Alcuni esercizi sui limiti di funzioni

Ricordo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x \to 4^+} (x-4)^{x-4} = 1$$

$$\lim_{x \to 4^+} (x-4)^{x^2-16} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x+x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + e^x + 1}{2e^{3x}+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{sen}\left(x^2+4x\right)\right) + x}{\log(1+x)} = 5$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \frac{e^{\frac{(\log x)^2}{x}} - 1}{(\log x)^6} \operatorname{sen}\left((\log x)^4 e^{-x}\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{1/x} = e$$

dedurne che $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^7 - 3x^2 + 1}{x^5 + \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \cos x} = -\infty$$

anche se $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ non esiste

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[2]{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x + e^{2x}}{2^x + e^{x^2}} = 0$$

$\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^{\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arctg} x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcsen} x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arcsen} x} - e^{\operatorname{arctg} x}}{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arctg} x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$$

sione convergente a x_0. Posto $y_n = g(x_n)$, risulta $y_n \to y_0$, e dunque $\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = L$. Poiché la successione x_n è arbitraria, si può concludere che anche $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L$. Nell'esempio precedente si aveva $f(y) = \dfrac{y}{\sin y}$ e $g(x) = \arcsin x$. ■

Esempio 5.6

Spesso, grazie anche all'osservazione precedente, limiti piuttosto complessi si scompongono in combinazioni di limiti semplici. Ad esempio, per calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\operatorname{arctg} x^2}$$

basterà scrivere

$$\frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\operatorname{arctg} x^2} = \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{(e^x - e^{-x})^2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)^2 \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x^2}.$$

Siamo così ricondotti al prodotto di tre limiti. Il primo è uguale a $-1/2$, dato che $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x}) = 0$. Analogamente, il terzo limite è uguale a 1. Per il secondo, si ha

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2e^{-x}\frac{e^{2x} - 1}{2x}$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)^2 = 4.$$

Pertanto il valore del limite richiesto è -2. ■

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Esercizi

Si calcolino i seguenti limiti:

87. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x}$ **88.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^5 - x}$

89. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{2x^3 - x^2}$ **90.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^4 - x^2}{x - x^3}$

prima

$\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi + 4x)}{x}$

91.* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{A^x - B^x}{x}$ **92.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi + 4x)}{x}$

93. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{\pi(1-x)}{2}}{x}$ **94.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{\sin^2 x}$

95. $\lim_{x\to+\infty} (x - \sin^2 x \ln x)$

96. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x \sin x}\right]$

97. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1}$

98. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{4x - \sin x}$

99. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

100. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right)$

101. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3+\sin x)}{x^3}$

102. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^3}{\sin 5x + \sqrt[3]{x^4}\sin x}$

103. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\operatorname{tg} x}$

104. $\lim_{x\to\pi/2} (1+\cos^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}$

105. $\lim_{x\to 0} \left(\sin x - \sin\frac{1}{x}\right)$

106. $\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}$

107. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x}\sin x)}{x}$

108. $\lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x + (1-\cos 2x)\sin^2 x}{27x^4 + 5\sin x}$

109. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\operatorname{tg} x + 5x}{2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}$

110. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 5x)\operatorname{tg} 3x}{(\sin x - x^3)^3}$

111. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+x) + \operatorname{tg} x}{\sin x + \sqrt[3]{x}}$

112. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x) + 7x^3}{\sin^2 5x + 15x^6}$

113. $\lim_{x\to 0} \frac{32x^5 + (1-\cos x)}{\operatorname{tg}^2 x \ln(1+x) + 8x}$

114. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^3 x} - 1}{x\left(\cos x - e^{x^2}\right)}$

115. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{tg}^4 x + 1)}{e^{2\sin^4 x} - 1}$

116. $\lim_{x\to 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$

117. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$

118. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

119. $\lim_{x\to-\infty} \left\{\sqrt{x^2+2x} + x\right\}$

120. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)}$

121.* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x \sin x}$

122. $\lim_{x\to+\infty} x e^x \sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)$

123. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$

124. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 1 + \cos x)$

125. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$

126. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$

127. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2\sin x + \sin^2 x}{x^4 + x^3 + x\sin x}$

128. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2} - 1}{x}$

129. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2} - 1)}{x}$

130. $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$

131. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x}$ **132.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(x+2) - \log_a 2}{x}$ **133.*** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sin x^2\right)^{1/\log_5 x^2}$

134. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{\sqrt{x}}$ **135.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$ **136.** $\dfrac{1 - \cos x + \ln(1+x)}{e^x - 1}$

137. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \operatorname{tg} x(e^{\cos x} - 1)$ **138.*** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{tg}\left(xa + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{x}\right)$ **139.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_2(e^x + 1)}{x + \sin x}$.

In molti casi può accadere che il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ non esista, ma che ci siano invece i limiti destro e sinistro, ovvero i limiti delle restrizioni della funzione $f(x)$ agli insiemi $A \cap (x_0, +\infty)$ e, rispettivamente, $A \cap (-\infty, x_0)$. Talora poi la considerazione di questi limiti può essere di aiuto per calcolare il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Infatti quest'ultimo esisterà se e solo se i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali.

Esempio 5.7

Si calcoli, se esiste, il limite $\lim\limits_{x\to 4} [x]\{x\}$.

Calcoliamo i limiti destro e sinistro. Se $4 < x < 5$ (possiamo sempre limitarci a un intorno del punto 4) risulta $[x] = 4$, e dunque $\lim\limits_{x\to 4^+} [x]\{x\} = \lim\limits_{x\to 4^+} 4\{x\} = 0$. Al contrario, se $3 < x < 4$ abbiamo $[x] = 3$, e dunque $\lim\limits_{x\to 4^-} [x]\{x\} = \lim\limits_{x\to 4^-} 3\{x\} = 3$. Poiché i due limiti sono diversi, il limite cercato non esiste. ∎

Se poi la funzione $f(x)$ in questione è monotòna, i limiti destro e sinistro esistono sempre, e il problema è ridotto al loro calcolo.

Esempio 5.8

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{-1/x}.$$

La funzione in esame è crescente (infatti $1/x$ è decrescente per $x > 0$, $-1/x$ è crescente, e dunque $2^{-1/x}$ è crescente), cosicché il limite cercato esiste. Per determinarlo, consideriamo la successione $x_n = 1/n$. Dato che il limite esiste, si ha (vedi *Lezioni*, cap. 3, Teorema 4.1)

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1/x_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Allo stesso modo si dimostra che $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{-1/x} = +\infty$. ∎

Esercizi

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti, o altrimenti i limiti destro e sinistro:

140. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{|x|}$

141. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cos x}{|x|}$

142. $\lim_{x\to 0} [x]\{1-x\}$

143. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt[3]{x^5}}$

144. $\lim_{x\to 0} |x|^{1/x}$

145. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{x+1/x}}{1+2^{1/x}}$.

Calcolare i seguenti limiti:

146. $\lim_{x\to 0^+} (x \ln x)^{1/x}$

147. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\sin x}-1}{x}$

148. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}}$

149. $\lim_{x\to 0^+} \left(\log_3 x + \dfrac{1}{x}\right)$

150. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$.

I limiti di funzioni possono essere talvolta utilizzati con profitto per calcolare i limiti di successioni, soprattutto quando queste si presentano nella forma $f(x_n)$, con $x_n \to x_0$. In questo caso, se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$

allora esisterà anche il $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, e sarà uguale al precedente.

Esempio 5.9

Si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1).$$

Questa successione è della forma $f(x_n)$, dove $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $f(x) = \dfrac{2^x-1}{x}$. Si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 2$, e dunque

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \ln 2. \blacksquare$$

Ex mostrare che: $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$(*) \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}$$

$$= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1}\right)$$

esempi

$n = 2$: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$n = 3$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$n = 4$: $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$

In es. 100

$$\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3} = \frac{1-2x^2}{(2+x^3)^{2/3} + (2+x^3)^{1/3}(1+2x^2+x^3)^{1/3} + (1+2x^2+x^3)^{2/3}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{x^2\left[\left(\frac{2}{x^3}+1\right)^{2/3} + \left(\frac{2}{x^3}+1\right)^{1/3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}+1\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}+1\right)^{2/3}\right]}$$

Alcune soluzioni

87. $+\infty$

88. 0

89. $\frac{1}{2}$

90. $-\infty$

91. $\log \frac{a}{b}$

92. -4

93

94

95

96

97

98

99

100 $-\frac{2}{3}$ (usare $\circledast$ con $n = 3$)

101

102

103

104

105 non esiste

106 1

107. 0

108

109

110

111

112

113. 0

114.

115

116.

117

118.

119. 120.

121. 122.

123. 124.

125. $2/3$ 126. $\frac{2}{9}$

127. 128

129. 130 $2\sqrt{5}$

131. 1 (si vede sotto) 132. $\frac{1}{2}\log_a e$ (si vede sotto)

133 5 134

135 136

137 1 138 $\frac{b}{ab-1}$ (si vede lo svolgimento sotto)

139. $\log_2 e$

---

132. $\log_a(x+2) - \log_a 2 = \log_e\left(\frac{x+2}{2}\right) = \log_e\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \text{(vedi sotto)}$$

Fatto generale $\log_b y = \log_b a^{\log_a y} = \log_a y \; \log_b a$

cioè $\boxed{\log_b y = \log_b a \; \log_a y}$ $\forall a,b,y>0$

$$\Rightarrow \log_a(1+x) = \log_e(1+x) \cdot \log_a e$$

131

$$\frac{\log \operatorname{sen} x}{\log x} = \frac{\log \operatorname{sen} x - \log x + \log x}{\log x}$$

$$= \frac{\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x}{\log x}$$

133 si veda prima lo svolgimento di 131.

Dopodiché

$$(\operatorname{sen} x^2)^{\frac{1}{\log_5 x^2}} = 5^{\log_5 (\operatorname{sen} x^2)^{\frac{1}{\log_5 x^2}}} =$$

$$= 5^{\frac{\log_5 (\operatorname{sen} x^2)}{\log_5 x^2}}$$

Ora, poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\log_5 (\operatorname{sen} x^2)}{\log_5 x^2} = 1$

si conclude.

137 Si osservi innanzitutto che

$$\lim_{x \to \pi/2} (e^{\cos x} - 1) = 0$$

ma $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x$ non esiste

Esistono però i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Nonostante questo il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} = 1$$

(si pone, se si preferisce, $y = \cos x$
per $x \to \frac{\pi}{2}$ $y \to 0$ e si ottiene $\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}$)

per cui

$$\operatorname{tg} x \left(e^{\cos x} - 1\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left(e^{\cos x} - 1\right) =$$

$$= \operatorname{sen} x \, \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 1$$

138) Se $b=0$ $\lim_{x\to 0} x \, tg(ax) = 0$.

Diversamente si ha (si veda la serie n. 37 foglio di esercizi n. 7)

se $b\neq 0$

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{x} = \begin{cases} \pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{x}{b} & \text{se } \frac{x}{b} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{b} & \text{se } \frac{x}{b} < 0 \end{cases}$$

quindi

$$tg\left(xa + \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right) = \begin{cases} tg\left(\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right) & \text{se } \frac{x}{b} > 0 \\ tg\left(\frac{x}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x}{b} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } \frac{x}{b} < 0 \end{cases}$$

poiché però la tangente è periodica di periodo π le due quantità sono uguali

Consideriamo allora (ad esempio)

$$tg\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b} + \frac{\pi}{2}\right)$$ qualunque sia il segno di $\frac{x}{b}$ $(b\neq 0)$

Questa quantità è

$$\frac{sen\left(\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right) + \pi/2\right)}{\cos\left(\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right) + \pi/2\right)} = \frac{1}{tg\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)}$$

Infine si ha

$$x \quad \operatorname{tg}\left(xa + \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right) =$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg}\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)} =$$

$$= \frac{ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}}{\operatorname{tg}\left(ax - \operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right)} \quad \frac{x}{x\left(a - \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{b}}{x}\right)}$$

Il primo fattore al tendere di x a zero tende a 1

Il secondo diventa :

$$\frac{x}{x\left(a - \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{b}}{x}\right)} = \frac{1}{a - \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{b}}{\frac{x}{b}\cdot b}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{a - \frac{1}{b}}$$

per cui si ha che il limite è

$$\frac{1}{a - \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{ab-1}{b}} = \frac{b}{ab-1}$$

(se $b = 0$ si ritrova 0)

139

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2(e^x+1)}{\log_2(e^x)} = 1$$

infatti $\log_2 (e^x+1) = \log_2 \left(e^x (1+e^{-x})\right)$

quindi

$$\frac{\log_2 (e^x+1)}{\log_2 e^x} = \cancel{\log_2 e (1+e^{-x})}$$

$$= \frac{\log_2 e^x + \log_2 (1+e^{-x})}{\log_2 e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Inoltre, poiché $\log_2 e^x = x \log_2 e$, si ha

$$\frac{\log_2 (e^x+1)}{x+\operatorname{sen} x} = \frac{\log_2 e^x}{x+\operatorname{sen} x} \frac{\log_2 (e^x+1)}{\log_2 e^x} =$$

$$= \frac{x \log_2 e}{x+\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\log_2 (e^x+1)}{\log_2 e^x}$$

$$\log_2 e \xleftarrow[x \to +\infty]{} \qquad \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Infatti $\dfrac{x \log_2 e}{x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}$ Attenzione! $\lim \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

infatti $0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ per $x > 0$

e poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ concludo.