Esercizi sulla funzione integrale

Luciano Battaia*

Versione del 8 marzo 2007

In questo fascicoletto propongo alcuni esercizi sulla funzione integrale. I testi della prima parte sono presi dalle prove assegnate agli esami di stato di Liceo Scientifico, o sono comunque adatti a questo ordine di scuola, quelli della seconda parte sono, invece, leggermente più complessi, anche se spesso possono essere risolti con quanto appreso nei normali programmi di scuola media superiore.

Potete trovare una completa ed esauriente trattazione di tutti i concetti teorici relativi alla funzione integrale, alle primitive e agli integrali di Riemann, indispensabili premesse alla risoluzione degli esercizi, nelle seguenti pagine di www.batmath.it:

— http://www.batmath.it/matematica/a_primitive/primitive.htm
— http://www.batmath.it/eng/a_riemann/riemann.htm
— http://www.batmath.it/matematica/a_appl_riem/appl_riem.htm
— http://www.batmath.it/matematica/a_int_impropri/int_impropri.htm

Poiché queste pagine hanno uno scopo prevalentemente didattico, ogni risoluzione è, per quanto possibile, dettagliata e comprensiva anche di delucidazioni teoriche, che possono anche essere ripetute nei vari esercizi.

Indice

*http://www.batmath.it

1 Prima parte

Esercizio 1.1 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 2001, quesito 2)**.** *Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{2x\mathrm{e}^x}\,,$$

dove e *è la base dei logaritmi naturali.*

Se la funzione f è continua in $\mathbb{R}$, la funzione integrale

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e, per ogni x, si ha $F'(x) = f(x)$.

Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $^0/_0$ e sono verificate le ipotesi per l'applicabilità del teorema di l'Hôpital. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{2x\mathrm{e}^x} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x} = \frac{f(0)}{2} = 1\,.$$

Esercizio 1.2 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 2002, quesito 7)**.** *Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x)$ tale che:*

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\,\mathrm{d}t\,, \quad \textit{con } x > 0\,.$$

La funzione integranda ha come dominio l'insieme dei reali strettamente positivi, dove è continua; se ne deduce che essa è integrabile su ogni intervallo $[a, b]$, con $a > 0$. Se $x > 0$, anche $x + 1 > 0$, quindi la funzione f è definita sui reali strettamente positivi. Inoltre, detto $c > 0$ un reale, si ha

$$f(x) = \int_x^{c} \ln t\,\mathrm{d}t + \int_c^{x+1} \ln t\,\mathrm{d}t = -\int_c^{x} \ln t\,\mathrm{d}t + \int_c^{x+1} \ln t\,\mathrm{d}t = -g(x) + h(x)\,.$$

La funzione g è semplicemente la funzione integrale di $\ln t$, di punto iniziale c, mentre la funzione h è la composta tra la funzione integrale di $\ln t$ di punto iniziale c e la funzione $x \mapsto x+1$. Dunque sia g che h sono derivabili e si ha

$$g'(x) = \ln x\,, \quad h'(x) = \ln(x+1) \cdot (x+1)' = \ln(x+1)\,.$$

Se ne deduce che

$$f'(x) = -\ln x + \ln(x+1) = \ln \frac{x+1}{x}\,.$$

Esercizio 1.3 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 2003, quesito 6). *La derivata della funzione*

$$f(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

è la funzione $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4}$. *Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.*

La funzione $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, dunque integrabile su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Se ne deduce che la funzione $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ (il suo intervallo di integrazione è un intervallo che come ha primo estremo 0 e come secondo estremo x^2). Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che, nell'ipotesi di g continua e definita in $\mathbb{R}$, la funzione

$$G_a(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,,$$

detta *funzione integrale di g, di punto iniziale a*, è derivabile e si ha $G'(x) = g(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ (se g, sempre continua, fosse definita solo su un intervallo I di $\mathbb{R}$, anche a dovrebbe appartenere ad I e la funzione G avrebbe come dominio solo I e sarebbe derivabile solo in I).

La funzione f proposta nel testo è la composta tra $G_0(x)$ e $x \mapsto x^2$; poiché anche quest'ultima funzione è derivabile, non resta che calcolare la derivata della funzione composta, usando la nota regola:

$$f'(x) = G_0'(x^2) \cdot 2x = \mathrm{e}^{-x^4} 2x = 2x\mathrm{e}^{-x^4}\,.$$

Esercizio 1.4 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione ordinaria 2002, quesito 9). *Trovare $f(4)$, sapendo che f è continua e che*

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x)\,.$$

La funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

è la funzione integrale di f, di punto iniziale 0. La continuità di f implica la derivabilità della funzione integrale e anzi la validità dell'uguaglianza $F'(x) = f(x)$, per ogni x appartenente al dominio di f (e di F). È ovvio, nonostante non sia precisato nel testo, che il dominio di f deve essere un intervallo contenente sia 0 che 4. Si ha facilmente:

$$F'(x) = f(x) = \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)\,,$$

da cui si deduce che $f(4) = 1$.

Ho voluto correggere la formulazione originale di questo esercizio che, secondo me, era gravemente errata, e, ancora peggio, conteneva uno di quegli errori logici molto difficili da scoprire (e pertanto ancora più gravi). Gravissimo poi, a parere mio, il fatto che una cosa del genere succeda agli esami di stato: gli argomenti proposti in queste occasioni, infatti, diventano poi modello per la preparazione di esercizi sui testi in uso nelle scuole medie superiori, e se già chi porta la lanterna barcolla, immaginiamo poi cosa può succedere a chi si lascia guidare. In effetti nessuna delle numerose soluzioni che ho trovato in rete alla data di pubblicazione del presente fascicolo riporta la segnalazione dell'errore.

Il testo originale non conteneva la precisazione che la funzione f è continua. Ora è una cosa ben nota che l'integrale di Riemann di una funzione non dipende dai valori che la funzione stessa assume su un insieme finito di punti (in realtà nemmeno su opportuni insiemi infiniti, ma la cosa esula dal nostro contesto). Pertanto, senza l'ipotesi di continuità non si può affermare assolutamente nulla sul valore della funzione nel punto 4. Per essere più precisi la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x) & \text{se} \quad x \neq 4 \\ \text{qualsiasi numero reale} & \text{se} \quad x = 4 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del testo, ma il suo valore in 4 non è necessariamente 1.

Esercizio 1.5 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione straord.2005, quesito 7). *Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione:*

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

La funzione integranda è definita su $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. In corrispondenza dei punti $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ la funzione integranda ha un asintoto verticale. Essa non è integrabile, nemmeno in senso improprio, in un intervallo che comprenda uno di questi punti. Pertanto l'intervallo di integrazione deve essere tale che $[x, 2x]$, se $x > 0$, oppure $[2x, x]$, se $x < 0$, sia contenuto interamente, estremi compresi, nel dominio. Esaminando tutti i casi possibili, si deduce che le uniche possibilità sono:

— $-\pi/2 < x < 0$, cosicché $-\pi < 2x < 0$,
— $0 < x < \pi/2$, cosicché $0 < 2x < \pi$.

Se x è in uno di questi intervalli, si può considerare un punto c fissato, sempre in uno di questi intervalli, e spezzare l'integrale nella somma di due integrali.

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{c} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_c^{2x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = -\int_c^{x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_c^{2x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Il primo integrale è semplicemente la funzione integrale, di punto iniziale c, relativa alla funzione $1/\sin t$; il secondo integrale è la stessa funzione integrale, composta con la funzione $x \mapsto 2x$. Vista la continuità di $1/\sin t$ e la derivabilità di $x \mapsto 2x$, se ne deduce che si può applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, ottenendo:

$$F'(x) = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x}(2x)' = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin x}\,.$$

Questo esercizio non è, a mio avviso, semplice, nè adatto ad essere assegnato in una prova di maturità scientifica, non tanto per quanto riguarda il problema tecnico del calcolo della derivata, quanto piuttosto per la discussione sul dominio della funzione $F(x)$. Ma la cosa grave (anzi gravissima) è che il testo che ho qui proposto è corretto rispetto all'originale del tema ministeriale. L'originale chiedeva, testualmente, di calcolare la derivata di

$$F(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} \, \mathrm{d}t \, .$$

Ora, qualunque sia il valore di x, l'intervallo $[-x, 2x]$, oppure $[2x, -x]$, contiene l'origine, e l'integrale non può convergere, nemmeno in senso improprio, in un intervallo contenente l'origine, per cui la funzione ha come dominio l'insieme vuoto: dunque cosa significa calcolare la derivata di una funzione giammai definita?

Che cosa volevano verificare gli esperti estensori del quesito ministeriale? Forse che gli studenti fossero in grado di eseguire un calcolo tecnico di derivata? Purtroppo mi pare che succeda frequentemente che il tema d'esame si preoccupi più della verifica delle abilità di calcolo che non della verifica delle abilità logiche dei candidati, ma forse sono ipercritico e ho preso un abbaglio.

Esercizio 1.6 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione suppletiva 2005, quesito 7). *Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$*, non necessariamente ammette primitiva in* $[a, b]$*.*

Una funzione f, integrabile in un intervallo $[a, b]$, ammette sempre funzioni integrali; basta considerare un punto qualunque c dell'intervallo e considerare la funzione

$$F_c(x) = \int_{c}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

L'integrabilità di f assicura che la funzione F è ben definita in tutto $[a, b]$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura però la derivabilità di $F_c(x)$ solo nei punti dove f è continua. Dunque se f ha, per esempio, una discontinuità a salto in corrispondenza di un solo punto, x_0, di $[a, b]$, sarà integrabile in $[a, b]$, ma ogni sua funzione integrale avrà, in corrispondenza di x_0, derivate sinistra e destra diverse, ovvero non sarà derivabile.

Ebbene ogni primitiva, se esiste, di una funzione definita su un intervallo può differire da una funzione integrale solo per una costante (corollario del teorema di Lagrange); ma se nessuna funzione integrale è derivabile in corrispondenza di x_0, una tal primitiva non può esistere.

Si deve osservare che, a parer mio, questo problema non viene abitualmente affrontato nella scuola media superiore, dove si considera, per lo più, il problema dell'integrale di Riemann solo per funzioni continue. Se questo esercizio vuole essere uno stimolo ad "ampliare gli orizzonti", ben venga, ma perchè usare gli studenti candidati alla maturità come cavie?

Inoltre vorrei segnalare che, se gli estensori dei temi ministeriali cominciano a fare i preziosi nella formulazione dei quesiti, sarebbe bene che tenessero anche conto che di definizioni di primitive non c'è solo quella tradizionale (si dice "primitiva di una funzione f" una funzione F che abbia come derivata f in *ogni* punto del comune dominio), ma anche altre, che consentono eccezioni alla coincidenza tra la derivata di F ed f: in questo caso provare che una funzione integrabile può non avere primitive sarebbe decisamente più difficile, e sicuramente non alla portata di uno studente candidato all'esame di stato.

Esercizio 1.7. *Dire per quali valori di h la seguente funzione ammette funzioni integrali e per quali valori di h ammette primitive; per questi ultimi valori calcolare tutte le primitive.*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \ln(x+1) + h & \textit{se} \quad x \geq 0 \\ x\mathrm{e}^{x^2} & \textit{se} \quad x < 0 \end{cases} .$$

La funzione f è continua per $h = -1$, mentre ha una discontinuità a salto per tutti gli altri valori di h. Dunque essa ha funzioni integrali per qualunque valore di h, mentre ha primitive solo per $h = -1$ (una funzione con discontinuità a salto non può avere primitive, mentre se è limitata e ha un numero finito di discontinuità è sicuramente integrabile secondo Riemann).

Per calcolare le primitive basta calcolarne una e poi aggiungere una costante additiva arbitraria. Una primitiva è, per esempio, la funzione integrale di punto iniziale 0. Si ha:

$$F_0(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^x (\cos x + \ln(x+1) - 1)\,\mathrm{d}x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \int_0^x x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sin x + (x+1)\ln(x+1) - 2x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.8. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Il limite dell'integrale proposto vale chiaramente 0, per cui si ha la forma $\infty \cdot 0$; conviene riscrivere il limite dato nella forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} \frac{\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x-1}\,.$$

Il primo fattore tende a $1/2$; per calcolare il secondo si può applicare la regola di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x-1} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{e}\,.$$

Il risultato finale è dunque $1/2e$.

Esercizio 1.9. *Calcolare la derivata seconda della funzione*

$$F(x) = \int_0^x x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

La x che compare come fattore nella funzione integranda è costante nell'integrale, e dunque si può scrivere:

$$F(x) = x \int_0^x e^{-t^2} \, dt \,.$$

Dunque

$$F'(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt + x e^{-x^2} \,.$$

Ne segue

$$F''(x) = e^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} \,.$$

Esercizio 1.10. *Calcolare la funzione integrale, di punto iniziale* 1*, della funzione*

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \textit{se} \quad x < 0 \\ 0 & \textit{se} \quad x = 0 \\ 1 & \textit{se} \quad x > 0 \,, \end{cases}$$

e discutine la derivabilità.

Si ha:

$$F_1(x) = \int_1^x \operatorname{sgn}(t) \, dt = \begin{cases} \int_1^x 1 \, dt = x - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \int_1^0 1 \, dt + \int_0^x (-1) \, dt = -1 - x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.11. *Determinare* $c \in \mathbb{R}$ *in modo che le funzioni integrali di*

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x \sin^2 x & x \in [0, \pi] \\ c & x \in]\pi, 10] \end{cases} \,,$$

siano derivabili, e, successivamente, calcolarne una.

Le funzioni integrali di una funzione sono derivabili se la funzione integranda è continua. Occorrerà dunque che c sia zero.

Successivamente il calcolo di una funzione integrale è facile: si può prendere, per esempio, quella di punto iniziale π, per la quale i calcoli sono più facili. Si ha subito $F_\pi(x) = 0$ se $x \geq \pi$, mentre se $x < \pi$ si deve calcolare

$$F_\pi(x) = \int_\pi^x \sin 2t \sin^2 t \, dt \,.$$

L'integrale proposto è facile se si osserva che $\sin 2t \sin^2 t = 2 \sin^3 t \cos t$ e che $\cos t$ è la derivata di $\sin t$.

Esercizio 1.12. *Data la funzione*

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2} (\sin t + 3) \, dt \,,$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(F^{-1})'(0)$*.*

La funzione F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(x) = \mathrm{e}^{x^2}(\sin x + 3)\,.$$

La positività della derivata ci assicura l'invertibilità di F. Per trovare la derivata dell'inversa nel punto 0, dobbiamo trovare il valore di x per cui $F(x)$ vale 0. La cosa è immediata: come per ogni funzione integrale il punto iniziale è sempre punto di annullamento della funzione. Sia ha allora

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{\mathrm{e}(\sin 1 + 3)}\,.$$

Esercizio 1.13. *Data la funzione*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,,$$

studiare la funzione

$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ove l'integrale si intende, se necessario, in senso improprio.

La funzione integranda è illimitata in prossimità di 0, mentre è continua per ogni altro valore di t, per cui l'integrale diventa improprio se l'insieme di integrazione comprende (magari come estremo) lo 0.

Data la semplicità della funzione da integrare possiamo facilmente calcolarne le primitive. Si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{|t|}} = \begin{cases} 2\sqrt{t} + c & \text{se} \quad t > 0 \\ -2\sqrt{-t} + d & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}\,.$$

Allora:

— se $x < 0$ non ci sono problemi e otteniamo:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = -2\sqrt{-x} + 2\,;$$

— se $x = 0$ dobbiamo calcolare l'integrale da -1 a 0 come integrale improprio, isolando l'estremo destro dell'integrale:

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \big(-2\sqrt{-\varepsilon} + 2\big) = 2\,;$$

— se $x > 0$ dobbiamo calcolare l'integrale da -1 a x come integrale improprio mediante due limiti indipendenti, ciascuno dei quali deve essere finito:

- il primo è l'integrale già calcolato precedentemente:

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 2;$$

– per il secondo otteniamo:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0^+}\left[2\sqrt{t}\right]_\delta^x = \lim_{\delta\to 0^+}\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{\delta}\right) = 2\sqrt{x}\,.$$

In conclusione

$$\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}+2\,.$$

La funzione $F_{-1}(x)$ ha allora la seguente espressione:

$$F_{-1}(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x}+2 & \text{se} \quad x<0 \\ 2\sqrt{x}+2 & \text{se} \quad x\geq 0\,. \end{cases}$$

La funzione F_{-1} è continua in $\mathbb{R}$. La cosa poteva essere valutata a priori se la funzione integranda fosse stata integrabile secondo Riemann, mentre, nel nostro caso, l'integrabilità vale solo in senso improprio: è per questo che è necessaria una verifica esplicita.

La funzione F_{-1} è anche derivabile per $x\neq 0$ e si ha

$$F'_{-1}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,,$$

mentre in 0 la derivata è infinita e si ha un flesso verticale ascendente.

N.B. Abitualmente, quando si parla di funzione integrale, si intende che la funzione integranda sia integrabile secondo Riemann (in particolare che sia limitata). L'estensione del concetto di funzione integrale alle funzioni integrabili in senso improprio deve essere fatto con la massima cautela.

2 Seconda parte

Esercizio 2.1. *Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua e tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}\,.$$

Provare che

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(x)\,\mathrm{d}x = a\,.$$

Vale l'implicazione inversa?

Se la funzione f è continua, per il teorema della media integrale si ha

$$\int_x^{x+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,, \quad x<c<x+1\,.$$

Se ora $x\to+\infty$, anche $c\to+\infty$ e, utilizzando ancora la continuità di f, possiamo dedurre che $f(c)\to a$.

Il viceversa non è vero. Per convincersene basta considerare una funzione periodica di minimo periodo 1 (per esempio $f(x) = \sin(2\pi x)$). Il suo integrale, in un qualunque intervallo del tipo $[x, x+1]$, cioè in un intervallo ampio quanto il periodo, ha sempre lo stesso valore (nel caso della funzione $\sin(2\pi x)$ tale valore è 1), ma la funzione, come ogni funzione periodica (non costante), non può avere limite all'infinito.

Si noti che la proprietà provata ha una semplice ed intuitiva interpretazione geometrica: se una funzione ha un asintoto orizzontale $y = a$, allora l'area di un trapezoide di base lunga 1 tende all'area di un rettangolo di altezza $|a|$ e base 1.

Esercizio 2.2. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{t}{\ln(\cos t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

La funzione integranda è infinita, per $t \to 0^+$, di ordine 1, come si può provare o con la regola di l'Hôpital, o mediante le trasformazioni che seguono:

$$\frac{t}{\ln(\cos t)} = \frac{t}{\ln(1+(\cos t - 1))}\cdot\frac{\cos t - 1}{\cos t - 1}\cdot\frac{t^2}{t^2} = \frac{\cos t - 1}{\ln(1+(\cos t - 1))}\cdot\frac{t^2}{\cos t - 1}\cdot\frac{1}{t}\,,$$

tenendo conto che i limiti dei primi due fattori sono finiti. Se ne deduce che l'integrale proposto nel testo diverge, e che il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot +\infty$. Si può, dopo opportuna trasformazione, applicare la regola di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{t}{\ln(\cos t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^1 \frac{t}{\ln(\cos t)}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x}{\ln(\cos x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\ln(\cos x)} = 0$$

Esercizio 2.3. *Discutere il problema del calcolo del limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^{f(x)} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

essendo f una funzione derivabile in $\mathbb{R}$, con derivata continua e con un massimo nel punto di ascissa 1.

Se

$$\lim_{x\to 1} f(x) = l \neq 1\,,$$

il limite dell'integrale (vedi l'es. 1.8) è finito, e dunque il limite richiesto è ∞, con opportuno segno a seconda che x tenda a 1 da destra o da sinistra e che l sia maggiore o minore di 1.

Se invece

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1\,,$$

allora il limite si presenta nella forma $\infty \cdot 0$ e si può applicare la regola di l'Hôpital, dopo aver isolato il fattore $1/(x+1)$, che tende a $1/2$, e aver riscritto opportunamente la frazione:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{f(x)} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x-1} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{-f^2(x)} f'(x)\,.$$

Ora si conclude subito, tenendo conto che il primo fattore tende a $1/e$, mentre il secondo fattore tende a zero, in quanto la funzione f ha derivata continua e ha, per ipotesi, un massimo in 1.

Esercizio 2.4. *Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che*

$$(x - x_0)f(x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia poi

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si trovi una primitiva di $|f|$.

Le ipotesi implicano che la funzione f è negativa a sinistra e positiva a destra di x_0; quindi

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se} \quad x < x_0 \\ f(x) & \text{se} \quad x >= x_0\,. \end{cases}$$

Allora una primitiva, G, di $|f|$ è:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} (-f(t))\,\mathrm{d}t & = & -F(x) & \text{se} \quad x < x_0 \\ \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & = & F(x) & \text{se} \quad x \geq x_0 \end{cases}$$