EQUAZIONI IRRAZIONALI

Le equazioni (e le disequazioni) irrazionali sono quelle dove compaiono uno o più radicali aventi nel radicando l'incognita. Per intenderci equazioni (o disequazioni) che contengono espressioni del tipo

$\sqrt[n]{f(x)}$

n intero positivo

f funzione ~~di una var~~

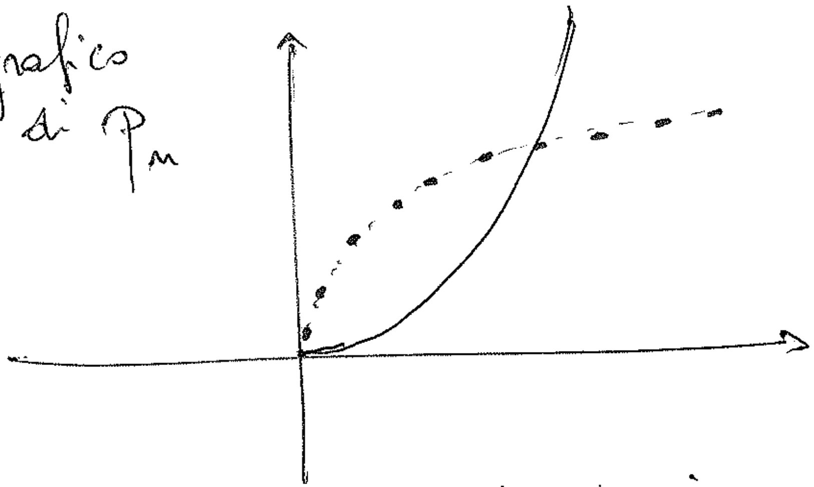
x incognita

Il simbolo $\sqrt[n]{\cdot}$ è da intendersi come funzione inversa della funzione

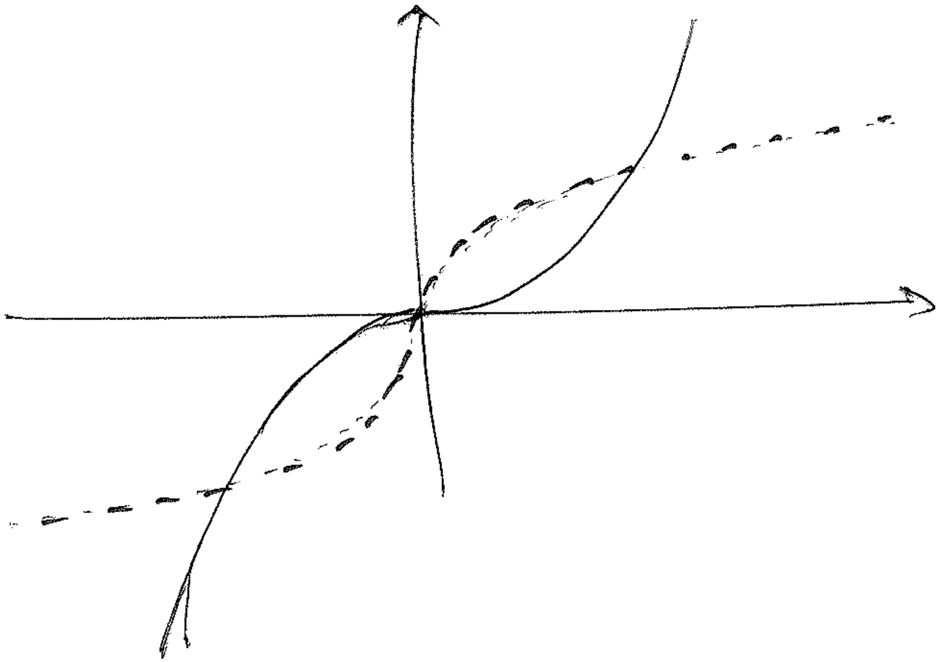
$$p_n : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty) \qquad \text{se } n \text{ pari}$$
$$x \longmapsto x^n$$

$$p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{se } n \text{ dispari}$$
$$x \longmapsto x^n$$

grafico di p_n



n pari



Di conseguenza l'espressione $\sqrt[n]{f(x)}$ avrà senso

- sempre (qualunque valore assume f in x) se n dispari
- solo se $f(x) \geq 0$ se n pari

OSSERVAZIONE: dati $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$a = b \iff a^n = b^n \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = b \Longrightarrow a^n = b^n \\ a = b \not\Longleftarrow a^n = b^n \end{array}\right\} \text{se } n \text{ pari}$$

$a^2 = 25 = 5^2$ non implica $a = 5$, ma implica $a = 5 \vee a = -5$

ESEMPI: $\sqrt[3]{x^2+11x+27} = x+3$ elevo al cubo entrambi i membri

$$x^2+11x+27 = x^3+9x^2+27x+27$$

$$x^3+8x^2+16x = 0$$

$$x(x+4)^2 = 0 \qquad x=0 \;, \quad x=-4$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \qquad \underline{\underline{n \text{ pari}}}$$

Perché ~~tutto~~ abbia senso si dovrà avere innanzitutto $f(x) \geq 0$; dopodiché, dal momento che $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$, anche $g(x) \geq 0$. Infine elevando ad n si ottiene $f(x) = (g(x))^n$ sotto le condizioni precedentemente imposte.

Esempio $\sqrt{2-x+(x-1)^2}+2x-1=0$ (E)

$$\sqrt{2-x+(x-1)^2}=1-2x$$

(*) $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 2-x+(x-1)^2 = (1-2x)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1/2 \\ 3x^2-x-2=0 \end{cases}$ → che ha come soluzioni $x=1$, $x=-\frac{2}{3}$

Quindi il sistema (*) ha come soluzione solamente il valore $-\frac{2}{3}$

n pari

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

Se $g(x) \geq 0$ sicuramente $(g(x))^n \geq 0$ e quindi $f(x) \geq 0$

EQUAZIONI DEL TIPO $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$

$$\sqrt[5]{81x} = \sqrt[3]{27x}$$ (n, m dispari)

$$(81x)^3 = (27x)^5$$ elevo al minimo comune multiplo di n e m

$$27x^5 - x^3 = 0$$

$$x = 0 \,, \quad x = \frac{1}{\sqrt{27}} \,, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[6]{3x+5}$$ (n, m pari) elevo al minimo comune multiplo di n e m, però...

$$\begin{cases} (x+3)^3 = (3x+5)^2 \\ x+3 \geq 0 \\ 3x+5 \geq 0 \end{cases} \quad \ldots$$

unica soluzione

$x = 1$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

L'unica osservazione in più (rispetto alle equazioni) che bisogna fare è la seguente:

dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > b$ vale

se $a, b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$ per qualunque n intero positivo

se $a, b < 0 \Rightarrow a^n > b^n$ n dispari

$a^n < b^n$ n pari

se $a > 0, b < 0 \Rightarrow a^n > b^n$ n dispari

per n pari non posso concludere

(esempio: $a=2, b=-1$; $a=2, b=-3$)

Inoltre dato un terzo numero $c \in \mathbb{R}$ $c \neq 0$

$a > b$ e $c > 0$ $\Rightarrow$ $ac > bc$

$a > b$ e $c < 0$ $\Rightarrow$ $ac < bc$

($-1 > -2$. Si ha che se $c = 2$ $\quad -2 > -4$
se $c = -1$ $\quad 1 < 2$)

Infine data una disequazione $f(x) \geq 0$ la soluzione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, eventualmente anche l'insieme $\emptyset$.

Esempi: $x^2 - 1 \leq 0$	$x^2 \leq 0$	$x^2 + 1 \leq 0$
soluzione $[-1, 1]$, $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$

F. 1

Con uno, o più di uno, radicale di indice <u>dispari</u> si procede sostanzialmente come nel caso delle equazioni.

Se n è pari

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad (\leq)$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases}$$

$f \geq 0$ perché abbia senso $\sqrt[n]{f(x)}$

$g(x) \geq 0$ perché elevando a n pari perdo informazioni sul segno di g ma $g(x) \geq \sqrt[n]{f(x)} \geq 0$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad (\geq)$$

se $g(x) \geq 0$ $\quad f(x) \geq 0$, $\quad (f(x))^n > (g(x))^n$

se $g(x) < 0$ la disequazione è sempre vera (a patto che abbia senso $\sqrt[n]{f(x)}$, e cioè che $f(x) \geq 0$)

quindi $\sqrt[n]{f(x)} \underset{(\geq)}{>} g(x)$ diventa (n pari)

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ (f(x) \geq 0 \quad \text{superflua}) \\ f(x) \underset{(\geq)}{>} (g(x))^n \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} g(x) < 0 & (1) \\ f(x) \geq 0 & (2) \\ \sqrt[n]{f(x)} > g(x) & \text{sempre vera se valgono (1) e (2)} \end{cases}$$

Le soluzioni di $\sqrt[n]{f(x)} \underset{(\geq)}{>} g(x)$ sono date quindi dall' unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \underset{(\geq)}{>} (g(x))^n \quad (\geq 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

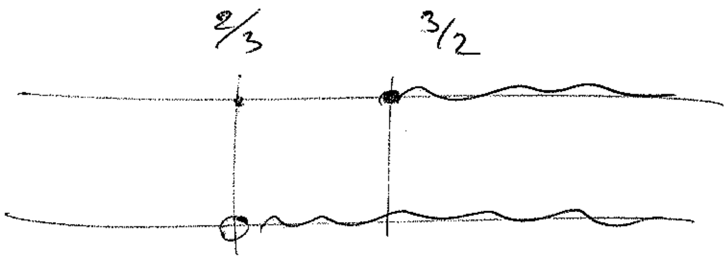
Esempio $\sqrt{4x^2+3x-1} > 2x-3$

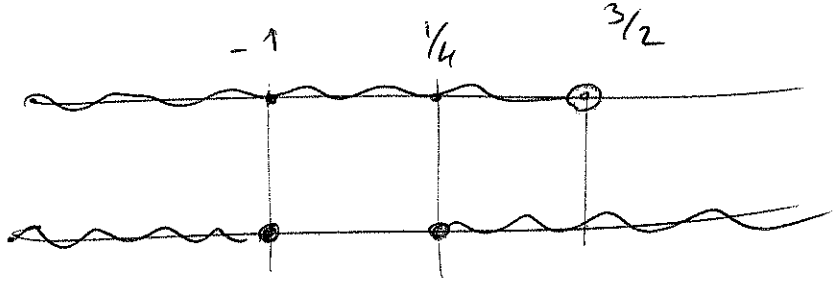
$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 4x^2+3x-1 > (2x-3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 4x^2+3x-1 \geq 0 \end{cases} \quad -1 \quad \frac{1}{4}$$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$$\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x > 2/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3/2 \\ (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{4}, +\infty) \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \qquad (-\infty, 3/2) \cap \left((-\infty, -1] \cup [\tfrac{1}{4}, +\infty)\right)$$





$$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cup (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{4}, 3/2\right)$$

Soluzione : $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 3/2\right) =$

$\cup \ \vee$ vel $= \left(-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right) =$

$\cap \ \wedge$ et $= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -1 \ \vee \ x \geq \frac{1}{4} \right\}.$

DISEQUAZIONI CON IL MODULO

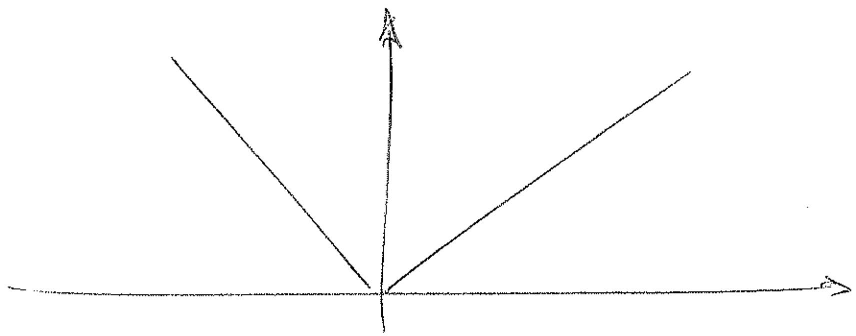
La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

se valutata in x restituisce un valore che rappresenta la distanza da 0 di x.

$|\cdot|$ modulo o valore assoluto

Il grafico è



Oss: $|x| \geq 0$ se $x \geq 0$ $|x| = x \geq 0$

se $x < 0$ $|x| = -x > 0$

Risolvere $\boxed{|A(x)| \leq k}$ significa quindi risolvere due sistemi

$k \geq 0$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \leq k \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \leq k \end{cases}$$

$$\left[\; 0 \leq A(x) \leq k \quad \vee \quad -k \leq A(x) < 0 \; \right] \Leftrightarrow \boxed{-k \leq A(x) \leq k}$$

Analogamente risolvere $|A(x)| \geq k$ significa risolvere

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \geq k \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) \geq k \end{cases}$$

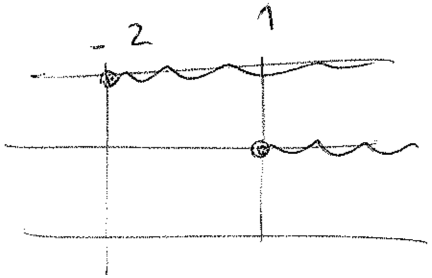
$A(x) \geq k \quad \vee \quad A(x) \leq -k$

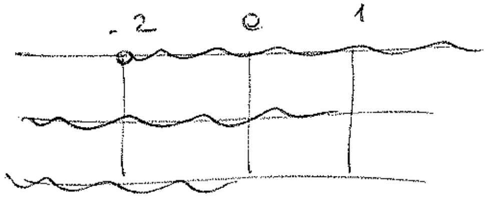
$A(x) \leq -k \quad \vee \quad A(x) \geq k$

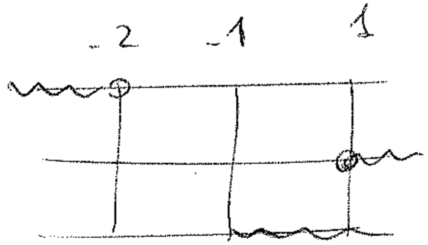
$$|x+2| < 1 + |x-1|$$

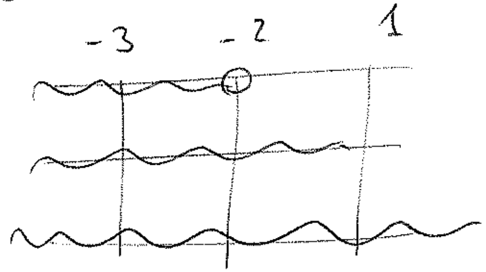
$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x+2 < 1 + x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ x+2 < 1 + (1-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-1 \geq 0 \\ -x-2 < x \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-1 < 0 \\ -x-2 < 2-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ 2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ -2 < 2 \end{cases}$$







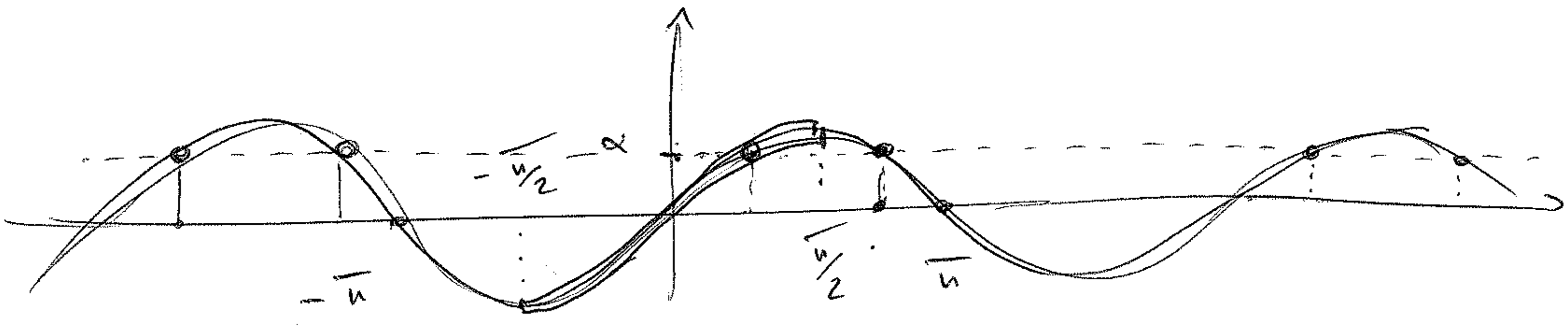


$$\emptyset \quad \cup \quad [-2, 0) \quad \cup \quad \emptyset \quad \cup \quad (-\infty, -2)$$

soluzione $(-\infty, 0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

$\operatorname{sen} x = \alpha$

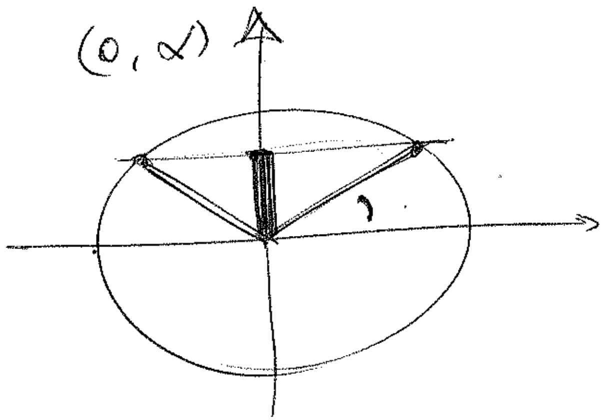


$-1 \leq \alpha \leq 1$

$x = \arcsin \alpha$ è soluzione

$x = \pi - \arcsin \alpha$ è soluzione

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin \alpha + 2k\pi \\ \pi - \arcsin \alpha + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$



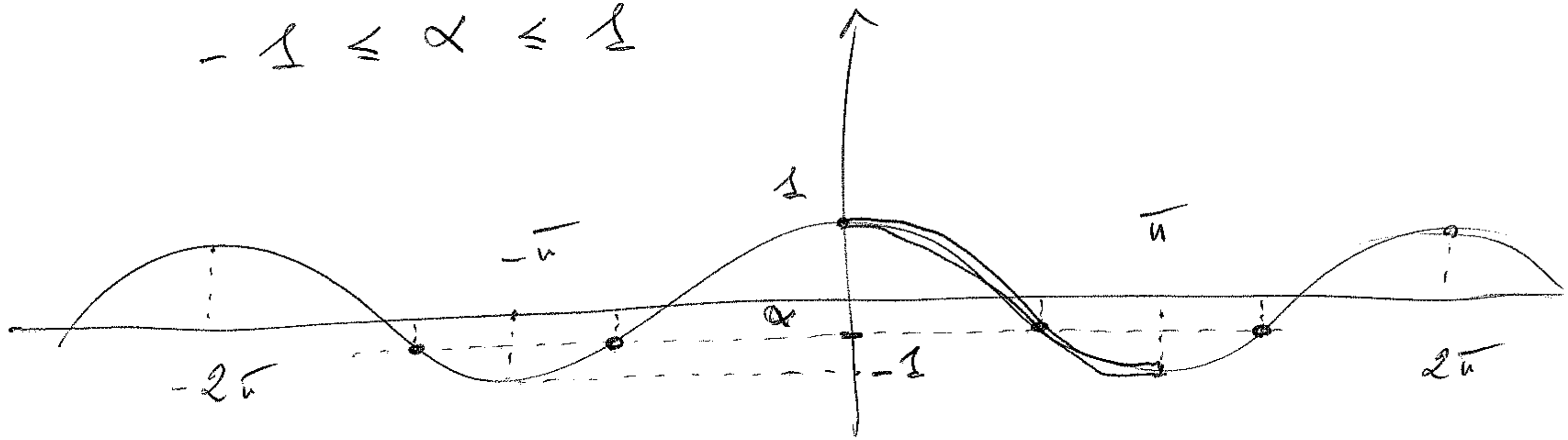
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Oss: Se $\alpha = 1$ $\cancel{(\alpha = -1)}$

$$\arcsin \alpha = \pi - \arcsin \alpha$$

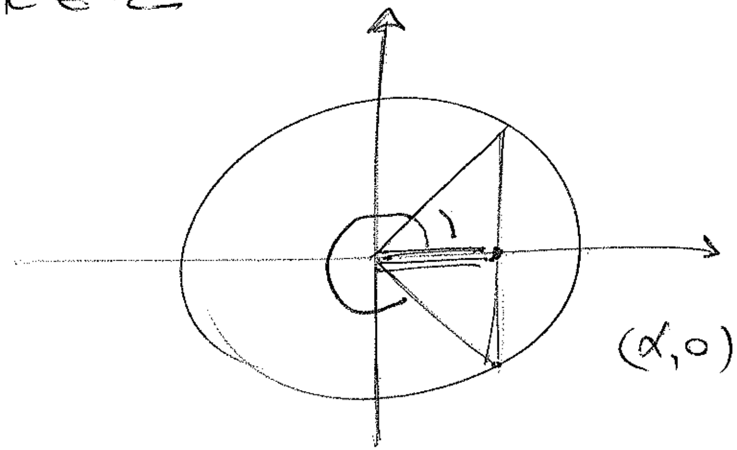
Analogamente : $-1 \leq \alpha \leq 1$

$\cos x = \alpha$



$x = \arccos \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2\pi - \arccos \alpha + 2k\pi$

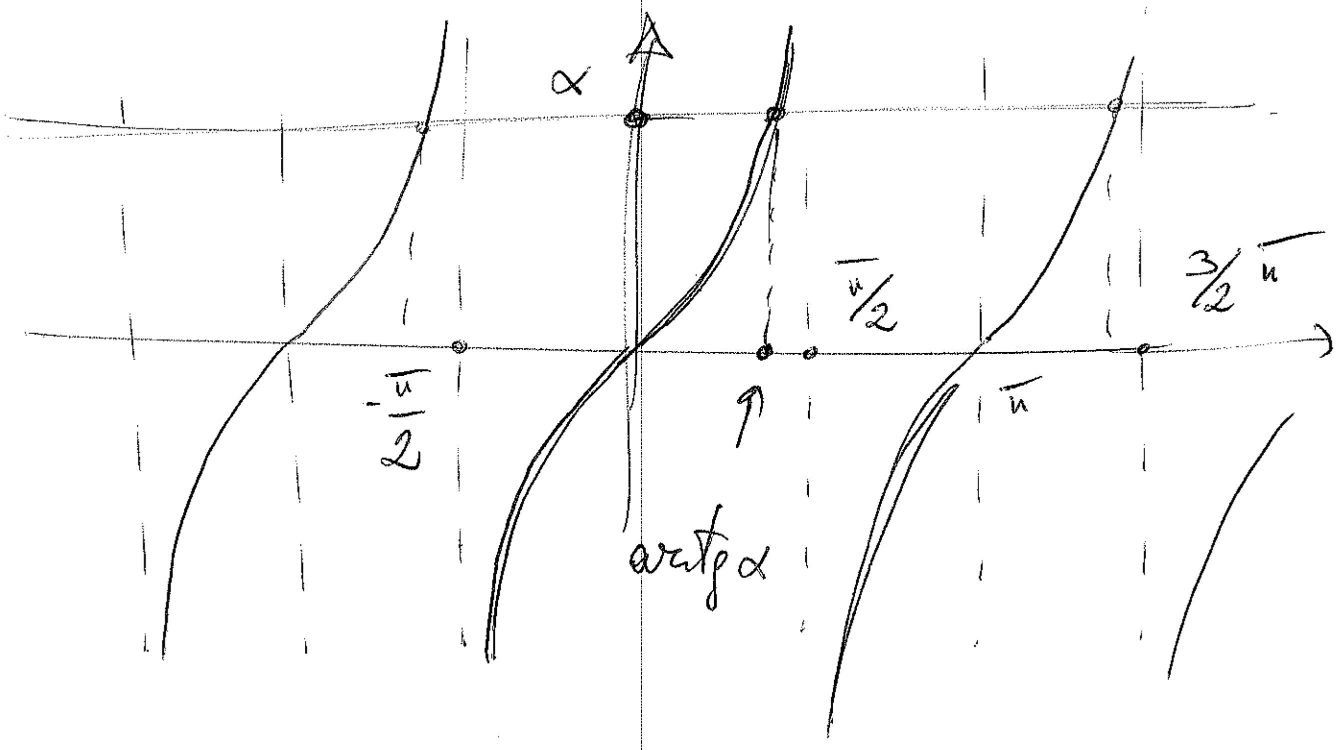


$\operatorname{tg} x = \alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$x = \operatorname{arctg} \alpha + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	non definita

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\text{se } \cos\alpha \neq 0)$$

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\left(\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha\right)$$

$$\text{sen}(\alpha+2\pi) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$$

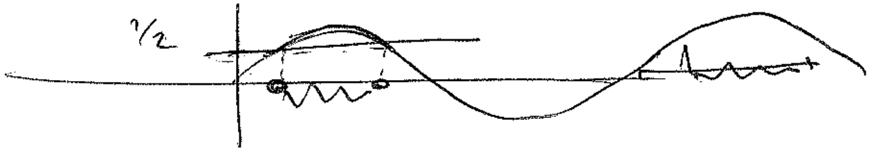
$$\text{tg}(\alpha+\pi) = \text{Tg}\,\alpha$$

$$\text{sen}(\pi-\alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$$

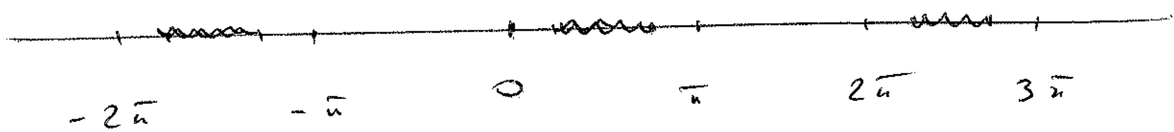
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$

Soluzione: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \frac{5}{6} + 2k\pi \right]$



$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \qquad c \neq 0$

$\hookrightarrow \begin{cases} a t + b s + c = 0 \\ t^2 + s^2 = 1 \end{cases}$

$t = \operatorname{sen} x$

$s = \cos x$

t, s nuove incognite

Se $c = 0$ si divide per $\cos x$ e si ottiene

$a \operatorname{tg} x + b = 0$

Esempio $\qquad \cos x + 3\,\text{sen}\, x = 1$

$$\begin{cases} t + 3s = 1 \\ t^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} t = 1 - 3s \\ s(5s-3) = 0 \end{cases}$$

$s_1 = 0 \qquad t_1 = 1$

$s_2 = 3/5 \qquad t_2 = -4/5$

$\text{sen}\, x = 0 \qquad \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

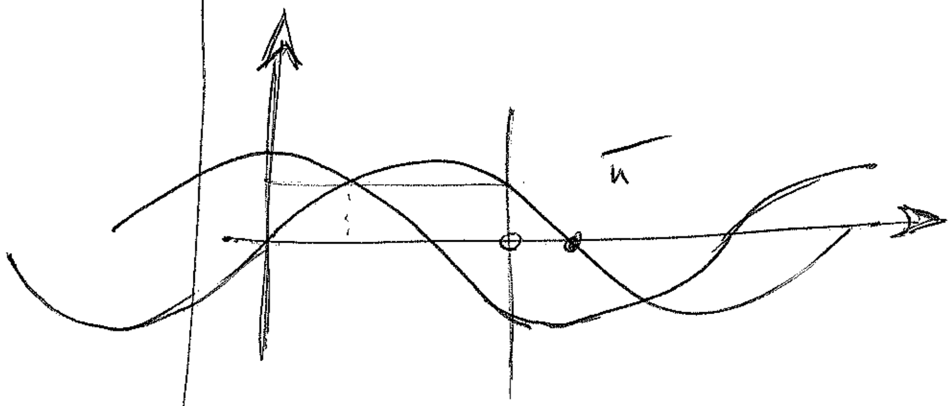
$\text{sen}\, x = 3/5 \qquad \cos x = -4/5$

$$\begin{cases} x = \text{arcsen}\, 3/5 & \text{No} \\ x = \pi - \text{arcsen}\, 3/5 & \boxed{\text{SI}} \end{cases}$$

$\pi - \text{arcsen}\,\frac{3}{5} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

sen

cos



19

$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ $\boxed{\cos x = t}$ $-1 \leq t \leq 1$

$2t^2 + t - 1 = 0$ $t_1 = -1$ $t_2 = \frac{1}{2}$

$2t^2 + t - 1 > 0$ se $t < -1 \;\vee\; t > 1/2$

$\cos x < -1$ mai!

$\cos x > 1/2$ se

$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ $\vee$

$2k\pi + \frac{5}{3}\pi < x < (2k+2)\pi$

Analogamente si risolvono le equazioni del tipo

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$t = \operatorname{tg} x$ si divide per $\cos^2 x$ $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$

! solo se $\cos x \neq 0$ (bisognerà quindi valutare a parte questa possibilità)

$$\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}x}{2}} > \cos x$$

$1+\frac{\operatorname{sen}x}{2} \geq 0$ ma $-\frac{1}{2} \leq \frac{\operatorname{sen}x}{2} \leq \frac{1}{2}$ quindi ok

$1+\frac{\operatorname{sen}x}{2} > 1/2 \geq 0$

$\cos x < 0 \quad \vee \quad \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 1+\frac{\operatorname{sen}x}{2} > \cos^2 x \end{cases}$

$\cos x < 0$ per $-\pi/2 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

per risolvere $1+\frac{\operatorname{sen}x}{2} > \cos^2 x$ si osservi che $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$

Si risolve $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \frac{\operatorname{sen}x}{2} > 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \operatorname{sen}x\left(\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}\right) > 0$

...

Soluzione

$2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$$c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x \geq \alpha$$

ω note

x incognite

Moltiplico e divido per $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ e ottengo

$$\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \cos \omega x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \operatorname{sen} \omega x \right) \geq \alpha$$

$$\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \varphi \text{ tale che}$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \operatorname{sen} \varphi$$

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \omega x + \cos \varphi \operatorname{sen} \omega x \geq \frac{\alpha}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) \geq \frac{\alpha}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

$$3^x = \sqrt[3]{3^{2x-1}} \sqrt[x]{9} \qquad x \neq 0$$

$$3^x = 3^{\frac{2x-1}{3}} \left(3^2\right)^{1/x}$$

$$3^x = 3^{\frac{2x-1}{3} + \frac{2}{x}} \longrightarrow$$

$$x = \frac{2x-1}{3} + \frac{2}{x} \longleftarrow$$

$f(x) = a^x$ $\quad a \neq 1$ $\quad (a > 0)$

funzione esponenziale

è iniettiva, cioè

$f(x) = f(y)$

$\Longrightarrow \quad x = y$

(moltiplico per $3x$)

$$3x^2 = 2x^2 - x + 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Sol $\begin{array}{|l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}$

$\circledast \; 64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x}$ $\qquad 3^2 \cdot 3^{-x}$

$3^x = t \qquad 64 - 2t > 45 + 9\frac{1}{t} \qquad (!\ t > 0)$

$$19t - 2t^2 - 9 > 0$$

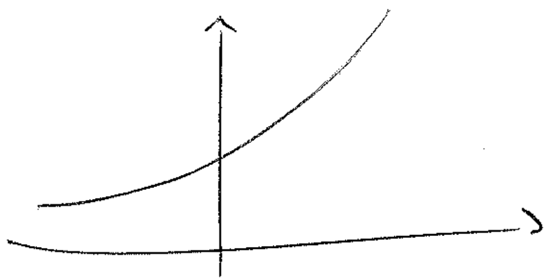
Risolvo: $2t^2 - 19t + 9 = 0 \qquad t_1 = 9 \quad t_2 = 1/2$

Quindi $2t^2 - 19t + 9 < 0$ se $\frac{1}{2} < t < 9$

$\Rightarrow$ $\circledast$ è soddisfatta se $\frac{1}{2} < 3^x < 9$

$f(x) = 3^x$ è strettamente crescente

$x > y \iff f(x) > f(y)$



24

quindi $\frac{1}{2} < 3^x < 9$

$3^x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \log_3 1/2$

$3^x < 9 \Rightarrow x < \log_3 9 = 2$

Conclusione: $\log_3 1/2 < x < 2$.

Se l'equazione fosse stata $64 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x > 45 + 9\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

si procede ponendo $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

si ottiene $2t^2 - 19t + 9 < 0$

$\frac{1}{2} < t < 9$

$\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$

Però $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ è decrescente

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{2} \Rightarrow x < \log_{1/3} 1/2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9 \Rightarrow x > \log_{1/3} 9$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x < 2^5$$ Applico $\log_2$ a entrambi i membri.

$f(x) = \log_2 x$ è strettamente crescente

$$x \underbrace{\log_2 \frac{1}{10}}_{<0} < 5 \log_2 2 = 5$$

$$x > 5 \frac{1}{\log_2 \frac{1}{10}} = -\frac{5}{\log_2 10}$$

$$8^{x+2} > 32^{4x+1}$$

$$(2^3)^{x+2} > (2^5)^{4x+1}$$

$$2^{3(x+2)} > 2^{5(4x+1)}$$

$$3(x+2) > 5(4x+1) \quad \dots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x < -2$$