\varepsilon.$$

Questo contraddice il fatto che la successione a_n è infinitesima per ipotesi. Dobbiamo quindi avere $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Osservazione 9.4. Si osservi che la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

converge grazie al Criterio di Leibniz. Tuttavia, **non** converge assolutamente, dal momento che la serie dei suoi valori assoluti coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge (si veda Esercizio 10.29).

10. ESERCIZI

10.1. Successioni.

Esercizio 10.1. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n} = 2.$$

Dimostrazione. Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞^0 . Osserviamo che

$$2^n + n \geq 2^n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ed anche

$$2^n + n \leq 2^n + 2^n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

grazie al fatto che $n \leq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (**esercizio: provarlo per induzione**). Dalle due disuguaglianze precedenti, otteniamo quindi

$$2 \leq \sqrt[n]{2^n + 2} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2 \sqrt[n]{2}.$$

Osservando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1,$$

si ottiene la conclusione usando il Teorema 4.1. □

Esercizio 10.2. *Sia $\alpha \neq 0$, si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$*

$$(n+x)^\alpha \sim n^\alpha, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. In base alla definizione, dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+x)^\alpha}{n^\alpha} = 1.$$

Usando le proprietà delle potenze, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+x)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^\alpha = 1,$$

come volevamo. □

Esercizio 10.3. *Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, dimostrare che*

$$\log_b n = o(n).$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = 0.$$

Si chiami $a_n = \log_b n$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_b \frac{n+1}{n} = \log_b 1 = 0,$$

quindi per il I Teorema di Cesàro si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 10.4. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Soluzione. Si tratta di nuovo di una forma indeterminata del tipo ∞^0 . Usiamo la scrittura esponenziale, ottenendo quindi

$$\sqrt[n]{n} = 2^{\frac{1}{n} \log_2 n}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Usando che

$$\log_2 n = o(n),$$

si ottiene allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2 n} = 2^0 = 1,$$

come desiderato. □

Esercizio 10.5. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Si dimostri inoltre che

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Si tratta di una forma indeterminata della forma $+\infty - \infty$. Ricordiamo la nota formula

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

possiamo quindi riscrivere la successione di cui dobbiamo calcolare il limite come

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Osservando che (vedi Esercizio 10.2)

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n},$$

si ottiene che

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Per dimostrare la seconda affermazione, dobbiamo provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 1,$$

ovvero che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1.$$

Usando il trucco che abbiamo usato prima, otteniamo

$$2\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene facilmente quello che volevamo. □

Esercizio 10.6. Sia $0 < \alpha < 2$, si dimostri che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ 1/2, & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{se } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Soluzione. Come prima, si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Usiamo la stessa idea: moltiplichiamo e dividiamo per

$$\sqrt{n^2 + n^\alpha} + n,$$

in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n \right) \frac{\sqrt{n^2 + n^\alpha} + n}{\sqrt{n^2 + n^\alpha} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n^\alpha - n^2}{\sqrt{n^2 + n^\alpha} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2}. \end{aligned}$$

La conclusione adesso segue facilmente. □

Esercizio 10.7. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n} \right) = 0.$$

Si dimostri inoltre che

$$\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n} \sim \frac{1}{k n^{\frac{k-1}{k}}} \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. L'argomento è esattamente analogo a quello usato per il caso $k = 2$ nell'esercizio precedente. Al posto della formula

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

dovremo usare la formula del *falso binomio di Newton* (si veda capitolo “Strumenti di base”), ovvero il fatto che

$$(a-b) \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i} = a^k - b^k.$$

Usando questa formula con le scelte

$$a = (n+1)^{\frac{1}{k}} \quad \text{e} \quad b = n^{\frac{1}{k}},$$

si ha

$$\left((n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \right) = \left((n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \right) \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (n+1)^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}}}{\sum_{i=0}^{k-1} (n+1)^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} (n+1)^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}}}.$$

Si osservi adesso che

$$(n+1)^{\frac{i}{k}} \sim n^{\frac{i}{k}}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

da cui

$$(n+1)^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}} \sim n^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}} = n^{\frac{k-1}{k}}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Si ottiene quindi

$$\left((n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} (n+1)^{\frac{i}{k}} n^{\frac{k-1-i}{k}}} \sim \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} n^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1}{k n^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Questo dimostra allo stesso tempo entrambe le cose che volevamo provare. $\square$

Esercizio 10.8. Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dimostrare che

$$\log_b n = o(n^{1/k}).$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^{1/k}} = 0.$$

Procediamo in modo simile all'Esercizio 10.3, usando stavolta il Teorema di Stoltz-Cesàro, con le scelte

$$a_n = \log_b n \quad \text{e} \quad b_n = n^{1/k}.$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{(n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}}.$$

Usando che

$$\log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\log_b e}{n} \quad \text{e} \quad (n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \sim \frac{1}{k n^{\frac{k-1}{k}}},$$

abbiamo dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b e}{n} \frac{1}{\frac{1}{k n^{\frac{k-1}{k}}}} = k \log_b e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n} = 0.$$

Applicando il Teorema di Stoltz-Cesàro, otteniamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^{1/k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0,$$

come volevamo. $\square$

Esercizio 10.9. Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base e $\alpha > 0$, dimostrare che

$$\log_b n = o(n^\alpha).$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che abbiamo già dimostrato questo risultato per $\alpha = 1$, vedi Esercizio 10.3. Se prendiamo $\alpha > 1$, allora

$$n = o(n^\alpha),$$

e quindi a maggior ragione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} n^{1-\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Se $0 < \alpha < 1$, prendiamo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$\alpha > \frac{1}{k},$$

allora si avrà che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^{\frac{1}{k}}} = 0.$$

Quindi ne possiamo dedurre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n^{\frac{1}{k}}} n^{\frac{1}{k}-\alpha} = 0,$$

grazie all'esercizio precedente. $\square$

Esercizio 10.10. Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, dimostrare che

$$n = o(\log_b(n!)) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log_b(n!)} = 0.$$

Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞ . Osserviamo anche che

$$\log_b(n!) = \log_b e \log(n!),$$

quindi ci basta dimostrare quello che vogliamo per $b = e$. Consideriamo le successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite da

$$a_n = n,$$

e

$$b_n = \log(n!), \quad n \geq 1,$$

Osserviamo che b_n diverge a $+\infty$ e grazie alle proprietà dei logaritmi, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = +\infty.$$

Se adesso usiamo il Teorema di Stolz-Cesàro, otteniamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n!)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0,$$

come volevamo. $\square$

Osservazione 10.11 (Attenzione alla base). Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, dal limite precedente deduciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b(n!)}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b > 1, \\ -\infty, & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

Infatti, abbiamo visto che

$$\frac{\log_b(n!)}{n} = \log_b e \frac{\log(n!)}{n},$$

e dobbiamo prestare attenzione al termine $\log_b e$, che cambia di segno, a seconda che la base b sia maggiore o minore di 1. Precisamente, si ha

$$\log_b e > 0, \quad \text{se } b > 1,$$

e

$$\log_b e < 0, \quad \text{se } 0 < b < 1.$$

Dal momento che la quantità

$$\frac{n}{\log(n!)},$$

è infinitesima e positiva, abbiamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Esercizio 10.12. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞^0 . Usiamo la scrittura esponenziale (in base 2, per semplicità)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2 n!}.$$

Per l'esercizio precedente, l'esponente nell'ultima espressione diverge a $+\infty$ e quindi si ottiene la tesi. $\square$

Esercizio 10.13. *Sia $b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ una base, dimostrare che*

$$\log_b(n!) = o(n^2) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b(n!)}{n^2} = 0.$$

Come prima, ci basta provare il risultato per la base canonica $b = e$. Vogliamo usare il Teorema di Stolz-Cesàro. Poniamo

$$a_n = \log(n!) \quad \text{e} \quad b_n = n^2, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((n+1)!) - \log(n!)}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{(n+1)!}{n!}}{n^2 + 2n + 1 - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Nell'ultimo limite abbiamo usato che

$$2n+1 \sim 2n \quad \text{e} \quad \log n = o(n) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Usando il Teorema di Stolz-Cesàro, si ottiene quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0,$$

come volevamo. $\square$

Esercizio 10.14. *Sia $\alpha > 1$, dimostrare che si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

Dimostrazione. La successione di cui dobbiamo calcolare il limite sembra prestarsi perfettamente per poter applicare il *Criterio del rapporto*, ovvero il Teorema 4.7. Ponendo $a_n = \alpha^n / (n+1)!$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha^n} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

e quindi, appunto grazie al Criterio del rapporto, la nostra successione deve essere infinitesima, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

come volevamo. □

Esercizio 10.15. *Calcolare il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che vale

$$a_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

si veda Capitolo “*Strumenti di base*”. Usando questa espressione, osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1,$$

e quindi per il IV Teorema di Cesaro, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 10.16. *Calcolare il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k,$$

dove $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Vogliamo sfruttare il Teorema di Stolz-Cesaro (Teorema 5.1), usando le successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definite da

$$a_n = \sum_{i=1}^n i^k \quad \text{e} \quad b_n = n^{k+1}, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Con questa notazione infatti, l'esercizio ci richiede di calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Osserviamo quindi che $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente positiva, strettamente crescente e illimitata; inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}},$$

quindi se questo limite esiste e lo sappiamo calcolare, possiamo concludere grazie al Teorema di Stolz-Cesaro, infatti in tal caso avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}}.$$

D'altronde, dalla formula del *Binomio di Newton*, otteniamo

$$\begin{aligned}
 (n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \\
 &= n^{k+1} + (k+1)n^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \\
 &= (k+1)n^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} n^i - n^{k+1} \sim (k+1)n^k, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

da cui quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + O(n^{k-1})}{(k+1)n^k + O(n^{k-1})} = \frac{1}{k+1},$$

concludendo così l'Esercizio. □

Esercizio 10.17. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{kn}}{(kn)!},$$

dove $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Chiamiamo per semplicità a_n la successione di cui vogliamo calcolare il limite ed osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{kn+k}(kn)!}{n^{kn}(kn+k)!} \\
 &= \frac{(n+1)^k}{(kn+k) \cdot \dots \cdot (kn+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} \sim \frac{n^k}{(kn)^k} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^k.
 \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(kn)^k} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^k = \frac{e^k}{k^k} = \left(\frac{e}{k}\right)^k.$$

Osserviamo infine che $2 < e < 3$, quindi si ha

$$\left(\frac{e}{k}\right)^k > 1 \text{ per } k = 1, 2,$$

mentre

$$\left(\frac{e}{k}\right)^k < 1 \text{ per } k \geq 3.$$

Quindi utilizzando il criterio del rapporto, abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{per } k = 1, 2, \\ 0, & \text{per } k \geq 3. \end{cases}$$

Questo conclude l'Esercizio. □

Osservazione 10.18. Dall'esercizio precedente, otteniamo che

$$(kn)! = o(n^{kn}), \quad \text{se } k = 1 \text{ oppure } k = 2,$$

mentre

$$n^{kn} = o((kn)!), \quad \text{se } k \geq 3.$$

Esercizio 10.19. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

Dimostrazione. Vogliamo usare Cesàro IV (ovvero il Corollario 5.8), poniamo quindi

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)n!} \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

Per il IV Teorema di Cesaro abbiamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Osservazione 10.20 (Un asintotico importante). L'esercizio precedente implica che

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Esercizio 10.21. *Dimostrare che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da*

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è convergente e si ha

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 1.$$

Dimostrazione. Verifichiamo che la successione in questione è monotona crescente: si ha infatti

$$a_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = a_n,$$

dove abbiamo usato il fatto che (**verificare per esercizio**)

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq 0, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Una volta ottenuta la monotonia della successione, grazie al Teorema 4.4 possiamo affermare che essa ammette sicuramente limite (eventualmente uguale a $+\infty$) e vale

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Cerchiamo di mostrare la stima richiesta sul numero ℓ : osserviamo innanzitutto che deve sicuramente essere $\ell \leq 1$, dal momento che

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

ed ovviamente $n/(n+1)$ tende ad 1 per n che tende a ∞ . D'altra parte, essendo a_n crescente, si ha

$$a_1 \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} a_n = \ell.$$

Calcolando a_1 , si ottiene la minorazione richiesta su ℓ . □

Osservazione 10.22. La stima precedente

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1,$$

è piuttosto rozza e può essere raffinata. Per esempio, consideriamo la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fatta prendendo solo gli elementi aventi indice pari: sappiamo che anch'essa tende a ℓ (grazie alla Proposizione 1.3), inoltre

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \sum_{k=2n+1}^{4n} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right) + \left(\frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\ &\leq n \frac{1}{2n+1} + n \frac{1}{3n+1}, \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} + n \frac{n}{3n+1} = \frac{5}{6}.$$

Per ottenere la stima dal basso su ℓ , si procede usando la monotonia: si avrà dunque

$$a_2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} a_n = \ell.$$

Calcolando $a_2 = 7/12$, abbiamo quindi che ℓ deve essere compreso tra $7/12$ e $5/6$.

Esercizio 10.23 (Una successione irregolare). *Dimostrare che la successione $\{\sin n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Assumiamo quindi che la successione non sia irregolare. Dal momento che

$$|\sin n| \leq 1, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora la successione non può essere divergente, quindi deve essere convergente. Chiamiamo

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n,$$

ed applicando la Proposizione 1.3 alle due sottosuccessioni $\{\sin(3n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\sin(2n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, si avrà anche

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(3n) \quad \text{e} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n).$$

Quindi grazie alle *formule di prostaferesi e di duplicazione*, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \ell - \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(3n) - \sin n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin(n) \cos(2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin(n) (1 - 2 \sin^2 n) \\ &= 2\ell(1 - 2\ell^2). \end{aligned}$$

Dall'identità precedente, abbiamo quindi ottenuto che il valore del limite ℓ deve essere

$$(10.1) \quad \ell = 0 \quad \text{oppure} \quad \ell = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'altra parte, sempre dal calcolo precedente abbiamo ottenuto

$$(10.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin(n) \cos(2n) = 0,$$

e quindi passando al valore assoluto anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 |\sin(n)| |\cos(2n)| = 0.$$

Osserviamo adesso che dalla relazione fondamentale della trigonometria, si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \sin^2 n} = \sqrt{1 - \ell^2}.$$

Applicando di nuovo la Proposizione 1.3, stavolta alla sottosuccessione $\{|\cos(2n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, abbiamo anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(2n)| = \sqrt{1 - \ell^2}.$$

Dalla relazione (10.2), otteniamo quindi

$$2|\ell| \sqrt{1 - \ell^2} = 0.$$

Questo ci dice che il limite ℓ vale

$$(10.3) \quad \ell = 0 \quad \text{oppure} \quad \ell = \pm 1.$$

Confrontando (10.1) e (10.3), otteniamo infine che $\ell = 0$. Si ha quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(n)| = 1.$$

Si osservi adesso che dalla formula di addizione, vale

$$\sin(n) = \sin(n-1) \cos 1 + \cos(n-1) \sin 1,$$

ovvero, osservando che $\sin 1 \neq 0$, vale

$$|\cos(n-1)| = \left| \frac{\sin n - \sin(n-1) \cos 1}{\sin 1} \right|.$$

Passando al limite, si ottiene l'assurdo

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(n-1)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n - \sin(n-1) \cos 1}{\sin 1} \right| = 0.$$

Quindi la successione di partenza era irregolare. □

Esercizio 10.24. Calcolare i due limiti seguenti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n.$$

Soluzione. Per calcolare ambo i limiti, useremo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Partial dal primo limite ed osserviamo che

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^2 = \left[\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right]^2 = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^2.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \left[\frac{1}{e}\right]^2 = e^{-2}.$$

Per il secondo limite, useremo delle manipolazioni algebriche simili. Si ha

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{-1}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo fatto il cambio di variabile $m = n - 1$. Questo conclude l'esercizio. $\square$

10.2. Serie numeriche.

Esercizio 10.25 (Serie di Mengoli). *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

è convergente. Calcolare il suo valore.

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right].$$

La serie in questione è un caso particolare di *serie telescopica*. Infatti, si consideri la successione delle sue somme parziali

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{k} \right] = 1.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 10.26. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

è convergente.

Dimostrazione. Possiamo utilizzare un confronto asintotico con la serie di Mengoli, vista nell'esercizio precedente. Si chiamino

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

È facile vedere che

$$a_n \sim b_n, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Possiamo allora usare il Corollario 8.3 e concludere che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Dal momento che quest'ultima era convergente per l'esercizio precedente, si ottiene quello che volevamo. □

Esercizio 10.27 (Serie geometrica). *Si dimostri che la serie geometrica di ragione α converge se e soltanto se $|\alpha| < 1$. Provare che in tal caso si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Soluzione. Abbiamo visto nel Capitolo 1 che vale formula seguente per la successione delle somme parziali

$$(10.4) \quad s_k = \sum_{n=0}^k \alpha^n = \frac{\alpha^{k+1} - 1}{\alpha - 1}.$$

Se si ricorda adesso che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{k+1} = 0, \quad \text{per } |\alpha| < 1,$$

si ottiene che la serie geometrica converge per $|\alpha| < 1$.

Dimostriamo adesso che per $|\alpha| \geq 1$ la serie non converge. Osserviamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{k+1} = +\infty, \quad \text{per } \alpha > 1,$$

quindi in tal caso, dalla formula (10.4), otteniamo che la serie geometrica risulta divergente. Se prendiamo $\alpha = 1$, si ha

$$s_k = \sum_{n=0}^k 1 = k,$$

e quindi la serie è ancora divergente. Infine, per $\alpha \leq -1$, sappiamo che la successione α^{k+1} è irregolare. Di conseguenza, anche la serie geometrica lo sarà. $\square$

Esercizio 10.28. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

è convergente. Dare una maggiorazione per il valore di questa serie.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$n! \geq n(n-1), \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Infatti, questa disuguaglianza è equivalente a

$$n \cdot (n-1)! \geq n(n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad (n-1)! \geq n-1,$$

e quest'ultima è banalmente vera, in base alla definizione di fattoriale. Abbiamo quindi, passando ai reciproci (e facendo attenzione a non dividere per 0)

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}, \quad \text{per ogni } n \geq 2.$$

Si osservi adesso che il termine a destra è il termine n -esimo di una serie convergente, i.e.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

In effetti, quest'ultima è ancora la serie di Mengoli, già studiata in precedenza: infatti, facendo un cambio di indice $k = n - 1$, si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Possiamo quindi usare il *Criterio del confronto per le serie* (Teorema 8.1) e concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

Inoltre, possiamo anche dare una stima per il valore di questa serie: si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} + 1 + 1 = 1 + 2 = 3.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 10.29 (Serie armonica). *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

è divergente.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi, quindi essa è convergente o divergente. Supponiamo per assurdo che non sia divergente, allora essa è convergente. In base alla definizione di serie convergente, questo vuol dire che se considero la successione delle sue somme parziali

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n},$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \ell < +\infty.$$

Utilizzando la Proposizione 1.3, abbiamo allora anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \ell,$$

e quindi in definitiva

$$(10.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} - s_k) = \ell - \ell = 0.$$

D'altra parte, per definizione la successione $\{s_{2k} - s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è tale che

$$s_{2k} - s_k = \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n},$$

ovvero essa coincide con la successione studiata nell'Esercizio 10.21. Ricordando che tale successione è sempre maggiore o uguale a $1/2$, otteniamo da (10.5)

$$\frac{1}{2} \leq s_{2k} - s_k \rightarrow 0,$$

ovvero un assurdo. La serie armonica è dunque divergente. □

Esercizio 10.30 (Serie armonica generalizzata). *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

è divergente per $0 < \alpha \leq 1$ e convergente per $\alpha > 1$.

Dimostrazione. Osserviamo che si tratta sempre di una serie a termini positivi. Dividiamo la discussione in vari casi.

Caso $\alpha = 1$. Questo lo abbiamo già trattato nell'esercizio precedente.

Caso $0 < \alpha < 1$. In tal caso, abbiamo che

$$n^\alpha \leq n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

da qui, passando ai reciproci, si ha

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dal momento che abbiamo dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

usando il Criterio del confronto per le serie (i.e. Teorema 8.1), si ottiene anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

Caso $\alpha \geq 2$. Osserviamo intanto che per $\alpha = 2$ lo abbiamo già dimostrato, vedi Esercizio 10.26. Questo implica che la serie è ancora convergente per $\alpha > 2$, infatti basta osservare che in tal caso

$$n^2 \leq n^\alpha, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

La conclusione per $\alpha > 2$ segue quindi dal *Criterio del confronto per le serie*.

Caso $1 < \alpha < 2$. In tal caso, il Criterio del confronto non ci è più utile. Ugualmente, i Criteri del rapporto e della radice n -esima non danno indicazioni. Proviamo ad usare il Criterio di condensazione di Cauchy: si osservi infatti che

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

soddisfa le ipotesi di questo criterio. Passiamo quindi alla serie condensata, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n,$$

ovvero la serie condensata è una *serie geometrica di ragione* $2^{1-\alpha}$. Dal momento che $1 < \alpha < 2$, l'esponente $1 - \alpha$ è negativo, ovvero

$$0 < 2^{1-\alpha} < 1,$$

quindi la serie geometrica è convergente (si veda Esercizio 10.27). Per il Criterio di condensazione di Cauchy, otteniamo quindi che per $1 < \alpha < 2$ anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

è convergente. □

Esercizio 10.31 (Serie log-armonica generalizzata). *Sia $\alpha > 0$, si dimostri che la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^\alpha},$$

converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

Dimostrazione. Si osservi che

$$\frac{1}{n(\log n)^\alpha} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(\log n)^\alpha}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha} = 0.$$

Purtroppo però questo non ci permette di concludere niente, se usiamo il Criterio del confronto asintotico per le serie. Proviamo ad usare nuovamente il *Criterio di condensazione di Cauchy*: infatti, il termine n -esimo

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)^\alpha},$$

soddisfa le ipotesi di tale criterio. La serie condensata corrispondente è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

In altre parole, la serie condensata coincide con una serie armonica generalizzata, che abbiamo già studiato! Sappiamo infatti che quest'ultima converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti. Dal Criterio di condensazione di Cauchy, otteniamo la stessa conclusione per la serie di partenza. $\square$

Esercizio 10.32. Sia $\alpha > 0$, si dimostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!},$$

è convergente per $0 < \alpha < 1$ e divergente per $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione. Si tratta di una serie a termini positivi, usiamo il *Criterio della radice n -esima per le serie* (Teorema 8.4). Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha n}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e \frac{n^\alpha}{n},$$

dove si è sfruttata l'informazione asintotica

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha n}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e \frac{n^\alpha}{n} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ e, & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Questo permette di ottenere la conclusione desiderata (si ricordi che $e > 1$). $\square$

Esercizio 10.33. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \left(\frac{n+1}{n} \right),$$

è divergente.

Dimostrazione. Si osservi che la serie è a termini positivi. Ricordando che

$$\log_2 \left(\frac{n+1}{n} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim (\log_2 e) \frac{1}{n}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

possiamo usare il *Criterio del confronto asintotico* con la serie armonica (che è divergente) ed ottenere la conclusione. $\square$

Esercizio 10.34. Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{999}{1000} \right)^n \quad \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log \log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Soluzione. Per quanto riguarda la prima serie, osserviamo innanzitutto che la serie è termini positivi, dal momento che

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^3}, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Per determinare il carattere della serie, basta osservare che

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e quest'ultimo è il termine n -esimo della serie armonica, che diverge. In base al criterio del confronto asintotico (Teorema 8.2), si ottiene quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) = +\infty.$$

Consideriamo la seconda serie: osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 \left(\frac{999}{1000} \right)^n} = \frac{999}{1000} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{999}{1000} < 1.$$

In base al criterio della radice n -esima (Teorema 8.4), la serie è quindi convergente.

Per la terza serie, basta applicare direttamente il *Criterio di Leibniz* (Teorema 9.3), per ottenere che anch'essa converge.

Per la quarta serie, possiamo usare il *Criterio del rapporto per le serie* (Teorema 8.5). Si ha infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1.$$

La serie è quindi convergente. $\square$

Esercizio 10.35. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie a termini positivi è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^{2n}.$$

Soluzione. Osserviamo che la serie è a termini positivi, dal momento che l'esponente $2n$ è pari. Osserviamo che per $\alpha = 0$ la serie è ovviamente convergente. Prendiamo $\alpha \neq 0$ ed usiamo il *Criterio del rapporto per le serie*: si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \alpha^{2n+2}}{n \alpha^{2n}} = \alpha^2.$$

Quindi se $\alpha^2 < 1$, la serie converge, mentre se $\alpha^2 > 1$ diverge. In altre parole, abbiamo scoperto che

se $|\alpha| < 1$ la serie converge,

mentre

se $|\alpha| > 1$ la serie diverge.

Resta da decidere cosa succede se $|\alpha| = 1$. In tal caso, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

che è ovviamente divergente. In conclusione, la serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$. $\square$

Esercizio 10.36. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n+2}{n+4} \right).$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{n+2}{n+4} < 1, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\log \left(\frac{n+2}{n+4} \right) < 0, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ovvero la serie è a termini di segno costante. Dal limite notevole del logaritmo (ovvero (6.1)), si ha

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{n+2}{n+4} \right) &= \log \left(\frac{n+4-2}{n+4} \right) = \log \left(1 - \frac{2}{n+4} \right) \\ &\sim -\frac{2}{n+4} \sim -\frac{2}{n}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dal momento che la serie il cui n -esimo termine è $-2/n$ è divergente (trattasi di serie armonica), usando il *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 8.2) con

$$a_n = \log \left(\frac{n+2}{n+4} \right) \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2}{n},$$

otteniamo che anche la serie iniziale è divergente. $\square$

Esercizio 10.37. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{n+2}{n^2+4} \right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi. Dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{n+2}{n^2+4} \right) = \cos(0) = 1 > 0,$$

la serie diverge. Si ricordi infatti che una condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine n -esimo converga a 0, vedi Teorema 7.3. $\square$

Esercizio 10.38. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 2} \right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, il cui termine n -esimo è asintotico a quello di una serie armonica generalizzata, con esponente $\alpha = 2$. Infatti, dal limite notevole (6.1) per il logaritmo, si ha

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 2} \right) &= \log \left(\frac{n^2 - 2 + 4}{n^2 - 2} \right) = \log \left(1 + \frac{4}{n^2 - 2} \right) \\ &\sim \frac{4}{n^2 - 2} \sim \frac{4}{n^2}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dal *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 8.2), applicato con

$$a_n = \log \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 2} \right) \quad \text{e} \quad b_n = \frac{4}{n^2},$$

si ottiene che la serie iniziale converge. □

Esercizio 10.39. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(\frac{n+2}{n^3+4} \right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini di segno positivo. Usando il limite notevole per il seno, si ha

$$\sin \left(\frac{n+2}{n^3+4} \right) \sim \frac{n+2}{n^3+4} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dal *Criterio del confronto asintotico* (Teorema 8.2), applicato con

$$a_n = \sin \left(\frac{n+2}{n^3+4} \right) \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^2},$$

si ottiene che la serie converge. □

Esercizio 10.40. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi. Usiamo il criterio del rapporto: ponendo

$$a_n = \frac{n^n n!}{(2n)!},$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} (n+1)! (2n)!}{(2n+2)! n^n n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{4}. \end{aligned}$$

Dal momento che $e < 4$, si ha quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

e per il *Criterio del rapporto*, la serie è convergente. $\square$

Esercizio 10.41. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \frac{e^n}{n!}.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, usiamo il *Criterio della radice n -esima*. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 \frac{e^n}{n!}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{n!}} = e^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{n}}}{n},$$

dove abbiamo usato che

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

grazie all'Osservazione 10.20. Ricordiamo adesso che $\sqrt[n]{n}$ tende ad 1, quindi si ha

$$n^{\frac{4}{n}} = (\sqrt[n]{n})^4 \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

ed in definitiva si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 \frac{e^n}{n!}} = e^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{n}}}{n} = 0.$$

Dal Criterio della radice n -esima per le serie otteniamo che la serie iniziale converge. $\square$

APPENDICE A. CLASSIFICAZIONE DI INFINITI

In questa breve sezione, si raccolgono alcuni paragoni tra infiniti che abbiamo dimostrato negli esercizi precedenti. A partire da questi, si ottiene anche la classificazione per i rispettivi infinitesimi

(es. $1/n^\alpha$, $1/\log_b n$ e così via).

$$\log_b n = o(n^\alpha), \quad \text{per ogni } b \in (0, +\infty) \setminus \{1\}, \alpha > 0,$$

$$n = o(\log_b n!), \quad \text{per ogni } b \in (0, +\infty) \setminus \{1\},$$

$$\log_b n! = o(n^2), \quad \text{per ogni } b \in (0, +\infty) \setminus \{1\},$$

$$n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{per ogni } 0 < \alpha < \beta,$$

$$n^\beta = o(b^n), \quad \text{per ogni } b > 1, \beta > 0,$$

$$b^n = o(n!), \quad \text{per ogni } b > 1,$$

$$n! = o(n^n),$$

$$(2n)! = o(n^{2n}),$$

$$n^{kn} = o((kn)!), \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},$$

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e},$$

$$(n+a)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}} \sim \frac{a}{k n^{\frac{k-1}{k}}}, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a \neq 0.$$

APPENDICE B. ALCUNE SERIE IMPORTANTI

B.1. Serie armonica generalizzata. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti, si veda Esercizio 10.30.

B.2. Serie geometrica. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n,$$

converge se e solo se $|\alpha| < 1$, in tal caso si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Per $\alpha \geq 1$, la serie diverge a $+\infty$, mentre per $\alpha \leq -1$ è irregolare, si veda Esercizio 10.27.

B.3. Serie log-armonica generalizzata. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^\alpha},$$

converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge altrimenti, si veda Esercizio 10.31.

APPENDICE C. SUCCESSIONI DEFINITE PER INDUZIONE

Il seguente Esercizio fornisce un criterio molto utile per stabilire la convergenza per una classe particolare di successioni definite per induzione.

Esercizio C.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente, ovvero tale che

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Consideriamo la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha \\ a_{n+1} &= f(a_n). \end{cases}$$

Provare che:

- se $f(\alpha) \geq \alpha$, allora la successione è monotona crescente;
- se $f(\alpha) \leq \alpha$, allora la successione è monotona decrescente.

In particolare quindi, in base al Teorema 4.4, la successione ammette limite.

Dimostrazione. Ovviamente dovremo usare il principio di induzione. Proviamo soltanto la prima affermazione: la seconda si prova esattamente nello stesso modo ed è lasciata alla buona volontà dello studente. Supponiamo quindi di essere nel caso $a_1 \geq \alpha$, vogliamo provare che

$$(C.1) \quad a_{n+1} \geq a_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

La (C.1) è ovviamente vera per $n = 0$, visto che corrisponde a $a_1 \geq a_0 = \alpha$.

Supponiamo adesso che la (C.1) sia vera per un certo naturale n_0 , ovvero che risulti $a_{n_0+1} \geq a_{n_0}$, vogliamo provare che questo implica necessariamente $a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1}$. Infatti dalla definizione della successione e sfruttando la monotonia di f si ottiene

$$a_{n_0+2} = f(a_{n_0+1}) \geq f(a_{n_0}) = a_{n_0+1},$$

che rappresenta la (C.1) per $n_0 + 1$ e possiamo quindi concludere la dimostrazione. $\square$

Nel caso in cui la funzione f che compariva nell'Esercizio precedente sia monotona decrescente, possiamo ancora dire qualcosa, ma le cose si fanno decisamente più intricate: in particolare, quello che diremo è legato all'analisi dei primi 4 termini.

Esercizio C.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente, ovvero tale che

$$x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Consideriamo la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha \\ a_{n+1} &= f(a_n). \end{cases}$$

Provare che:

- se $f(f(\alpha)) \geq \alpha$ e $f(f(f(\alpha))) \leq f(\alpha)$, allora la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente e la sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente;
- se $f(f(\alpha)) \leq \alpha$ e $f(f(f(\alpha))) \geq f(\alpha)$, la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente e la sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente.

In particolare, sotto queste ipotesi la sottosuccessione indicizzata dai numeri pari e quella indicizzata dai numeri dispari convergono entrambe³.

Dimostrazione. Nuovamente, utilizziamo il principio di induzione: stavolta sarà necessaria un po' di cautela. Supponiamo infatti di voler dimostrare la prima affermazione, dobbiamo provare che se $a_2 \geq \alpha$ e $a_3 \leq a_1$, allora la seguente affermazione è vera

$$(C.2) \quad a_{2n} \leq a_{2n+2} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} \geq a_{2n+3}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ovviamente la (C.2) è verificata per $n = 0$, infatti stiamo assumendo che

$$a_2 = f(a_1) = f(f(\alpha)) \geq \alpha = a_0 \quad \text{e} \quad a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)) = f(f(f(\alpha))) \leq f(\alpha) = a_1.$$

Supponiamo quindi di sapere che la (C.2) sia verificata per un certo numero naturale n_0 , quindi la nostra ipotesi induttiva adesso sarà la seguente

$$a_{2n_0} \leq a_{2n_0+2} \quad \text{e} \quad a_{2n_0+1} \geq a_{2n_0+3}.$$

Vogliamo dimostrare che questa ipotesi implica la validità di (C.2) anche per $n_0 + 1$: infatti, tenendo presente la monotonia di f si ha

$$a_{2n_0+4} = f(a_{2n_0+3}) \geq f(a_{2n_0+1}) = a_{2n_0+2},$$

ed anche, sfruttando quanto appena ottenuto,

$$a_{2n_0+5} = f(a_{2n_0+4}) \leq f(a_{2n_0+2}) = a_{2n_0+3},$$

ovvero abbiamo provato che la (C.2) è vera anche per $n_0 + 1$ e quindi per il principio di induzione essa è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osservazione C.3. Nell' Esercizio precedente, i casi evidenziati sono gli unici per cui è possibile trarre delle conclusioni sulla successione.

Esercizio C.4. Sia data la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

Dire se esiste il limite per n che tende a ∞ e calcolarlo.

Dimostrazione. Si vede subito che la successione è tutta positiva (dimostrarlo per induzione). Proviamo che è crescente, procedendo per induzione: il primo passo è mostrare che la proposizione

$$(C.3) \quad a_{n+1} \geq a_n,$$

è vera per $n = 1$. Questo è immediato, dal momento che

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2} \geq a_1.$$

Supponiamo adesso che la proposizione (C.3) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, ovvero supponiamo di sapere che

$$a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$

allora otteniamo

$$a_{n_0+2} = \sqrt{2 + a_{n_0+1}} \geq \sqrt{2 + a_{n_0}} = a_{n_0+1},$$

³Non necessariamente allo stesso limite!

ovvero la (C.3) è vera anche per il naturale successivo $n_0 + 1$ e quindi (C.3) è vera per ogni $n \geq 1$. Abbiamo quindi dal Teorema 4.4 che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette sicuramente limite ℓ e deve risultare

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Calcoliamo ℓ : per la Proposizione 1.3, la sottosuccessione $\{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergerà allo stesso limite ed inoltre dalla definizione di a_{n+1} si ottiene che ℓ deve verificare

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + \ell},$$

ovvero deve risultare $\ell^2 = 2 + \ell$. Quindi abbiamo tre possibilità per ℓ , ovvero

$$\ell = +\infty \quad \text{oppure} \quad \ell = 2 \quad \text{oppure} \quad \ell = -1.$$

Possiamo subito escludere la terza perchè abbiamo detto che $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi dovrà essere anche $\ell \geq 0$ per la Proposizione 2.3. Se sapessimo che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, potremmo escludere anche la prima possibilità e concluderne quindi che deve essere $\ell = 2$. D'altra parte, si vede facilmente che deve risultare

$$(C.4) \quad a_n \leq 2,$$

per ogni $n \geq 1$. La dimostrazione si fa di nuovo per induzione, dal momento che (C.4) è sicuramente verificata per $n = 1$; inoltre, assumendo che (C.4) valga per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$a_{n_0+1} = \sqrt{2 + a_{n_0}} \leq \sqrt{4} = 2,$$

ovvero (C.4) è valida anche per il naturale successivo $n_0 + 1$ e quindi è vera per ogni $n \geq 1$. In definitiva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2,$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio C.5. Studiare il comportamento della successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + 2}{3a_n + 2} \end{cases}$$

Dimostrazione. È immediato osservare che la successione deve essere tutta positiva e minore di 1. Inoltre l'($n + 1$)-esimo termine è della forma $a_{n+1} = f(a_n)$, con la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{x + 2}{3x + 2}, \quad x \geq 0.$$

Non è difficile convincersi che f è monotona decrescente⁴, quindi potremmo tentare di utilizzare l'Esercizio C.2 per concluderne qualcosa sulla nostra successione: in effetti, calcolando i primi 4 termini della successione otteniamo

$$1 \geq \frac{13}{19} = f(f(1)),$$

mentre

$$f(1) = \frac{3}{5} \leq \frac{51}{77} = f(f(f(1))).$$

⁴Non è necessario usare il calcolo differenziale per vederlo. Si può procedere come nell'Esercizio 8.31 del capitolo "Strumenti di base".

Per quanto visto nell'Esercizio C.2, otteniamo che $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente, mentre $\{a_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente, in particolare esistono ℓ_1 ed ℓ_2 tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \ell_2.$$

Cerchiamo di calcolare i limiti ℓ_1 ed ℓ_2 : dalla definizione, abbiamo

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = \frac{a_{2n+1} + 2}{3a_{2n+1} + 2} = \frac{f(a_{2n}) + 2}{3f(a_{2n}) + 2} = \frac{7a_{2n} + 6}{9a_{2n} + 10},$$

e dal momento che dalla Proposizione 1.3 si avrà anche $a_{2n+2} \rightarrow \ell_1$, ovvero

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7a_{2n} + 6}{9a_{2n} + 10} = \frac{7\ell_1 + 6}{9\ell_1 + 10},$$

abbiamo quindi trovato che il candidato limite ℓ_1 deve soddisfare la precedente relazione, ovvero

$$\ell_1 = \frac{7\ell_1 + 6}{9\ell_1 + 10}.$$

D'altra parte, tale relazione è soddisfatta solamente per $\ell_1 = -1$ oppure $\ell_1 = 2/3$: dal momento che la successione è tutta a termini positivi, dovremo scartare il primo valore e concluderne quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{2}{3}.$$

Con calcoli completamente analoghi si prova che deve valere anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \frac{2}{3},$$

da cui se ne conclude⁵ che la successione di partenza ammette limite e questo è dato da $2/3$. $\square$

⁵Attenzione! Si ricordi che in generale, se una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possiede due sotto-successioni convergenti allo stesso limite ℓ , questo **non implica** che anche $a_n \rightarrow \ell$. Quello che stiamo usando in questo caso, è che le due sotto-successioni in esame sono *complementari*, nel senso che $\{a_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, per cui dal comportamento delle due sotto-successioni, possiamo ricavarne il comportamento di tutta la successione.