

Alcuni limiti da risolvere con
la formula di Taylor (1° livello)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = f(x)$$

$$\left[\text{Sugg. } f(x) \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} \right]^{\frac{\sin x - x}{x} \cdot \frac{1}{x \sin x}}$$

$$\text{con } \frac{\sin x - x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x) + x^2 + \frac{x^4}{2}}{\sqrt{1+x^6} - \sqrt{1-x^6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \sqrt{1+2x} - 1}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}}$$

Ricorda

$$\left[\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - 2 + 2 \cos x}{x \log(1+x) - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$$

Esercizi riguardo la formula di Taylor (2° livello)

- Dimostrare che $f(x) = e^x - 1 - x$
è infinitesima di ordine 2 in $x=0$
- Calcolare il polinomio di Taylor ~~di grado~~
intorno a $x=0$ di grado 15 di $f(x) = \sin x^3$
- Calcolare il polinomio di Taylor di grado
intorno a $x=0$ di grado 6 della funzione
 $f(x) = \sin^2 x$
- Calcolare il polinomio di Taylor intorno a
 $x=0$ di grado 12 della funzione
 $f(x) = \sin^2 x^3$
- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \cos x}{x^3} \log \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \cos x}{x^3} \log \left(3 + \sin \frac{1}{x} \right)$

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2}{\sqrt{1-x^2} - \cos x}$

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+x^2)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

• Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x) = \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^2) - \sin x - x^2}{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}$ [R. 12]

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x - \log(1+x)^2}{x^4 + x^\alpha}$

al variare di $\alpha > 0$

• Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{6}x^4 - x^2 + \sin^2 x}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^\alpha}$

al variare di $\alpha > 0$

• Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) + \log(1-x^\alpha) + x^2}{e^{x^2} - e^{-x^2} - 2\alpha x^2}$$

al variare di $\alpha > 0$.

• ~~Calcolare~~ Dire se la funzione

$f(x) = x e^{\frac{x+1}{x^2}}$ ha un asintoto a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{x+1}{x^2}} - 1 \right) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$\left(\mathbb{R}, \frac{1}{12} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin^2 x) - \operatorname{arctg} x^2}{\sinh^2 x - x^2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Altri esercizi sulle serie

$$\sum \frac{\log(n+1) - \log n}{n^\alpha} \quad \alpha > 0$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left[\frac{1}{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \right] \quad \alpha \geq 0$$

$$\sum (-1)^k \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt{k} \log k}$$

$$\sum \frac{\cancel{\frac{1}{n!}} \left(\frac{n}{2} - \operatorname{arctg} n \right)}{\log \cos \sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$\sum \frac{1}{k!}$$

$$\sum (-1)^n \frac{n \log n}{1 + n^2}$$

$$\sum \sin \left(n\pi + \frac{1}{\log n} \right)$$

Serie (con Taylor)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$$

$$\sum (-1)^n \left(1 - n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum \left(n^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) \quad \left(\text{si può fare anche senza Taylor} \right)$$

$$\sum (n - \operatorname{sen} n) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2 \right)^{\alpha} \quad \alpha > 0$$

$$\sum 2^n \left(\frac{1}{3} - \operatorname{sen} \frac{3}{n} \right)^n$$

$$\sum \left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) n$$

$$\sum \left(1 + \frac{\alpha}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sum \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) n$$

$$\sum \left(e^{\frac{\log n}{n}} - e^{\frac{\log n}{n^2}} \right)$$

$$\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{\log n}{n} \right)$$

$$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \sum \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

$$\sum o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum \left(e^{\frac{1}{n}} - \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum \left(\sqrt{n^{4/3} \cos \frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1+n^2} \right)$$

$$\sum (-1)^n \cancel{n} \left(\sqrt{\cos \frac{1}{n}} - \sqrt[3]{\frac{1+n^2}{n^2}} \right)$$

$$\sum \left[\left(\cos \frac{1}{n} \right)^\alpha - \left(1 + \sin \frac{1}{n^2} \right)^\beta \right] \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\sum \left[\cos \frac{1}{n^\alpha} - \left(1 + \sin \frac{1}{n^\beta} \right) \right]$$

$$\sum \arctg \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum \sin \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum \cos \left(\frac{n}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$\sum \left(e^{(-1)^n/n} - 1 \right)$$

$$\sum \sinh \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$

$$\alpha > 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Di queste serie
provare e
calcolare la
somma