

CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1

Prova Scritta

14 Giugno 2001

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \int_{\frac{1}{x}}^x \arctan \left(\ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right) dt.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\tanh t}{t^2} dt,$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

3. Sia (a_n) una successione non negativa e infinitesima, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{a_n} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx.$$

4. Sia f una funzione derivabile due volte sull'intervallo (a, b) , provare che per ogni $x \in (a, b)$ si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

5. Discutere l'esistenza di una funzione $f \in C^0(\mathbf{R})$ tale che

$$\int_0^{\ln(1+x^3)} f(t) dt = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} & \text{se } -1 < x \leq 0. \end{cases}$$