1) Il numero e.
Si consideri $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, e si dimostri che la successione

$$\alpha_n(x) = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$$

è definitivamente strettamente crescente (suggerimento: usare la disuguaglianza delle medie, **Esercizio n. ???)**. Si studino poi in particolare le due successioni $\alpha_n(1)$ e $\alpha_n(-1)$.

Soluzione
È sufficiente considerare $n+1$ numeri $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ definiti da

$$x_1 = \ldots = x_n = 1 + \frac{x}{n}\,,\ x_{n+1} = 1\,.$$

Poiché la media geometrica di k numeri positivi è minore della loro media aritmetica, se $1 + \frac{x}{n} > 0$, e cioè $n > -x$, scrivendo le due medie per $x_1, \dots x_{n+1}$ si ottiene

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 + \frac{x}{n}\Big) \cdot 1 < \frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{x}{n} + \ldots + 1 + \frac{x}{n} + 1\Big)$$

e cioè

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n < \Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{n+1}\,.$$

Si noti che la disguaglianza è stretta perché $x_1, \dots x_{n+1}$ non sono tutti uguali.
Concludendo: a_n è crescente per ogni $x > 0$ ed è definitivamente crescente per ogni $x < 0$ (crescente per $n > -x$).
Si considerino ora due casi particolari: $x = 1$ e $x = -1$. Si ottiene allora che le due successioni $\alpha_n(1) = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $\alpha_n(-1) = (1 - \frac{1}{n})^n$ sono crescenti e quindi

$$\alpha_n(1) = a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \text{ crescente}\,,$$
$$\frac{1}{\alpha_n(-1)} = b_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{-n} \text{ decrescente}\,.$$

Di conseguenza esistono $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} b_n$.
Vediamo che vale $a_n \leqslant b_k$ per ogni $n, k \in \mathbf{N}$. Infatti, supponendo che $n \leqslant k$, si ha dalla monotonia di a_n

$$a_n \frac{1}{b_k} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \Big(\frac{k-1}{k}\Big)^k \leqslant \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k \Big(\frac{k-1}{k}\Big)^k = \Big(\frac{k^2-1}{k^2}\Big)^k < 1$$

e quindi $a_n < b_k$. Analogamente si prova la disuguaglianza nel caso in cui $n \geqslant k$. Da ciò in particolare concludiamo che $A = \{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ è limitato superiormente (dai b_k) e $B = \{b_n | n \in \mathbf{N}\}$ è limitato inferiormente (dagli a_n). Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ esistono *finiti*. Inoltre sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Si pone

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Tale numero è compreso tra 2 e 3 (infatti $a_1 < e < b_6$ e $a_1 = 2$ e b_6 è circa $2,98$). Vediamo quant'è il limite di b_n:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n}\right)^{-n} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato due sucessioni, una crescente ed una decrescente, convergenti allo stesso limite e.
Tornando a $\alpha_n(1) = a_n$ e $\alpha_n(-1) = b_n^{-1}$ possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\,.$$

In generale vale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}\,.$$

1,5) Ancora sulla base naturale e.
Supponiamo che un capitale C venga investito per un anno. È più conveniente ricevere un interesse j dopo un anno oppure un interesse $j/2$ ogni sei mesi?

Soluzione:
Dopo un anno si ha che il capitale è $C + jC = C(1 + j$ se l'interesse viene dato tutto assieme dopo un anno. Se invece dopo sei mesi si ottiene un interesse di $j/2$ si ha alla scadenza dei sei mesi un capitale pari a

$$C + \frac{j}{2}C = C(1 + j/2)$$

e dopo altri sei mesi

$$[C(1 + j/2)] + [C(1 + j/2)]j/2 = C\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2 .$$

Si vede facilmente che $1+j < (1+j/2)^2$. Se l'interesse maturato venisse pagato, e quindi reinvestito assieme al capitale iniziale. ogni mese si otterrebbe a fine anno

$$C\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12} .$$

Analogamente, se l'interesse venisse pagato giornalmente, reinvestendo dopo un anno si avrebbe

$$C\left(1 + \frac{j}{365}\right)^{365} .$$

Se l'accredito fosse *istantaneo*, il capitale maturerebbe diventando dopo un anno

$$Ce^j .$$

2) Dire quale, fra le due quantità, è la maggiore:

$$n^{n+1} \text{ e } (n+1)^n \, .$$

Soluzione.
Valutando il rapporto fra le due quantità si ottiene

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$$

quindi $n^{n+1} < (n+1)^n$ per $n \geqslant 3$. Per $n = 1, 2$ si verifica facilmente che è vero il contrario.

3) Calcolare i limiti $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$ con $a > 1$.
Soluzione
i) Dimostriamo prima che $a_n = \frac{\log n}{n}$ è decrescente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{\log n}{n} = \\ &= \frac{\log(n+1)^n - \log n^{n+1}}{(n+1)n} = \\ &= \frac{1}{(n+1)n} \log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \end{aligned}$$

e **dall'esercizio precedente** sappiamo che $(n+1)^n < n^{n+1}$ per ogni $n \geqslant 3$, per cui la quantità $a_{n+1} - a_n$ è negativa.
ii) Poiché a_n è decrescente e positiva si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} a_n = l \geqslant 0\,.$$

Valutiamo ora a_{n^2}:

$$a_{n^2} = \frac{\log n^2}{n^2} = \frac{2}{n} a_n\,. \tag{1}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si ha anche $\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = l$ e quindi passando al limite in (1) si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \lim_{n\to\infty} a_n$$

da cui

$$l = 0 \cdot l$$

e quindi infine $l = 0$.
Il secondo limite può essere calcolato in modo analogo e mostrare che è $+\infty$.

4) Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots\frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$.

b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\frac{1}{(2n)^2}\right]$.

c) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$.

Soluzione.

a) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$a_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \to +\infty\,.$$

b) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$0 \leqslant a_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{(n+1)^2} \to 0\,.$$

Per il teorema dei due carabinieri si conclude.

c) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Per il teorema dei due carabinieri si conclude che il limite è 1.

5) Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1$$

Senza soluzione

6) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n}$.
Soluzione
Raccogliendo 7^n all'interno della radice si ottiene che

$$\sqrt[n]{3^n + 7^n} = 7\,\sqrt[n]{1 + (3/7)^n} \to 7\,.$$

Successioni per ricorrenza.
Sono successioni definite tramite una funzione f nel modo seguente:

$$\text{noto } a_0 \text{ si definisce } a_{n+1} = f(a_n)\,.$$

Si osservi che se f è una funzione crescente allora a_n è monotona. È sufficiente verificare se a_1 è maggiore o minore di a_0. Infatti se $a_1 > a_0$ si ha, dalla crescenza di f, che

$$\text{se } a_1 > a_0 \Rightarrow f(a_1) > f(a_0)$$

cioè $a_2 > a_1$, per cui

$$a_2 > a_1 \Rightarrow f(a_2) > f(a_1)$$

e quindi $a_3 > a_2$ e per induzione $a_{n+1} > a_n$. Se invece $a_1 < a_0$ in maniera analoga si mostra che a_n è decrescente.

4) Data la successione per ricorrenza definita da $a_0 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, provare che a_n è limitata superiormente da 2 e studiare il limite della successione.
Soluzione
Vediamo il primo punto: chiaramente $a_0 < 2$. Supposto $a_n < 2$ si ha

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2\,.$$

Ora vediamo il limite: se tale limite esiste, diciamo $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{2 + l}$$

quindi

$$l^2 - l - 2 = 0 \qquad \text{con la condizione } l \geqslant 0$$

da cui si ricava che $l = 2$. Il problema è quindi stabilire l'esistenza del limite. La successione è crescente: infatti poiché la funzione $f(x) = \sqrt{2+x}$ è strettamente crescente e $a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_0$ si ha che a_n è monotona crescente. Di conseguenza la sucessione ammette limite.
Si osservi infine che si è ottenuto

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}\,.$$

Forse si può aggiungere una piccola osservazione nell'esercizio 13 dicendo che $f(x) = (x + B/x)/2$ non è crescente (e quindi ...)

Una serie

Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right].$

Soluzione

Proponiamo due soluzioni.

La prima è la seguente. Prima ricordiamo i seguenti fatti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\text{sen}\, a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } a_n \text{ infinitesima}$$

e

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\,.$$

Usando il primo dei fatti appena ricordati e il criterio del confronto ci possiamo limitare a studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

che per il secondo fatto diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\,\text{arcsen}\,\frac{n}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1 - \,\text{sen}^2(\,\text{arcsen}\,\frac{n}{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$$

che diverge.

La seconda è meno elegante, ma può essere istruttiva. **Michele, ti piace o la togliamo?**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \,\text{arcsen}\,x\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Ora, se si riuscisse a trovare una funzione g tale che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{2}$$

grazie alla regola di de l'Hôpital si concluderebbe che $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Scegliendo $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ si ha chiaramente che le condizioni (2) sono soddisfatte. Integrando si ottiene $g(x) = 2\sqrt{1-x}$. Conclusione:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie seguente ha lo stesso carattere di quella di partenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{1 - \frac{n}{n+1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Si conlude che la serie diverge (confrontare con quanto ottenuto precedentemente).