

CAPITOLO 5

SERIE NUMERICHE

In questo, che pure è il capitolo conclusivo del corso di Analisi Matematica I, trattiamo del problema che invece è forse il più semplice da porre fra quelli affrontati nel corso, cioè quello di associare ad una successione (infinita) di numeri reali una procedura che generalizzi il calcolo della somma così come si esegue su un numero finito di termini. Ovviamente, non è possibile neanche in linea di principio “sommare fra loro infiniti numeri” e quindi bisognerà fare ricorso ancora una volta al concetto di limite. In particolare, sarà evidente lo stretto rapporto che esiste fra le serie numeriche e gli integrali impropri: vedremo infatti che si parla di convergenza (semplice) e convergenza assoluta, e valgono criteri di confronto molto simili a quelli visti per gli integrali impropri nel Capitolo 4. Iniziamo, come sempre, col definire l’oggetto del nostro discorso, cioè le serie numeriche. Studieremo nel corso di Analisi matematica II il caso più generale delle serie di funzioni.

5.1 Serie, convergenza, convergenza assoluta

Definizione 5.1 *Data la successione reale (a_k) , si dice serie di termine generale a_k l’operazione che associa alla successione (a_k) la successione (s_n) definita per ogni $n \in \mathbf{N}$ da*

$$(5.1.1) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

che si dice successione delle somme parziali della serie. La serie di termine generale a_k si denota con la scrittura

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Notiamo che la scrittura introdotta per denotare le serie, facendo uso del simbolo di sommatoria, evoca il problema descritto all’inizio, ma *non denota una somma*.

Osservazione 5.2 La successione delle somme parziali si dice anche *successione delle ridotte*, e si può definire per ricorrenza così

$$(5.1.2) \quad s_0 = a_0, \quad s_n = s_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1.$$

Vediamo ora qual è la proprietà più rilevante delle serie.

Definizione 5.3 Si dice che la serie di termine generale a_k è convergente se esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

In caso affermativo, il valore di tale limite si dice *somma della serie*.

Vediamo una prima proprietà delle serie convergenti; intuitivamente, è naturale aspettarsi che, se una serie converge, il termine generale debba diventare sempre più piccolo. Quest'idea è formalizzata nel seguente enunciato.

Proposizione 5.4 Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente allora $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

DIM. Per definizione, dire che la serie data converge equivale a dire che la successione (s_n) delle ridotte converge; ma allora, detta S la somma della serie, si ha

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1},$$

da cui, essendo il limite finito,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

QED

La proposizione precedente esprime una condizione solo *necessaria* per la convergenza di una serie. Essa non è però sufficiente, come mostra l'esempio 5.11.

Osservazioni 5.5

1. Notiamo che la condizione di convergenza per la serie di termine generale a_k è l'esistenza del limite di un'altra successione, quella delle ridotte (s_n) .
2. Il nome *somma* riservato al limite delle somme parziali, quando esiste finito, evoca di nuovo l'idea di generalizzare la somma tra numeri. Come abbiamo visto, in realtà non si tratta di una *somma* (cosa impossibile, come già osservato) ma di un *limite*.
3. Se la serie di termine generale a_k non è convergente, può accadere che il limite delle somme parziali sia infinito o non esista. Si dirà in tal caso che la serie è
 - *positivamente divergente* se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$;
 - *negativamente divergente* se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$;
 - *indeterminata* se il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ non esiste.

4. Se la serie di termine generale a_k è convergente, la sua somma si denota con

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

e lo stesso simbolo si usa anche per indicare che la serie è divergente positivamente, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

o negativamente, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty.$$

Tale simbolo assume quindi due significati diversi (la serie o la sua somma), ma si vedrà che questo non genera alcuna confusione; infatti, assegnando una serie si pone naturalmente il problema di sapere se essa sia convergente o no, e, in caso affermativo, di determinarne la somma.

5. Si dice *carattere* della serie la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.
6. Se si modifica un numero *finito* di termini della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non se ne altera il carattere. In altri termini, due serie che differiscono per un numero finito di termini hanno lo stesso carattere. Naturalmente, esse *non hanno in generale la stessa somma*.
7. Dati una serie $\sum_k a_k$ e un numero reale $c \neq 0$, si può considerare la serie $\sum_k (ca_k)$. Ovviamente, questa ha lo stesso carattere della $\sum_k a_k$ e, in caso di convergenza, la sua somma è il prodotto di c per la somma della serie $\sum_k a_k$. In particolare, studieremo le serie a termini positivi, ma in realtà è chiaro che la classe a cui si riferiranno tutti i risultati è quella delle *serie a termini di segno costante* e non importa se tale segno sia $+$ o $-$.
8. Il discorso è più delicato per le serie che sono *somma di due serie*. Per il momento, quello che possiamo dire è che se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ è convergente, allora anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ è convergente, e questo segue subito dal teorema sulla somma dei limiti applicato alle successioni delle ridotte. Invece, se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ *non* è convergente, allora la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ *non può convergere*. Infatti, applicando il risultato precedente alle serie $\sum_k (a_k + b_k)$ e $\sum_k (-a_k)$ dedurremmo che $\sum_k b_k$ converge, che è contrario all'ipotesi.

Il seguente risultato segue subito dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

Teorema 5.6 (Criterio di Cauchy per le serie) *La convergenza della serie $\sum_k a_k$ è equivalente alla validità della seguente condizione di Cauchy:*

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| < \varepsilon$ per ogni $p \in \mathbf{N}$.

DIM. Ricordando il criterio di Cauchy per le successioni ??, basta applicarlo alla successione (s_n) delle ridotte, e si ha che (s_n) converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n > \nu$ implica $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ per ogni $p \in \mathbf{N}$. A questo punto, resta solo da osservare che

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|.$$

QED

Studiamo in dettaglio un esempio molto importante che sarà di guida in numerose applicazioni.

Esempio 5.7 Per ogni $x \in \mathbf{R}$, consideriamo la serie di termine generale x^k , cioè la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k;$$

essa è detta *serie geometrica di ragione x*. È uno dei (pochi) casi in cui si riescono a calcolare esplicitamente, al variare di x , le somme parziali s_n . Anzi, è in realtà un lavoro già fatto: nell'esempio ?? abbiamo ottenuto la formula

$$(5.1.3) \quad s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1,$$

(per $x = 1$ è ovvio che $s_n = n + 1$ e la serie è positivamente divergente). Possiamo allora facilmente calcolare il limite della successione (s_n) e determinare il carattere della serie geometrica. Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \begin{cases} \text{non esiste} & x \leq -1 \\ = \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ = +\infty & x \geq 1 \end{cases}$$

e quindi la serie geometrica di ragione x converge se e solo se $-1 < x < 1$, diverge positivamente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x \leq -1$.

Come nel caso degli integrali impropri, esiste una nozione di *convergenza assoluta*, più forte della convergenza semplice.

Definizione 5.8 (Convergenza assoluta) Si dice che la serie $\sum_k a_k$ converge assolutamente se la serie $\sum_k |a_k|$ converge.

Come nel caso degli integrali impropri (vedi Osservazione 4.36), la convergenza assoluta implica quella semplice.

Proposizione 5.9 *Se $\sum_k |a_k|$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge.*

DIM. Usiamo il criterio di convergenza di Cauchy. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} |a_k| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

Poiché per la disegualianza triangolare (1.1.4) risulta

$$\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| \leq \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} |a_k|$$

in corrispondenza dello stesso ν si ha pure

$$\left| \sum_{k=\nu+1}^{\nu+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbf{N}$$

e la tesi segue usando l'altra implicazione del criterio di Cauchy. $\square$

Vedremo nell'Osservazione 5.27.4 che invece esistono serie che convergono semplicemente ma non assolutamente.

5.2 Serie a termini positivi

Tra le serie, hanno un posto di rilievo quelle i cui termini hanno segno costante. Per fissare le idee (vedi Osservazione 5.5.7), supponiamo che i termini della serie siano tutti positivi. Esse si chiamano per l'appunto *serie a termini positivi*. Tali serie sono particolarmente importanti anche in relazione alla proprietà espressa dalla Proposizione 5.9: infatti, studiare la convergenza assoluta di una qualunque serie $\sum_k a_k$ consiste nello studiare la convergenza della serie a termini positivi $\sum_k |a_k|$ e, se la serie risulta assolutamente convergente, resta provata anche la convergenza semplice, sicché il problema è completamente risolto. Inoltre, per le serie a termini positivi esistono numerosi criteri di convergenza. Una prima loro proprietà è la seguente.

Proposizione 5.10 *Una serie a termini positivi può essere convergente o positivamente divergente, ma non è mai indeterminata. In particolare, una serie a termini positivi è convergente se e solo se la successione delle sue ridotte è limitata.*

DIM. Data la serie $\sum_k a_k$, se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ allora la successione s_n delle ridotte è monotona crescente, perché

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

e quindi, per il Teorema fondamentale delle successioni monotone (Teorema ??), ammette limite, pari a $\sup_n s_n$. Segue che la serie data non può essere indeterminata, ed è positivamente divergente se $\sup_n s_n = +\infty$, è convergente se $\sup_n s_n$ è finito, cioè se e solo se la successione delle ridotte è limitata. $\square$

Studiamo ora una serie di fondamentale importanza, detta *serie armonica*. In particolare, essa è una serie che non converge, malgrado il suo termine generale tenda a 0. Questo, come già sottolineato, mostra che la condizione nella Proposizione 5.4 è *solo necessaria* per la convergenza di una serie, ma non sufficiente.

Esempio 5.11 (Serie armonica) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

detta *serie armonica*, è positivamente divergente. Infatti, essendo una serie a termini positivi, per la Proposizione 5.10 esiste il limite della successione delle ridotte,

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Proviamo che $S = +\infty$. In accordo con l'Osservazione ??, possiamo conoscere S calcolando il limite di una qualsiasi successione estratta da (s_n) . Scegliamo l'estratta s_{2^k} , cioè la sottosuccessione della (s_n) ottenuta arrestandosi di volta in volta quando l'indice è una potenza di 2. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1}\frac{1}{2^j} \\ &= 1 + k\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Per quanto detto, l'intera successione (s_n) delle ridotte tende a $+\infty$, e quindi la serie armonica diverge positivamente.

Per le serie a termini positivi vale il seguente criterio di confronto.

Teorema 5.12 (Criterio di confronto) Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, e supponiamo che esista $\nu > 0$ tale che $a_k \leq b_k$ per ogni $k > \nu$. Allora:

1. se $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;
2. se $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge.

DIM. Poiché, come abbiamo visto, la convergenza di una serie non cambia modificando un numero finito di termini, possiamo supporre che $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ e non solo per $k \geq \nu$. Chiamando (s_n) e (t_n) le successioni delle ridotte di $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ rispettivamente, ponendo cioè

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^n b_k,$$

entrambe le successioni (s_n) e (t_n) sono crescenti e risulta evidentemente che $s_n \leq t_n$ per ogni n . La tesi allora segue dalla Proposizione 5.10.

Infatti, se $\sum_k b_k$ converge, la successione (t_n) è limitata, quindi lo è anche la (s_n) e la serie $\sum_k a_k$ converge e questo prova 1.

Viceversa, se $\sum_k a_k$ diverge, allora (per definizione) la successione (s_n) diverge, ed ugualmente diverge la (t_n) . Segue che $\sum_k b_k$ diverge e questo prova 2. $\square$

Una semplice applicazione della teoria vista fin qui, basata sulla serie geometrica, è nel seguente esempio.

Esempio 5.13 (Sviluppi decimali) Abbiamo tutti familiarità con la rappresentazione decimale (anche con infinite cifre, si pensi a numeri come $\sqrt{2}$, e o π) dei numeri reali, di cui la conoscenza delle serie numeriche dà una completa spiegazione. Un numero reale x si può rappresentare in forma decimale così:

$$(5.2.4) \quad x = n, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$$

ove $n \in \mathbf{Z}$ è la *parte intera*, le cifre a_k , numeri interi compresi tra 0 e 9, costituiscono la *parte decimale* di x . La scrittura (5.2.4) ha il significato dell'uguaglianza

$$(5.2.5) \quad x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k},$$

che è coerente con il linguaggio usuale, secondo cui a_1 sono i *decimi*, a_2 i *centesimi*, a_3 i *millesimi*, eccetera. Notiamo che siccome $a_k \leq 9$ per ogni k , risulta $\frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$. Quest'ultimo è il termine generale della serie geometrica di ragione $\frac{1}{10} < 1$ (moltiplicato per 9), che converge. Per confronto, *tutte* le serie del tipo (5.2.5) che danno gli sviluppi decimali convergono. Come applicazione, si possono dedurre senza difficoltà le proprietà degli sviluppi decimali *periodici* in relazione alla rappresentazione frazionaria. Il più semplice esempio è l'uguaglianza $1 = 0, \overline{9}$, che si ottiene sommando la serie corrispondente:

$$0, \overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = 1.$$

In particolare, questo mostra che lo sviluppo decimale in generale non è unico. Più in generale, la stessa teoria si applica agli *sviluppi in base b qualunque*: dato un numero

naturale b (i più usati in questo contesto sono, oltre a 10, le potenze di 2), la corrispondente rappresentazione in base b è data dalla serie

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k},$$

dove stavolta le cifre a_k sono interi compresi tra 0 e $b-1$ e la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{b} < 1$.

Osservazione 5.14 Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esistano $\nu > 0$ e due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq c_2$$

per $k \geq \nu$. Allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere.

Infatti, se $\sum_k a_k$ diverge o $\sum_k b_k$ converge, la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle disuguaglianze

$$a_k \leq c_2 b_k,$$

mentre se $\sum_k a_k$ converge o $\sum_k b_k$ diverge la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle disuguaglianze

$$c_1 b_k \leq a_k.$$

Un risultato che si deduce facilmente dal criterio di confronto è il seguente criterio, basato sul calcolo di un limite.

Teorema 5.15 (Criterio di confronto asintotico) *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esista*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = c.$$

Allora:

1. *se $0 < c < +\infty$ allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere;*
2. *se $c = 0$ e $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;*
3. *se $c = 0$ e $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge;*
4. *se $c = +\infty$ e $\sum_k a_k$ converge allora anche $\sum_k b_k$ converge;*
5. *se $c = +\infty$ e $\sum_k b_k$ diverge allora anche $\sum_k a_k$ diverge.*

DIM. Per il punto 1, osserviamo che, usando la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{c}{2}$, per k abbastanza grande risulta

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}c$$

e quindi

$$\frac{c}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}c b_k$$

e il risultato segue dall'osservazione 5.14.

Per i punti 2 e 3, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \leq \varepsilon b_k$$

e la tesi segue dal Criterio di confronto.

Analogamente, per i punti 4 e 5, fissato un $M > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \geq M b_k$$

e la tesi segue ancora dal Criterio di confronto. **QED**

Come accennato all'inizio, ci sono molte somiglianze tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie, tanto che sotto opportune condizioni lo studio di un integrale generalizzato e di una serie sono equivalenti, come mostra il seguente criterio. Esso è particolarmente efficace perché, mentre è in generale molto difficile trovare una formula esplicita per le ridotte di una serie, è spesso possibile determinare le primitive di una funzione usando il teorema fondamentale del Calcolo.

Teorema 5.16 *Sia $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ una funzione positiva e decrescente. Allora la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

converge se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

converge.

DIM. Siccome f è decrescente, risulta $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ per ogni $x \in [k, k+1]$ ed inoltre f è integrabile in ogni intervallo $[0, x]$, $x > 0$. Poiché f è positiva, la funzione

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

è monotona crescente e quindi esiste (finito o no) il

$$(5.2.6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt,$$

che possiamo calcolare per valori interi di x considerando la successione $(\int_0^n f(t)dt)$. Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ consideriamo la suddivisione $P_n = \{0, 1, \dots, n-1, n\}$ dell'intervallo $[0, n]$ e le relative somme integrali inferiore e superiore, detta (s_n) la successione delle ridotte della serie $\sum_k f(k)$, risulta

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^n f(k) = s_n - f(0) \leq \int_0^n f(x)dx \leq S(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = s_{n-1},$$

sicché il limite in (5.2.6) è finito se e solo se la successione (s_n) converge. $\boxed{QED}$

Vediamo come il precedente criterio si possa applicare in due casi particolari importanti.

Esempi 5.17 In quest'esempio discutiamo due famiglie di serie che sono utili anche come riferimento per i teoremi di confronto.

1. Consideriamo la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora la condizione necessaria 5.4 è banalmente violata e la serie non converge. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$. In particolare, ritroviamo il risultato già provato nel caso $\alpha = 1$ nell'esempio 5.11.

2. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^\alpha k}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora vale la relazione $\frac{1}{k \log^\alpha k} \geq \frac{1}{k}$ e quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$ e concludere, in base all'esempio 4.38, che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.

Come nel caso degli integrali impropri (vedi Corollario 4.41), si può dare un criterio di convergenza basato sul confronto con le serie armoniche generalizzate.

Corollario 5.18 *Data la serie a termini positivi $\sum_k a_k$, se esiste finito*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\alpha a_k = c > 0$$

allora $\sum_k a_k$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

DIM. Il criterio di confronto asintotico (Teorema 5.15) implica che $\sum_k a_k$ e $\sum_k k^{-\alpha}$ hanno lo stesso carattere, quindi il risultato segue subito usando i risultati dell'Esempio 5.17. $\boxed{QED}$

Presentiamo ora due utili criteri di convergenza, basati sul confronto con la serie geometrica.

Teorema 5.19 (Criterio della radice) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tali che $\sqrt[k]{a_k} \leq h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ per infiniti valori di k allora la serie non converge.*

DIM. Dall'ipotesi segue immediatamente che $a_k \leq h^k$ e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Viceversa, se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ per infiniti valori di k allora la condizione $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non converge. **QED**

Teorema 5.20 (Criterio del rapporto) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece esiste $\nu > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ diverge.*

DIM. Supponiamo per semplicità che sia $\nu = 0$. Dall'ipotesi segue la diseuguaglianza

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq h^k a_0$$

e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Se invece $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per ogni k allora $a_{k+1} \geq a_k$ ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere. **QED**

I due precedenti criteri hanno una versione che è spesso utile ed è basata sul calcolo di un limite, che può risultare più semplice della ricerca di un maggiorante.

Corollario 5.21 *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. *se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;*
2. *se $\ell > 1$ allora la serie diverge;*
3. *se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.*

DIM. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\sqrt[k]{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 5.19.

Se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ allora $a_k \geq 1$ per ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere.

Infine, per provare il punto 3 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e seconda converge. **QED**

Corollario 5.22 Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;
2. se $\ell > 1$ allora la serie diverge;
3. se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.

DIM. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 5.20.

Se $\ell \geq 1$ allora $a_k \geq a_0 > 0$ per ogni k , sicché la condizione necessaria $a_k \rightarrow 0$ è violata e la serie non può convergere.

Infine, per provare il punto 3, come per il Corollario 5.21 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e seconda converge. **QED**

Osservazione 5.23 Sia data la successione (a_k) , con $a_k > 0$ per ogni k . Si può dimostrare il seguente risultato:

Se esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

allora esiste anche il $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ e vale ℓ .

Di conseguenza, se si deve studiare la serie $\sum_k a_k$ e il criterio del rapporto sotto forma di limite dà $\ell = 1$, è inutile ritentare col criterio della radice, che non può che fornire lo stesso risultato. D'altra parte, segnaliamo che può esistere il limite della radice senza che esista quello del rapporto.

Presentiamo un ultimo criterio di convergenza per le serie a termini positivi, noto come *criterio di condensazione* (in realtà ne esistono molti altri che tralasciamo), di cui vedremo l'utilità nell'esempio 5.25. In un certo senso, è la forma astratta del ragionamento seguito nell'esempio 5.11.

Teorema 5.24 Sia (a_k) una successione decrescente di numeri positivi. Allora le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k}$$

hanno lo stesso carattere.

Non riportiamo la dimostrazione del criterio, ma lo applichiamo nell'esempio che segue.

Esempio 5.25

1. Consideriamo la serie armonica $\sum 1/k$ e applichiamo il criterio di condensazione. Risulta che essa converge se e solo se la serie

$$\sum_k 2^{k-1} \frac{1}{2^k} = \sum \frac{1}{2}$$

converge. Poiché quest'ultima chiaramente non converge (il suo termine generale non tende a 0), non converge, e non converge neanche la serie armonica.

2. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

Applicando il Criterio di condensazione, se ne può determinare il carattere studiando la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{(k \log 2)^{k \log 2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k^{\log 2} (\log 2)^{\log 2}} \right)^k$$

che converge per il criterio della radice.

5.3 Serie a termini di segno variabile

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso vari criteri di convergenza per serie a termini positivi, che, come abbiamo già osservato, sono anche criteri di convergenza assoluta per serie a termini di segno qualunque. Forse val la pena di spiegare che per “serie a termini di segno qualunque” si intendono serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k a_k$$

dove $a_k > 0$ per ogni k e gli ε_k possono assumere i valori 1 e -1 con *qualunque* alternanza di segno. Per tali serie non esiste una teoria, né esistono criteri di convergenza *semplice*. Pertanto, tutto ciò che si può fare è studiare caso per caso ciascuna singola serie (il che esula dagli scopi di un corso introduttivo come questo) oppure studiare direttamente la convergenza assoluta con i metodi del paragrafo precedente, ben sapendo che se la serie non è assolutamente convergente resta aperto il problema di stabilire se sia o no semplicemente convergente.

Un caso particolare delle serie a termini di segno variabile è quello delle *serie a segni alterni*, cioè il caso in cui $\varepsilon_k = (-1)^k$. Come dice la locuzione appena introdotta, sono serie a termini di segno variabile, in cui però la legge della variazione di segno ε_k non è arbitraria, come nel caso generale, ma segue una regola semplicissima, che consiste nell'alternarsi di segni $+$ e $-$. Per queste serie esiste un semplice criterio di convergenza, ma prima di presentarlo ci sembra opportuno osservare che, malgrado siano di un tipo particolarissimo, si incontrano molto frequentemente nelle applicazioni (per esempio, come si vedrà, in connessione con le serie di Fourier).

Teorema 5.26 (Criterio di Leibniz) *Sia (a_k) una successione di numeri strettamente positivi, e supponiamo che*

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$
2. $a_k \geq a_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Allora la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

è semplicemente convergente. Inoltre, se la serie è convergente, detta S la sua somma, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(5.3.7) \quad \left| S - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

DIM. Consideriamo le due successioni estratte dalla successione (s_n) delle somme parziali della serie corrispondenti agli indici pari e dispari rispettivamente, e notiamo che sono monotone a causa della decrescenza della successione (a_k) :

$$\begin{aligned} s_{2p} &= \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k a_k - a_{2p-1} + a_{2p} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k a_k = s_{2p-2} \\ s_{2p+1} &= \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k a_k + a_{2p} - a_{2p+1} \\ &\geq \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k a_k = s_{2p-1} \end{aligned}$$

Per il Teorema fondamentale sulle successioni monotone entrambe le estratte (s_{2p}) e (s_{2p+1}) ammettono limite, siano S_p ed S_d rispettivamente. Siccome l'unione degli indici delle due estratte è tutto l'insieme dei numeri naturali, se proviamo che i due limiti sono finiti e che $S_p = S_d$, risulterà provata la convergenza dell'intera successione (s_n) e quindi della serie. Iniziamo a vedere che i due limiti sono finiti. Siccome s_{2p} è decrescente ed s_{2p+1} è crescente, basta trovare un minorante di s_{2p} e un maggiorante di s_{2p+1} ; risulta

$$\begin{aligned} s_{2p} &= s_{2p-1} + a_{2p} \geq s_{2p-1} \geq s_1 \\ s_{2p+1} &= s_{2p} - a_{2p+1} \leq s_{2p} \leq s_0 = a_0 \end{aligned}$$

e quindi sia S_p che S_d sono finiti. D'altra parte, per il teorema sulla somma dei limiti e l'ipotesi 1:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = S_d - S_p$$

da cui segue evidentemente che $S_p = S_d$ e che la serie converge. Detta allora S la sua somma, si ha

$$S = S_p = S_d = \inf_p s_{2p} = \sup_p s_{2p+1}$$

e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$s_{2p+1} = s_{2p} - a_{2p+1} \leq S \leq s_{2p} \quad \implies \quad s_{2p} - S \leq a_{2p+1}$$

e analogamente

$$s_{2p+1} \leq S \leq s_{2p+2} = s_{2p+1} + a_{2p+2} \quad \implies \quad S - s_{2p+1} \leq a_{2p+2},$$

sicché in ogni caso si ha (5.3.7).

QED

Osservazioni 5.27 1. Naturalmente, la scelta che i termini pari siano positivi e quelli dispari negativi è una delle due possibili, l'altra essendo ovviamente del tutto equivalente. Inoltre, osserviamo che come al solito le condizioni 1 e 2 del Criterio di Leibniz debbono essere verificate *da un certo indice in poi*, per poter applicare il criterio stesso, e non necessariamente *per tutti gli indici*.

2. L'errore più frequente nell'applicazione del criterio di Leibniz è l'omissione della verifica che la successione (a_k) sia decrescente. Questa verifica è invece essenziale, dal momento che, ovviamente, esistono successioni positive infinitesime *non decrescenti*. Per avere un esempio esplicito, consideriamo la successione (infinitesima ma non decrescente)

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \frac{1}{k^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per l'Osservazione 5.5.8, la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ non può convergere, perché si può scrivere come differenza tra la serie $\sum_k \frac{1}{k}$, che diverge, e la serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$, che converge.

3. Si possono aggiungere alcune interessanti considerazioni generali all'esempio precedente (vedi anche il Teorema 5.28 seguente): se la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ converge semplicemente ma *non* converge assolutamente, allora né la serie $\sum_k a_{2k}$ dei termini positivi né la serie $\sum_k a_{2k+1}$ dei termini negativi possono convergere. Infatti, una sola di queste ultime non può convergere (l'argomento per provare questa affermazione è quello dell'esempio precedente), e se convergessero entrambe si avrebbe convergenza assoluta della serie di partenza.
4. Ora che abbiamo un criterio di convergenza semplice, possiamo vedere un esempio di serie semplicemente convergente che non è assolutamente convergente. Basta considerare la *serie armonica a segni alterni* $\sum_k (-1)^k \frac{1}{k}$, che converge semplicemente

per il criterio di Leibniz, me non converge assolutamente, come abbiamo già visto. Possiamo mettere in relazione quest'esempio con l'esempio 4.44 relativo agli integrali impropri; grazie al criterio di Leibniz, la trattazione relativa alle serie è molto più semplice.

Terminiamo il capitolo con delle considerazioni che dovrebbero far capire quanta distanza ci sia tra le serie e le somme finite. Una delle proprietà più “ovvie” delle somme finite è la proprietà commutativa. È naturale domandarsi se essa valga anche per le serie. Per formulare correttamente il problema bisogna introdurre il concetto di *permutazione dei termini di una serie*. Date la serie $\sum_k a_k$ ed una funzione bigettiva $\pi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (permutazione), si dice *serie ottenuta permutando i termini di $\sum_k a_k$ secondo π* la serie $\sum_k a_{\pi(k)}$. Notiamo che i valori assunti dalla successione $(a_{\pi(k)})$ sono *gli stessi di (a_k)* , e *vengono assunti lo stesso numero di volte*, per cui se avessimo a che fare con una somma finita passare da $\sum_k a_k$ a $\sum_k a_{\pi(k)}$ si riduce a “cambiare l'ordine degli addendi”, ed è ben noto che in tal caso “la somma non cambia”. Per le serie infinite le cose vanno in modo completamente diverso, a meno che non si abbia convergenza assoluta.

Teorema 5.28 *Sia (a_k) una successione convergente a 0. Allora:*

- (i) *se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente e la sua somma è S , allora per ogni permutazione π la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ converge assolutamente ed ha per somma S .*
- (ii) *se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge assolutamente, allora nessuna serie permutata converge assolutamente, ed inoltre per ogni $S \in \mathbf{R}$ esiste una permutazione π tale che la serie permutata $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ converga (semplicemente) ad S .*

Non presentiamo la dimostrazione di questo risultato, che per altro non richiede strumenti che vadano oltre la presente trattazione, ma ci limitiamo a sottolineare ancora la differenza tra le somme finite e le serie non assolutamente convergenti: queste, cambiando l'ordine degli addendi, possono dare *qualunque* somma!