Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Sia $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Consideriamo la parte intera di a (definita come il più grande intero minore od uguale ad a la quale si denota con $[a]$)

$$n_0 := [a] \in \mathbf{N}\,.$$

Si ha che

$$n_0 \leqslant a < n_0 + 1\,.$$

Definiamo ora $m_0 = a - n_0 \in [0,1)$ e consideriamo

$$n_1 := [10 m_0] \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,.$$

Si ha che

$$n_1 \leqslant 10 m_0 \leqslant n_1 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10} \leqslant m_0 \leqslant \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}$$

e quindi, per definizione di m_0,

$$n_0 + \frac{n_1}{10} \leqslant a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}\,.$$

Se ora definiamo

$$m_1 = m_0 - \frac{n_1}{10} = a - n_0 - \frac{n_1}{10} \in \Big[0, \frac{1}{10}\Big)$$

e consideriamo

$$n_2 = [10^2 m_1] \in \{0,1,2,\ldots 9\}\,.$$

otteniamo

$$n_2 \leqslant 10^2 m_1 \leqslant n_2 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10^2} \leqslant m_1 \leqslant \frac{n_1}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

e quindi infine

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leqslant a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\,.$$

Continuando a ragionare in modo analogo possiamo costruire due successioni

$$\begin{aligned} A_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \\ B_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \end{aligned} \qquad \text{con } n_k \in \{0,1,2,\ldots 9\}$$

con la proprietà che

$$A_k \leqslant a < B_k\,. \tag{1}$$

Si considerino gli insiemi $S = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ e $T = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$. Da (1) si deduce che S è limitato superiormente, per cui ammette estremo superiore finito. Proviamo che l'estremo superiore di S è a.
Fissato $\epsilon > 0$ dobbiamo trovare un $k \in \mathbf{N}$ tale che

$$A_k > a - \epsilon\,.$$

Ma ciò è equivalente a

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < \epsilon\,.$$

Ma da (1) deduciamo che

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < \frac{1}{10^k}$$

quindi è chiaro che è sufficiente scegliere k in modo tale che valga $1/10^k \leqslant \epsilon$ ($k \geqslant \log_{10} \epsilon^{-1}$).
In modo analogo si prova che $\inf T = a$.
Se $a < 0$ si può considerare, ad esempio, la decomposizione di $-a$ e poi cambiare di segno.

Osservazioni - Come prima cosa osserviamo che, per ogni numero reale a, abbiamo costruito una successione (una particolare successione) di numeri *razionali* che approssimano il numero a. Questo mostra che $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$ (vedi dispense di teoria). Si possono costruire infinite successioni di razionali approssimanti il numero a, ma quelle che abbiamo scelto sono quelle che usualmente usiamo (approssimazione decimale per difetto e approssimazione decimale per eccesso).
Per esercizio costruire un'approssimazione in base 8 anziché in base 10.
Altra cosa da osservare è che ogni numero, nella rappresentazione decimale, ha solo un numero finito di n_k non nulli è un numero razionale. Non è vero il viceversa!! Ad esempio i numeri la cui parte decimale è periodica ($a - [a]$).
Si consideri ad esempio il numero

$$a = 1,3232323232\ldots\,.$$

La parte decimale ha periodo 2. Moltiplico allora per 10^2 (l'esponenete è la lunghezza del periodo) e ottengo

$$10^2 a = 100a = 132,32323232\ldots\,.$$

Sottraendo a a $100a$ si ottiene

$$99a = 131 \qquad \text{da cui} \qquad a = \frac{131}{99}\,.$$

Si vedano a questo proposito anche gli esercizi **PIPPO** e **PLUTO**.

Questo che segue è l'esercizio **PLUTO**.
Calcolare

$$1 + 32\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}\,.$$

Si noti che ciò equivale a calcolare la somma

$$1 + 32\Big(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots\Big)$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}$ è una serie geometrica di ragione $1/100$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} = \frac{1/10^2}{1 - 1/10^2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{99}\,.$$

Per cui (si confronti il risultato con l'esercizio **PAPERINO** = Osservazione dopo rappr. decimale)

$$1 + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} = \frac{131}{99} \, .$$

Questo che segue è l'esercizio **PIPPO**.
Calcolare $0,333333\ldots = 0,\overline{3}$.
Il numero $0,\overline{3}$ è $1/3$. Infatti

$$0,\overline{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \frac{1/10}{1 - 1/10} = \frac{1}{3} \, .$$