Esercizi su serie numeriche

1. Scrivere come numero razionale i numeri $1,\bar{7}$; $1,\overline{32}$; $1,\overline{123}$; $0,12\bar{3}$.

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

2. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2-n}$

3. $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^p}\,, \qquad p \in \mathbf{R}$

4. $\displaystyle\sum_n \frac{a^n}{n!}$

5. $\displaystyle\sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0$

6. $\displaystyle\sum_n \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)^\alpha, \qquad \alpha > 0$

7. $\displaystyle\sum_n \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

8. $\displaystyle\sum_n \frac{n^3}{e^n}$

9. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\log n}$

10. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\log n!}$

11. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n\log n\log(\log n)}$

12. $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{n^n}a^n$

13. $\displaystyle\sum_n \frac{2^n+n}{3^n-\sqrt{n}}$

14. $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

15. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\log n)^p}\,, \qquad p > 0$

16. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\log(\log n))^p}\,, \qquad p > 0$

17. $\displaystyle\sum_n \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$

18. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+3n+5}\right)^{n^2}$

19. $\displaystyle\sum_n \operatorname{tg}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n^3-n+2}\right)$

20. $\sum_n \frac{\operatorname{sen}(\log n)}{\sqrt{7n^5+n}} n$

21. $\sum_n \frac{1}{n!}$

22. $\sum_n \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sqrt{7n^5+n}} n^2$

23. $\sum_n \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$

24. $\sum_n \left[\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right], \qquad \alpha > 0$

25. $\sum_n \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\beta - 1\right], \qquad \alpha, \beta > 0$

26. $\sum_n \left[e^{1/n^4} - 1\right] n^\alpha, \qquad \alpha > 0$

27. $\sum_n \frac{n + \log n - \operatorname{sen} n}{7n^3 - \cos^2\frac{n}{2} + 5n}$

28. $\sum_n \frac{n^5 + \log n - \operatorname{sen}\frac{1}{n} + \cos n}{5n^7 - 3n^2 + 5n}$

29. $\sum_n a^{\log n}, \qquad a > 0$

30. $\sum_n \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{n}}$

31. $\sum_n \operatorname{arcsen}\frac{1+\log n}{\sqrt{n^3+1}}$

32. $\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^3}$

33. $\sum_n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3}$

34. $\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n\log n}$

35. $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^p}, \qquad p > 0$

36. $\sum_n \frac{1}{n(\log\log n)^p}, \qquad p > 0$

37. $\sum_n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^p\right), \qquad p > 0$

Per questa si usi il seguente fatto:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \cos(\operatorname{arctg} x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$$

da cui $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{x}$ per cui, applicando l'arcotangente ad entrambi i membri dell'uguaglianza, si ottiene infine (**perché?**)

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Per cui, per $x = n^p$, si ha $\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^p\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^p}$.

38. $\displaystyle\sum_n \cos(2\pi n)\frac{1}{n}$

39. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(n + \operatorname{sen} n)n}$

40. $\displaystyle\sum_n \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

41. $\displaystyle\sum_n \left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^2}, \qquad \alpha > 0$

42. $\displaystyle\sum_n \left[\cos\left(\frac{1}{n^2+n}\right)^\alpha - 1\right] n^2$

Si osservi che questa serie è a termini negativi. Cosa cambia?

43. $\displaystyle\sum_n a^{\log n^\alpha}, \qquad a, \alpha > 0$

44. $\displaystyle\sum_n a^{n^2}, \qquad a > 0$

45. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{e^{3n} + e^n + 1}{2e^{3n} + 2}\right)^n$

46. $\displaystyle\sum_n \left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\right]^n$

Ora altre serie un po' più difficili (nelle pagine che seguono potete trovare qualche suggerimento):

47. $\displaystyle\sum_n a^{\sqrt{n}}, \qquad a > 0$

48. $\displaystyle\sum_n 2^n\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{n}\right)^n$

49. $\displaystyle\sum_n \arccos\sqrt{1 + \log\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)}, \qquad \alpha > 0$

50. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)$

51. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}\right), \qquad \alpha > 0$

52. $\displaystyle\sum_n \left(n^{1/n} - 1\right)$

53. $\sum_n [\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(n! \log n))]^n$

54. $\sum_n (-1)^n \dfrac{n \log n}{1+n^2}$

55. $\sum_n \left[\dfrac{\pi}{2} - \arccos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right], \qquad \alpha > 0$

56. $\sum_n \left[\pi - \arccos\left(-\dfrac{n^\alpha}{n^\alpha + 1}\right)\right], \qquad \alpha > 0$

57. $\sum_n (-1)^n a_n \qquad \text{dove } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se n è pari} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{se n è dispari} \end{cases}$

58. $\sum_n \left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)\right]^n$

Suggerimenti

Se questi suggerimenti non sono sufficienti si vedano i suggerimenti bis alla pagina seguente.

47. Per $a \geqslant 1$ è facile vedere che la serie diverge a $+\infty$.
Per $a \in (0,1)$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a^{\sqrt{n}} = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

49. Si usi il punto 1) del suggerimento di **50**. Inoltre poiché $\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)} > 0$ si ha che $\operatorname{sen}\left(\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right) > 0$. Quindi

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right] = \sqrt{\operatorname{sen}^2\left[\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right]}.$$

50. Utilizzare i seguenti fatti:

1) una serie $\sum_n a_n$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, ha lo stesso carattere della serie $\sum_n \operatorname{sen} a_n$;

2) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

3) $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ per $\alpha \in (0, \pi/2)$

51. Analogo al **50**.

52. Usare l'uguaglianza per $x > 0$: $x = e^{\log x}$.

53. Si ha che $|\operatorname{sen}(n!\log n)| \leqslant 1$ per cui $|\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(n!\log n))| \leqslant \operatorname{sen} 1 < 1$.

55. Analogo al **50**.

56. Analogo al **49**.

58. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge a $e/2$, per cui, definitivamente, si ha che $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$. D'altra parte $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e/2 < \pi/2$ per cui

$$\operatorname{sen} 1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leqslant \operatorname{sen}(e/2) < 1.$$

Per confronto la serie converge.

SUGGERIMENTI BIS

47. Per cui per il confronto asintotico, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo $\alpha > 1$ si ha che la serie converge.

49. Si ha quindi che

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right] = \sqrt{1-\cos^2\left[\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}\right]}$$
$$= \sqrt{-\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{-\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}}{\sqrt{-\left(-\frac{1}{n^\alpha}\right)}} = 1$$

per confronto si ha che la serie data converge per $\alpha > 1$.

50. La serie data ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)$.

Poiché sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ si ha

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right) = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right) =$$
$$= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}$$

52. $n^{1/n} = e^{\frac{\log n}{n}}$

53. Per cui la serie data converge per confronto:

$$0 \leqslant |\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(n!\log n))|^n \leqslant (\operatorname{sen} 1)^n$$

e $0 < \operatorname{sen} 1 < 1$ per cui la serie $\sum_n (\operatorname{sen} 1)^n$ converge.