CAPITOLO 1

NUMERI REALI E COMPLESSI

1.1 L'insieme dei numeri reali

L'ambiente in cui si svolgerà la nostra trattazione è quello dei numeri *reali*. Diamo per note le definizioni e le proprietà dei numeri *naturali*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, dei numeri *interi*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ e dei numeri *razionali*, il cui insieme è denotato con $\mathbf{Q} = \{p/q : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, q \neq 0\}$. Una definizione costruttiva dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali non sarebbe altrettanto immediata, ed in effetti non la daremo in queste note, rinviando ai libri di testo. È essenziale però impadronirsi delle proprietà dell'insieme dei numeri reali, che esprimeremo in forma assiomatica. La costruzione di $\mathbf{R}$ ha il ruolo (fondamentale) di provare che un insieme che gode delle proprietà elencate esiste nell'ambito delle usuali teorie insiemistiche.

Assiomi dei numeri reali.

Assumiamo che esista un insieme $\mathbf{R}$ dotato di due *operazioni binarie*, dette *somma* e *prodotto* e denotate rispettivamente $+$ e $\cdot$, e della *relazione d'ordine* di “maggiore od uguale”, denotata $\geq$; chiamiamo gli elementi di tale insieme *numeri reali*, e assumiamo che valgano le seguenti proprietà, per ogni scelta di $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Assiomi di campo.

Assioma 1. (Proprietà associative) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Assioma 2. (Proprietà commutative) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Assioma 3. (Proprietà distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Assioma 4. (Elementi neutri) Esistono due numeri reali, denotati 0 e 1 , che agiscono come *elementi neutri* rispettivamente dell'addizione e della moltiplicazione, cioè che verificano le uguaglianze: $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Assioma 5. (Opposto) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $a + b = 0$; tale numero si dice *opposto* di a e si denota $-a$.

Assioma 6. (Inverso) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $a \cdot b = 1$; tale numero si dice *inverso* di a e si denota a^{-1} .

Assiomi dell'ordine.

Assioma 7. Per ogni coppia di numeri reali a, b , o vale $a \geq b$ oppure $b \geq a$.

Assioma 8. Se valgono contemporaneamente $a \geq b$ e $b \geq a$ allora $a = b$.

Assioma 9. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora $a + b \geq 0$ e $a \cdot b \geq 0$.

Gli assiomi elencati fin qui contengono, in forma rigorosa e concisa, delle proprietà dei numeri che sono già familiari; da esse si possono dedurre in modo sistematico tutte le proprietà note (per esempio, l'unicità degli elementi neutri) e le usuali regole algebriche e del calcolo letterale (semplificazioni, passaggio da un membro all'altro nelle uguaglianze e nelle disequaglianze, eccetera). Non procederemo in questo modo, ritenendo che queste regole siano già note. Osserviamo che i primi sei assiomi sono di contenuto puramente algebrico e riguardano le operazioni di somma e moltiplicazione, mentre il 7 e l'8 riguardano la relazione d'ordine e il 9 lega le operazioni algebriche alla relazione d'ordine. Notiamo anche che, ovviamente, i numeri 0 e 1 dell'assioma 4 sono gli stessi degli insiemi $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, che si possono considerare sottoinsiemi di $\mathbf{R}$.

Osservazione 1.1 Osserviamo che i nove assiomi elencati sopra *non definiscono ancora completamente* $\mathbf{R}$. Infatti, essi valgono (per esempio) in $\mathbf{Q}$. Per definire $\mathbf{R}$ occorre un altro assioma che enunceremo fra poco e richiede qualche ulteriore nozione preliminare.

Definizione 1.2 (Valore assoluto) Per ogni $x \in \mathbf{R}$, si definisce il valore assoluto di x , denotato con $|x|$, il numero

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposizione 1.3 (Proprietà del valore assoluto) Per ogni $r > 0$ vale la seguente equivalenza:

$$(1.1.1) \quad |x| \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad -r \leq x \leq r.$$

Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$:

$$(1.1.2) \quad |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(1.1.3) \quad |x| = |-x|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$(1.1.4) \quad |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$(1.1.5) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Proviamo prima (1.1.1). Supponiamo dapprima $|x| \leq r$. Se $x \geq 0$ allora $x \geq -r$ e $|x| = x \leq r$; se $x < 0$ allora $x \leq r$ e $|x| = -x \leq r$, da cui $x \geq -r$. Viceversa, supponiamo $-r \leq x \leq r$. Allora, se $x \geq 0$ si ha $|x| = x \leq r$, mentre se $x < 0$ si ha $x = -|x| \geq -r$, da cui $|x| \leq r$.

Le (1.1.2), (1.1.3) sono ovvie conseguenze della definizione di valore assoluto. La (1.1.4), detta *diseguaglianza triangolare*, si può dimostrare usando (1.1.1). Infatti, sommando le relazioni:

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

si deduce

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

da cui per la (1.1.1) segue $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Infine, da (1.1.4) si deduce facilmente (1.1.5); infatti, risulta $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, e da qui $|x| - |y| \leq |x - y|$; scambiando x con y si ottiene $|y| - |x| \leq |x - y|$ e quindi $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ e la tesi segue da (1.1.1). $\square$

Definiamo una classe di sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ che interverrà in numerose considerazioni.

Definizione 1.4 (Insiemi limitati) *Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$. Allora:*

1. *si dice che X è limitato superiormente se esiste $M \in \mathbf{R}$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in X$;*
2. *si dice che X è limitato inferiormente se esiste $m \in \mathbf{R}$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in X$;*
3. *si dice che X è limitato se è limitato superiormente ed inferiormente.*

Introduciamo una notazione per gli intervalli di $\mathbf{R}$, che sono i sottoinsiemi con cui prevalentemente (ma non *esclusivamente!*) lavoreremo, e per gli intorno di un punto, che useremo per descrivere le proprietà di vicinanza tra numeri reali.

Definizione 1.5 (Intervalli e intorno) *Dati a e b in $\mathbf{R}$, con $a < b$, si dice intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\};$$

si dice intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a destra di estremi a e b l'insieme

$$[a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a sinistra di estremi a e b l'insieme

$$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

dato $a \in \mathbf{R}$, si denota con $[a, +\infty[$ l'insieme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\},$$

e con $]a, +\infty[$ l'insieme

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : a < x\};$$

analogamente:

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\},$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbf{R} : x < a\}.$$

Dati $x_0 \in \mathbf{R}$ e $r > 0$, si dice intorno aperto di x_0 di raggio r l'insieme

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} =]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Nella definizione di intervalli con un estremo infinito, non si è dato alcun significato ai simboli $\pm\infty$ fuori dal contesto dell'intera espressione che li contiene. Questo accadrà spesso anche nel seguito.

Molto spesso, parleremo genericamente di *intervallo*; se non viene specificato nulla, s'intende che quanto detto vale per intervalli qualunque (aperti, chiusi, semiaperti limitati, illimitati, indifferentemente). Accanto all'intorno aperto di x_0 di raggio r possiamo considerare l'intorno chiuso

$$\bar{I}_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Notiamo inoltre che un insieme X è limitato se e solo se è contenuto in un intervallo limitato, cioè se e solo se esistono $m, M \in \mathbf{R}$ tali che $X \subset [m, M]$. Introduciamo due importanti concetti legati alla limitatezza.

Definizione 1.6 (Maggioranti, minoranti, massimo, minimo) *Sia X un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.*

Si dice che $M \in \mathbf{R}$ è un maggiorante per X se $x \leq M$ per ogni $x \in X$. Si dice che M è il massimo di X , e si scrive $M = \max X$, se M è un maggiorante ed inoltre M appartiene ad X .

Si dice che $m \in \mathbf{R}$ è un minorante per X se $x \geq m$ per ogni $x \in X$. Si dice che m è il minimo di X , e si scrive $m = \min X$, se m è un minorante ed m appartiene ad X .

Le considerazioni che seguono sono tutte conseguenze dirette delle definizioni.

Osservazioni 1.7 1. Un insieme ammette maggioranti se e solo se è limitato superiormente, ed ammette minoranti se e solo se è limitato inferiormente.

2. Se un insieme ammette un maggiorante M allora ne ammette infiniti, poiché ogni numero maggiore di M è ancora un maggiorante. Naturalmente, una considerazione analoga vale per i minoranti.

3. A differenza dei maggioranti, il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se M_1 ed M_2 sono entrambi massimi di X allora M_1, M_2 appartengono

entrambi ad X ed applicando la definizione di massimo prima con $M = M_1$ ed $x = M_2$ e poi con $M = M_2$ e $x = M_1$ si trova $M_2 \leq M_1$ e poi $M_1 \leq M_2$, da cui $M_1 = M_2$ e l'unicità del massimo. Ovviamente un ragionamento analogo porta all'unicità del minimo.

4. Un insieme limitato può non avere massimo o minimo. Per esempio, l'intervallo $]a, b]$ ha massimo b ma non ha minimo, perché i suoi minoranti sono gli elementi dell'intervallo $] - \infty, a]$, e nessuno di essi appartiene ad $]a, b]$.
5. Ogni insieme costituito da un numero *finito* di numeri reali ha sempre massimo e minimo.

Tenendo conto delle osservazioni precedenti, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.8 (Estremo superiore ed inferiore) Dato $X \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente, e detto M_X l'insieme dei suoi maggioranti, diciamo estremo superiore di X il più piccolo dei maggioranti, cioè il numero

$$\sup X = \min M_X.$$

Dato $X \subset \mathbf{R}$ limitato inferiormente, e detto M'_X l'insieme dei suoi minoranti, diciamo estremo inferiore di X il più grande dei minoranti, cioè il numero

$$\inf X = \max M'_X.$$

Come osservato, in generale, un insieme, anche limitato, può non avere massimo o minimo. Al contrario, in $\mathbf{R}$ l'insieme dei maggioranti (rispettivamente, dei minoranti) di un insieme dato ha *sempre* minimo (risp. massimo) in $\mathbf{R}$, e questo è ciò che distingue in modo essenziale $\mathbf{R}$ da $\mathbf{Q}$. L'esistenza dell'estremo superiore (inferiore) per un insieme limitato superiormente (inferiormente) completa la nostra descrizione assiomatica dell'insieme dei numeri reali. Notiamo che in tutta la trattazione precedente sono stati usati solo gli assiomi già enunciati, e quindi essa è logicamente coerente, anche se la descrizione di $\mathbf{R}$ non era ancora completa.

Assioma 10. (Completezza) Ogni insieme $X \subset \mathbf{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore $\sup X$ in $\mathbf{R}$.

Osservazioni 1.9

1. Dall'assioma 10 segue subito che ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ammette estremo inferiore in $\mathbf{R}$.
2. Abbiamo già osservato che il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Segue subito quindi dalla definizione l'unicità dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.

3. Conveniamo di porre $\sup X = +\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ e X non è limitato superiormente, e $\inf X = -\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbf{R}$ e X non è limitato inferiormente. Come prima, non diamo un significato ai simboli $\pm\infty$ isolati dal contesto, ma solo all'intera espressione che li contiene.
4. È evidente che se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbf{R}$ allora $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$.

Introduciamo anche la seguente notazione, che è a volte utile: se $X \subset \mathbf{R}$ è illimitato superiormente, poniamo $\sup X = +\infty$, e se $X \subset \mathbf{R}$ è illimitato inferiormente poniamo $\inf X = -\infty$.

Discutiamo separatamente altre due importanti conseguenze dell'assioma di completezza, la cui dimostrazione è meno immediata.

Osservazione 1.10

1. (**Proprietà archimedea**): per ogni coppia di numeri reali a e b , con $0 < a < b$, esiste un numero naturale n tale che $na > b$. Segnaliamo anche la seguente conseguenza: se un numero positivo c è minore di ε per ogni $\varepsilon > 0$ allora $c = 0$. Infatti, se fosse $c > 0$, dato $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n \in \mathbf{N}$ tale che $nc > \varepsilon$, ossia $c > \varepsilon/n$, che contraddice l'ipotesi che c sia minore di ogni numero strettamente positivo prefissato. Tale risultato è talvolta utile per provare che due numeri reali a e b sono uguali, applicandolo a $c = |a - b|$. Se infatti si riesce a provare che $|a - b| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora segue $a = b$.
2. (**Densità dei razionali nei reali**): per ogni coppia di numeri reali a, b , con $a < b$, esiste un numero *razionale* r tale che $a < r < b$. prendiamo prima $a > 0$. Allora per n maggiore del più grande fra i numeri $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b-a}$ risulta $0 < \frac{1}{n} < a$ e per la proprietà archimedea esiste m tale che $\frac{m}{n} > a$. Se si sceglie m in modo che $\frac{m-1}{n} \leq a$, essendo $\frac{1}{n} < \frac{1}{b-a}$, si ha anche $\frac{m}{n} < b$. Se $b < a < 0$ si ragiona come prima con $-a$ e $-b$ e poi si cambia di segno il numero trovato. se $a \leq 0$ e $b > 0$ si trova come prima r tra 0 e b , se $a < 0$ e $b = 0$ si trova r tra a e 0 .

Si può dare una utile caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme.

Proposizione 1.11 (Caratterizzazione del sup e dell'inf) *Sia $X \subset \mathbf{R}$ limitato. Allora valgono le seguenti equivalenze:*

$$(1.1.6) \quad L = \sup X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq L \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon > L - \varepsilon \end{cases}$$

$$(1.1.7) \quad \ell = \inf X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \ell \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

DIM. Sia dapprima $L = \sup X$. Allora, $x \leq L$ per ogni $x \in X$ perché L è un maggiorante di X . Inoltre, nessun numero più piccolo di L è un maggiorante di X ; poiché ogni numero minore di L si può scrivere nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, negare che $L - \varepsilon$ sia un maggiorante di X equivale a dire che esiste un $x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon > L - \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che valgano le due condizioni a destra in (1.1.6); allora, la prima dice che L è un maggiorante di X . La seconda afferma che nessun numero più piccolo di L , espresso nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, è un maggiorante di X . Segue $L = \sup X$.

La dimostrazione di (1.1.7) è analoga. $\square$

L'assioma di completezza *non vale* nell'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$, e quindi $\mathbf{Q}$ è contenuto *propriamente* in $\mathbf{R}$. I numeri reali non razionali si dicono *irrazionali*.

Esempio 1.12 Sia $X = \{r \in \mathbf{Q} : r^2 < 2\}$; allora, X è limitato superiormente, ma $\sup X \notin \mathbf{Q}$; segue che l'assioma di completezza non vale in $\mathbf{Q}$. Per giustificare la nostra affermazione, procediamo in due passi: mostriamo prima che se $L = \sup X$ allora $L^2 = 2$, e poi che se $L^2 = 2$ allora $L \notin \mathbf{Q}$. Per la prima parte, si può ragionare così: supposto $L^2 < 2$, e posto $m = 2 - L^2$, si ha $m > 0$ e si vede che esistono soluzioni positive della seguente disequazione nella variabile ε :

$$\varepsilon^2 + 2L\varepsilon - m < 0;$$

per tali valori di ε risulta che $(L + \varepsilon)^2 < 2$ e quindi $L + \varepsilon$ appartiene ad X ed è più grande di L . Questo prova che, supposto $L^2 < 2$, L non può essere il sup di X . Analogamente, supposto $L^2 > 2$, e posto $m = L^2 - 2$, si ha ancora $m > 0$ e si vede che esistono soluzioni positive della seguente disequazione nella variabile ε :

$$\varepsilon^2 - 2L\varepsilon - m > 0;$$

per tali valori di ε risulta che $(L - \varepsilon)^2 > 2$ e quindi $L - \varepsilon$ è un maggiorante di X più piccolo di L . Questo prova che, supposto $L^2 > 2$, L non può essere il sup di X . In definitiva, $(\sup X)^2 = 2$. Proviamo ora che $\sup X \notin \mathbf{Q}$. Supposto vero il contrario, sia $\sup X = p/q$ con la frazione p/q ridotta ai minimi termini. Si vede facilmente che questo porta ad una contraddizione. Infatti:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ implica } p^2 = 2q^2, \text{ da cui } p^2 \text{ pari, e quindi } p \text{ pari, diciamo } p = 2r \\ \text{allora } q^2 = 2r^2 \text{ pari, e } q \text{ pari.}$$

La precedente conclusione è impossibile perché la frazione era supposta ridotta ai minimi termini.

1.2 Funzioni elementari

Prima di affrontare lo studio delle funzioni reali di variabile reale, che sarà l'argomento centrale del corso, richiamiamo alcune nozioni generali sulle funzioni tra insiemi generici.

1.2.a Generalità sulle funzioni

Definizione 1.13 *Siano U un qualunque insieme (non vuoto), che consideriamo come l'universo del nostro discorso.*

1. Una **funzione** è una terna costituita da due sottoinsiemi di U , il primo, che denotiamo con A , detto **dominio**, il secondo, denotato con B , detto **codominio**, ed una legge di corrispondenza che fa corrispondere ad ogni elemento x di A uno (ed un solo) elemento di B , denotato con $f(x)$. Simbolicamente, scriviamo $f : A \rightarrow B$.
2. Si dice **insieme immagine** di f l'insieme

$$f(A) = \{y \in B : \text{esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} \subset B.$$

3. Si dice **grafico** di f l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B.$$

4. Data $f : A \rightarrow B$, e dato un sottoinsieme $C \subset A$, si dice **restrizione di f** la funzione $f|_C : C \rightarrow B$ che ha per dominio C , per codominio B e come legge di corrispondenza la stessa della f iniziale.
5. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.
6. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **surgettiva** se $f(A) = B$, cioè se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.
7. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **bigettiva** se è iniettiva e surgettiva.
8. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **invertibile** se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ per ogni $x \in A$, $y \in B$. Se f è invertibile, la funzione g suddetta si dice **inversa di f** e si denota con f^{-1} .
9. Per ogni insieme $A \subset U$, si definisce la **funzione identità** $id_A : A \rightarrow A$ ponendo $id_A(x) = x$ per ogni $x \in A$.
10. Date le funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, si definisce la **funzione composta** $g \circ f : A \rightarrow C$ ponendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in A$.

Osservazioni 1.14 1. Una funzione è invertibile se e solo se è bigettiva.

2. Data $f : A \rightarrow B$, la funzione $g : B \rightarrow A$ è l'inversa di f se e solo se $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, cioè se $(g \circ f)(x) = x$ per ogni $x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y$ per ogni $y \in B$.
3. Una funzione è sempre surgettiva prendendo come codominio l'insieme immagine $f(A)$, quindi ogni funzione iniettiva è sempre bigettiva da A in $f(A)$.

4. Se $f : A \rightarrow B$ è invertibile e $G(f)$ è il suo grafico, allora il grafico della funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ è l'insieme

$$G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in G(f)\}.$$

1.2.b Funzioni reali di una variabile

D'ora in poi l'universo del nostro discorso, salvo avviso contrario, sarà l'insieme dei numeri reali, o qualche suo sottoinsieme. Considereremo perciò *funzioni reali di una variabile reale*, cioè funzioni definite in $X \subset \mathbf{R}$ ed a valori in $\mathbf{R}$, simbolicamente $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. Useremo ovviamente la terminologia introdotta nella Definizione 1.13, ma, in questo caso particolare, accanto alle proprietà generali delle funzioni già viste possiamo segnalarne altre, peculiari delle funzioni reali. Iniziamo dall'importante nozione di monotonia.

Definizione 1.15 Sia $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è crescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

si dice che f è strettamente crescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

si dice che f è decrescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$

si dice che f è strettamente decrescente se

$$x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

si dice che f è monotona se è crescente o decrescente, che è strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Osservazione 1.16 È chiaro che ogni funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strettamente monotona è iniettiva, e perciò è invertibile da X su $f(X)$. Useremo sistematicamente questo fatto per studiare l'invertibilità delle funzioni. Inoltre, segue subito dalle definizioni che l'inversa di una funzione crescente è crescente, e l'inversa di una funzione decrescente è decrescente.

Altre proprietà delle funzioni reali corrispondono alle proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ visti nella sezione precedente.

Definizione 1.17 (Funzioni limitate) Sia $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. si dice che f è limitata se $f(X)$ è limitato, cioè se esistono $m, M \in \mathbf{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.

Come per la limitatezza, per definire massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione si fa riferimento all'insieme immagine $f(X)$.

Definizione 1.18 (max, min, sup ed inf di una funzione) *Si definiscono il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su X ponendo:*

$$\begin{aligned}\max_X f &= \max f(X) = \max\{f(x) : x \in X\}, \\ \min_X f &= \min f(X) = \min\{f(x) : x \in X\}, \\ \sup_X f &= \sup f(X) = \sup\{f(x) : x \in X\}, \\ \inf_X f &= \inf f(X) = \inf\{f(x) : x \in X\}.\end{aligned}$$

Osservazione 1.19 Come per gli insiemi, una funzione $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, anche limitata, può non avere massimo o minimo. La funzione f ha massimo se e solo se esiste $x_1 \in X$ tale che $f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_1 si dice *punto di massimo assoluto per f in X* . Analogamente, la funzione f ha minimo se e solo se esiste $x_2 \in X$ tale che $f(x) \geq f(x_2)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_2 si dice *punto di minimo assoluto per f in X* .

Naturalmente, il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è sempre un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, prodotto cartesiano della retta reale per sé stessa, in cui supponiamo fissato un riferimento cartesiano ortogonale di assi x (asse delle ascisse) ed y (asse delle ordinate). Conveniamo di rappresentare sull'asse delle ascisse la variabile indipendente e sull'asse delle ordinate la variabile dipendente, sicché il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sarà l'insieme dei punti del piano che verificano le condizioni $x \in X$ e $y = f(x)$. Dal punto di vista geometrico, i grafici delle funzioni nel piano sono caratterizzati dalla seguente condizione:

Sia $G \subset \mathbf{R}^2$. Allora, esistono $X \subset \mathbf{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $G = G(f)$ se e solo se l'intersezione di G con ogni retta verticale, cioè del tipo $x = \text{costante}$, contiene al più un punto.

Una condizione geometrica analoga caratterizza l'*iniettività* di una funzione; infatti,

Sia $f : X \rightarrow \mathbf{R}$; allora, f è iniettiva se e solo se l'intersezione di $G(f)$ con ogni retta orizzontale, cioè del tipo $y = \text{costante}$, contiene al più un punto.

1.2.c Funzioni elementari

In questo paragrafo definiamo le più usuali funzioni di una variabile, a partire dalle quali, con le operazioni algebriche e la composizione di funzioni si otterranno la maggior parte degli esempi che incontreremo. Le funzioni che andiamo a considerare saranno definite attraverso *espressioni analitiche*, cioè algoritmi di calcolo che comprendono operazioni algebriche oppure calcolo di estremi superiore od inferiore. Tali algoritmi consistono in una procedura che, dato il numero reale x in un opportuno insieme, prescrive come si debba calcolare il numero $f(x)$, cioè il valore che la funzione f assume in corrispondenza del valore assegnato alla variabile indipendente. Non bisogna per altro confondere

la *funzione* f con la procedura di calcolo di $f(x)$, che chiamiamo *espressione analitica*. Infatti, per dare la funzione f , pur dando per scontato che il suo codominio sia $\mathbf{R}$, bisogna dichiarare quale sia il *dominio* scelto, oltre ad assegnare l'espressione analitica che contiene la legge di corrispondenza richiesta per completare la definizione. Ciò non ostante, talvolta il dominio corrispondente ad una certa espressione analitica è taciuto: in tal caso, si assume come dominio il così detto *dominio naturale dell'espressione analitica*, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbf{R}$ in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$ si possono eseguire.

Funzioni razionali

Le funzioni razionali sono quelle definite da espressioni analitiche che contengono solo operazioni algebriche. Esplicitamente, abbiamo i *polinomi* e le *funzioni razionali*. Chiameremo *polinomio di grado n* nella variabile x l'espressione

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

definita per ogni x reale, dove gli $a_0, \dots, a_n$ sono numeri reali dati, con $a_n \neq 0$, detti *coefficienti del polinomio*. Il grado del polinomio è quindi il massimo esponente della potenza di x con coefficiente non nullo. Tra i polinomi hanno un ruolo particolare le funzioni *affini*, cioè i polinomi di grado 1, $f(x) = ax + b$, quelle *lineari*, $f(x) = ax$ e le funzioni *potenza*, cioè del tipo $f(x) = x^n$, in cui uno solo dei coefficienti è non nullo. Notiamo che le funzioni affini e lineari, con $a \neq 0$, sono strettamente monotone, e perciò invertibili (crescenti per $a > 0$ e decrescenti per $a < 0$). Per quanto riguarda le funzioni potenza, per n dispari esse sono strettamente crescenti su $\mathbf{R}$ (e quindi invertibili), mentre per n pari sono strettamente crescenti le loro restrizioni all'insieme dei numeri positivi $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$.

Le altre funzioni razionali sono quelle espresse come rapporto di polinomi. Fra queste, le più semplici sono le funzioni *potenze negative* x^{-n} , con $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, definite per $x \neq 0$ come $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. La generica funzione razionale sarà del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove P e Q sono polinomi di grado qualunque. Il dominio naturale di f è in questo caso l'insieme $X = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$, dal momento che, delle operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$, l'unica che non si possa eseguire per ogni numero reale è la divisione, in cui è escluso che il denominatore possa essere 0.

Radici aritmetiche e potenze razionali

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 2$, e per ogni $x \geq 0$, poniamo $\sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbf{R} : y^n < x\}$, funzione detta *radice n -esima aritmetica di x* . Notiamo che per ogni $x \geq 0$ risulta $\sqrt[n]{x} \geq 0$. L'esistenza della radice è assicurata dall'assioma di completezza. Inoltre, segue

dalle proprietà dell'estremo superiore che $(\sqrt[n]{x})^n = x$, cioè che la funzione radice n -esima è l'inversa della restrizione della funzione potenza n -esima all'insieme $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, che, come già osservato, è strettamente crescente. Poiché le funzioni potenza n -esima per n dispari sono strettamente crescenti su $\mathbf{R}$ e non solo su $\{x \geq 0\}$, si possono estendere le funzioni radice n -esima, per n dispari, ad $\mathbf{R}$, ponendo $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per ogni $x < 0$.

Per $r \in \mathbf{Q}$, posto per fissare le idee $r = p/q$ con $p \in \mathbf{Z}$ e $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$, poniamo $x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ per ogni $x \geq 0$ ($x > 0$ se $p < 0$).

Esponenziali e logaritmi

Avendo definito l'espressione x^r , con $x > 0$ ed $r \in \mathbf{Q}$, possiamo pensarla con x fissato ed r variabile, passando così dalla *funzione potenza* già considerata alla *funzione esponenziale*, per ora con esponente razionale. Siccome $1^r = 1$ per ogni r , considereremo in questo paragrafo una base strettamente positiva e diversa da 1. Per sottolineare che la base della potenza è costante, scriveremo a^r , supponendo fissato il numero reale $a > 0$, $a \neq 1$. Vale il seguente importante risultato.

Proposizione 1.20 *La funzione esponenziale a^r , $r \in \mathbf{Q}$, gode delle seguenti proprietà:*

1. $a^r > 0$ per ogni $a > 0$ e per ogni $r \in \mathbf{Q}$;
2. per $a \in]0, 1[$ la funzione a^r è strettamente decrescente;
3. per $a > 1$ la funzione a^r è strettamente crescente;
4. vale l'uguaglianza $e^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ per ogni $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$.

Dalla Proposizione 1.20 segue che la definizione di esponenziale si può estendere al caso di esponenti *reali* qualsiasi. Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Poniamo

$$(1.2.8) \quad a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\} \quad \text{se } a \in]0, 1[;$$

$$(1.2.9) \quad a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbf{Q}, r < x\} \quad \text{se } a > 1;$$

È molto importante notare che la funzione esponenziale *con esponente reale* appena definita gode ancora delle proprietà elencate nella Proposizione 1.20 ed è surgettiva su $]0, +\infty[$. Segue allora dall'Osservazione 1.16 che è possibile definire la funzione inversa dell'esponenziale.

Per $a > 0$, $a \neq 1$, si dice *logaritmo in base a* , e si denota $\log_a : \{x > 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, la funzione inversa di a^x ; risulta allora

$$\log_a x = y \quad \iff \quad a^y = x \quad \forall x > 0, y \in \mathbf{R}.$$

Sempre per l'Osservazione 1.16 si ha che $\log_a$ è strettamente crescente per $a > 1$ e strettamente decrescente per $a \in]0, 1[$.

Tra le funzioni esponenziali e i logaritmi, per motivi che saranno chiari più avanti nel corso, ha un ruolo importantissimo quella la cui base è il numero

$$(1.2.10) \quad e = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Risulta che e è un numero *irrazionale* e in particolare un suo valore approssimato è $e = 2,71828$.

Definizione 1.21 (Funzione esponenziale e logaritmo naturale) *si dice funzione esponenziale la funzione e^x , e logaritmo naturale il logaritmo in base e , denotato semplicemente $\log$.*

Notiamo che $e > 1$, quindi sia l'esponenziale e^x che il logaritmo naturale $\log x$ sono funzioni strettamente crescenti.

Infine, il procedimento esposto permette di definire anche le *funzioni potenza con esponente reale*. In altri termini, fissato $\alpha \in \mathbf{R}$, possiamo definire la *funzione potenza di esponente α* ponendo, per ogni $x > 0$, x^α come il valore dato dalle (1.2.8), (1.2.9), secondo i casi. Notiamo che $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.

Funzioni trigonometriche

Non ci soffermeremo sulle (tante) proprietà delle funzioni trigonometriche, che supponiamo note. Ci limitiamo a darne brevissimi cenni, limitati agli aspetti più legati alle applicazioni che seguono. Fissiamo anzitutto un riferimento ortogonale nel piano e consideriamo la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$. I suoi punti P possono essere identificati tramite l'angolo che il raggio OP forma col semiasse positivo dell'asse x . Definiamo ora l'unità di misura degli angoli.

Definizione 1.22 *Si dice misura in radianti di un angolo la lunghezza dell'arco individuato dalle semirette che determinano l'angolo sulla circonferenza unitaria di centro il punto d'incontro delle semirette stesse.*

Sottolineiamo che la precedente definizione, sebbene intuitiva, non può considerarsi rigorosa, dal momento che non abbiamo precisato come si possa definire e calcolare la lunghezza di un arco di circonferenza. Questo si può fare, sfruttando le proprietà della circonferenza, in modo elementare (cioè seguendo gli *Elementi* di Euclide, dove l'argomento è trattato in modo esauriente), oppure come caso particolare di una trattazione generale del problema della lunghezza delle curve, che viene studiata nel corso di Analisi matematica II e, in particolare, è presentata nel Capitolo 4 delle relative dispense.

Vogliamo ora passare ad una misura *orientata* degli angoli, così come si fa per le misure lineari quando si introduce la nozione di ascissa. Per prima cosa, scegliamo di considerare positivo il verso antiorario di percorrenza della circonferenza, e misuriamo gli angoli a partire dal semiasse positivo delle x .

Ricordiamo che la lunghezza della circonferenza unitaria (per definizione del numero π) ha il valore 2π . Notiamo inoltre che allo stesso punto sulla circonferenza sono associati infiniti valori dell'angolo (positivi e negativi). Fissato un intervallo semiaperto di lunghezza 2π (cioè pari alla lunghezza della circonferenza unitaria), per esempio $] -\pi, \pi]$, uno e uno solo di questi valori appartiene a tale intervallo, e tutti gli altri si ottengono da questo sommando multipli interi di 2π .

Queste proprietà si riflettono nella proprietà delle funzioni trigonometriche di essere *periodiche*, secondo la seguente definizione.

Definizione 1.23 (Funzioni periodiche) *Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; diciamo che f è periodica di periodo T (o T -periodica) se $T > 0$ è il più piccolo numero reale tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se f è T -periodica, T si dice periodo della funzione f .*

Osserviamo che se f è T -periodica allora $f(x+kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Passiamo a definire le funzioni trigonometriche.

Definizione 1.24 *Si dicono rispettivamente seno e coseno del numero $\alpha \in \mathbf{R}$ l'ordinata e l'ascissa del punto della circonferenza unitaria con centro l'origine determinato dalla semiretta per l'origine che forma un angolo di α radianti col semiasse positivo dell'asse x .*

Osservazioni 1.25

1. Nella definizione di seno e coseno abbiamo sottolineato che si deve parlare di seno e coseno di un *numero* e non di un angolo: la costruzione geometrica basata sull'angolo è strumentale (e per altro non è l'unica possibile), ma ciò che viene definito sono il seno e il coseno del numero che esprime la misura in radianti di un angolo, e non dell'angolo stesso. Quest'osservazione è importante al fine di evitare confusioni quando si usino unità diverse dal radiante per misurare gli angoli. Anche per questo, è bene usare solo i radianti per misurare gli angoli. Come per la funzione esponenziale, forse questa scelta può apparire ora innaturale, mentre al contrario, come vedremo, risulterà essere la più naturale possibile.
2. Come abbiamo già osservato, lo stesso punto della circonferenza unitaria è determinato da infiniti valori della misura in radianti dell'angolo: due valori che differiscono per un multiplo intero di 2π , infatti, determinano lo stesso punto.
3. In base alle osservazioni precedenti, la definizione 1.24 definisce le due funzioni sin e cos, aventi dominio $\mathbf{R}$. Come al solito, useremo d'ora in poi la lettera x per denotare la variabile. Inoltre, sono funzioni periodiche di periodo 2π .
4. È chiaro dalla definizione che vale la relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Accanto alle funzioni seno e coseno si definisce la funzione *tangente* ponendo

$$\tan : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Geometricamente, detto P il punto sulla circonferenza unitaria determinato dal numero x come al solito, per ogni x nel dominio di $\tan$, la tangente rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta $x = 1$ con la retta di origine O passante per P .

È evidente che la funzione tangente è definita per tutti i valori di x in cui il coseno è diverso da zero. Dal punto di vista geometrico, questi valori corrispondono ai punti P della circonferenza unitaria tali che la retta OP sia parallela alla retta $x = 1$.

Osserviamo anche che la funzione tangente è periodica di periodo minimo π e non 2π , malgrado sia rapporto di funzioni 2π -periodiche.

Ricordiamo infine alcuni valori fondamentali delle funzioni seno, coseno e tangente:

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$\tan 0 = 0$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\nexists \tan \frac{\pi}{2}$
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \frac{\pi}{4} = 1$
$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le proprietà delle funzioni trigonometriche sono numerose ed importanti, ma non ne discutiamo ulteriormente qui perché esse si suppongono note dalla scuola superiore.

1.3 Numeri complessi

L'introduzione di un altro insieme numerico, oltre ai numeri reali, è giustificata dall'esigenza di trovare un insieme numerico in cui tutte le equazioni algebriche, cioè le equazioni del tipo $P(x) = 0$, con P polinomio di grado arbitrario, abbiano soluzioni. Questo non accade in $\mathbf{R}$; il più semplice esempio di equazione algebrica priva di soluzioni reali è certamente $x^2 + 1 = 0$. È forse sorprendente che, come vedremo, sarà in un certo senso sufficiente "aggiungere" ad $\mathbf{R}$ le soluzioni di quest'equazione per ottenere lo scopo indicato di risolvere *tutte* le equazioni algebriche (vedi il successivo Teorema fondamentale dell'algebra 1.35).

Definizione 1.26 (Campo complesso) *Si dice campo complesso l'insieme $\mathbf{R}^2$ in cui sono definite le due operazioni di somma e prodotto seguenti:*

$$(1.3.11) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(1.3.12) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Il campo complesso si denota con $\mathbf{C}$.

Osservazioni 1.27

1. Le operazioni definite in (1.3.11), (1.3.12) godono delle stesse proprietà algebriche indicate negli Assiomi da 1 a 6 per le analoghe operazioni $\mathbf{R}$.
2. Gli elementi neutri per le operazioni di somma e prodotto sono rispettivamente $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$, mentre l'opposto e l'inverso, quest'ultimo solo per $(a, b) \neq (0, 0)$, sono rispettivamente

$$-(a, b) = (-a, -b), \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

3. Alla luce delle considerazioni precedenti, si ha che si possono identificare i numeri reali col sottoinsieme di $\mathbf{C}$ dato da $\{(a, 0) : a \in \mathbf{R}\}$. Ne segue che per $a \in \mathbf{R}$ si ha $a \cdot (b, c) = (ab, ac)$ per ogni $(b, c) \in \mathbf{C}$.
4. A differenza di $\mathbf{R}$, è possibile trovare numeri complessi (a, b) tali che $(a, b)^2 = -1 = (-1, 0)$; per esempio, $(0, 1)^2 = -1$.
5. In $\mathbf{C}$ non si può definire alcuna relazione d'ordine $\geq$ tale che valgano gli Assiomi 7, 8 e 9 stabiliti per i numeri reali.
6. Avendo definito la somma e la moltiplicazione tra numeri complessi, si possono considerare i *polinomi complessi* nella variabile complessa z nella forma

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad \text{con } a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}.$$

A proposito dei polinomi e delle equazioni algebriche in campo complesso, dal momento che, come vedremo, essi hanno un ruolo importante nella teoria, ricordiamo le nozioni di *radice* e *molteplicità*.

Definizione 1.28 (Radice di un polinomio e molteplicità) *Sia $P(z)$ un polinomio nella variabile complessa z , sia $z_0 \in \mathbf{C}$ e sia $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$. Si dice che z_0 è radice di P se $P(z_0) = 0$; in tal caso, $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$, e si dice che z_0 ha molteplicità m se $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.*

Una conseguenza della definizione precedente è che un polinomio di grado n non può avere più di n radici (contate con le rispettive molteplicità).

La rappresentazione dei numeri complessi come coppie ordinate non è molto comoda nelle manipolazioni algebriche. Per questo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.29 (Forma algebrica, Re, Im, modulo, coniugato) *Posto $i = (0, 1)$, definiamo forma algebrica del numero complesso $z = (a, b)$ la scrittura $z = a + ib$. Il numero reale a si dice parte reale di z , denotata $Re z$ e il numero reale b si dice parte immaginaria di z , denotata $Im z$. Si definisce inoltre il modulo di z come $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e il numero complesso coniugato di z come $\bar{z} = a - ib$.*

Il modulo complesso gode di proprietà analoghe a quelle del valore assoluto in campo reale.

Proposizione 1.30 (Proprietà del modulo) Per ogni $z, w \in \mathbf{C}$ valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0, & |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0; \\ |z| &= |-z|, & |z \cdot w| &= |z| \cdot |w|; \\ |z + w| &\leq |z| + |w|. \end{aligned}$$

Segue che per le operazioni tra numeri complessi si possono usare le usuali regole algebriche, trattando il numero i come una variabile letterale, e tenendo conto che $i^2 = -1$. La forma algebrica è basata sulla rappresentazione dei punti del piano $\mathbf{R}^2$ attraverso le coordinate cartesiane ed è molto comoda per le addizioni, non è altrettanto comoda per le moltiplicazioni. Introduciamo perciò nel piano le *coordinate polari*, che ci consentiranno di ottenere un'altra espressione dei numeri complessi, stavolta utile in modo particolare per le moltiplicazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi Matematica II.

(Coordinate polari) Le coordinate polari (ϱ, ϑ) sono definite come segue: $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane (x, y) dall'origine e coincide col modulo, mentre ϑ rappresenta l'angolo formato dalla semiretta di origine $(0, 0)$ e passante per (x, y) con il semiasse $\{x \geq 0, y = 0\}$ e si dice *argomento* o anche *anomalia* del numero complesso $z = x + iy$. Ne segue che il punto $(x, y) \neq (0, 0)$ è univocamente determinato da una coppia (ϱ, ϑ) , con $\varrho \geq 0$ e ϑ che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π . Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore $\varrho = 0$, ma non ha un ϑ determinato. In questo contesto è utile scegliere come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo $] -\pi, \pi]$, e si ha:

$$(1.3.13) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

Definizione 1.31 (Forma trigonometrica) Ogni $z \in \mathbf{C}$, si può esprimere in forma trigonometrica usando le coordinate polari; risulta $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.

Vediamo come la forma trigonometrica permette di eseguire facilmente le moltiplicazioni. Dati $z_1 = \varrho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \varrho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$, risulta:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \varrho_1 \varrho_2 [(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)] \\ &= \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)], \end{aligned}$$

risultato che si può descrivere dicendo che il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare, per $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ ed $n \in \mathbf{N}$ si ha la *formula di De Moivre*:

$$(1.3.14) \quad z^n = \varrho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)].$$

Queste osservazioni suggeriscono di dare la seguente definizione.

Definizione 1.32 (Esponenziale complesso e forma esponenziale) Per $z = x + iy$, si pone

$$(1.3.15) \quad e^z = e^x(\cos y + i \sin y);$$

in particolare, per $x = 0$ si ottengono i numeri complessi di modulo unitario, sicché si può scrivere ogni numero complesso nella forma esponenziale $z = |z|e^{i\vartheta}$, dove ϑ è un argomento di z .

Notiamo che usando la forma esponenziale la formula appena vista per il prodotto di due numeri complessi e la formula di De Moivre si possono riscrivere

$$\varrho_1 e^{i\vartheta_1} \varrho_2 e^{i\vartheta_2} = \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (\varrho e^{i\vartheta})^n = \varrho^n e^{in\vartheta},$$

due uguaglianze che formalmente rispettano le leggi degli esponenti per il prodotto di potenze con la stessa base. Anche se la definizione 1.32 ha delle giustificazioni ben più profonde, questa coerenza formale si può considerare come una prima motivazione. Le notazioni introdotte saranno comode nel calcolo delle radici complesse che ora definiamo.

Definizione 1.33 Dati $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, e $w \in \mathbf{C}$, un numero complesso z si dice radice complessa n -esima di w se $z^n = w$.

Notiamo che un numero complesso non può avere più di n radici complesse distinte, essendo le radici n -esime di w le radici del polinomio $P(z) = z^n - w$. Inoltre, è importante capire che la nozione di radice complessa, a differenza della radice n -esima aritmetica in campo reale, *non definisce una funzione*, anche quando si parta da numeri reali positivi. Per esempio, la *radice quadrata reale* del numero 4 è 2, e infatti in ambito reale si scrive $\sqrt{4} = 2$, mentre le *radici complesse* dello stesso numero 4 sono 2 e -2 . Di che cosa si stia parlando dev'essere pertanto sempre dichiarato o chiaro dal contesto.

Teorema 1.34 (Radici complesse) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, e per ogni $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$, esistono n radici complesse distinte di w , date dalla formula

$$(1.3.16) \quad z_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi_k}, \quad \text{con } \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad e \quad k = 0, \dots, n-1.$$

DIM. Posto $w = \varrho e^{i\vartheta}$, cerchiamo i numeri complessi $z = r e^{i\phi}$ tali che $z^n = w$. Dalla formula di De Moivre, quest'equazione equivale a $r^n e^{in\phi} = \varrho e^{i\vartheta}$, che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} r^n = \varrho \\ \cos(n\phi) = \cos \vartheta \\ \sin(n\phi) = \sin \vartheta \end{cases}$$

nelle incognite reali r e ϕ . Le soluzioni di questo sistema sono

$$r = \sqrt[n]{\varrho}, \quad \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

dove $\sqrt[n]{\rho}$ indica la radice aritmetica del numero positivo ρ . Quindi r , cioè il modulo di z , è unico, mentre per l'argomento abbiamo trovato infinite soluzioni ϕ_k . In realtà, esse non danno luogo ad infiniti numeri complessi distinti (che sarebbe impossibile, come già osservato), a causa del fatto che l'argomento di un numero complesso è determinato a meno di multipli di 2π . Infatti, $z_k = z_j$ se e solo se $\cos \phi_k = \cos \phi_j$ e $\sin \phi_k = \sin \phi_j$, cioè se e solo se i due indici k e j differiscono per un multiplo intero di n . Ne segue che i numeri $z_0, \dots, z_{n-1}$ sono tutti distinti tra loro e che ogni altra radice trovata coincide con uno di questi numeri. $\square$

Come annunciato all'inizio della sezione, la possibilità di trovare soluzioni dell'equazione $w^n = z$, cioè radici complesse di tutti i numeri complessi, si estende a tutte le equazioni algebriche. Infatti, il seguente importante (e difficile!) teorema assicura che ogni polinomio complesso ammette almeno una radice complessa.

Teorema 1.35 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Se $P(z)$ è un polinomio complessodi grado almeno 1, esiste almeno un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.*

È facile trarre dal Teorema fondamentale dell'algebra numerose conseguenze: in particolare, usando la nozione di molteplicità di una radice, si può concludere che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici, pur di contarle con le rispettive molteplicità.

Teorema 1.36 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado n ha esattamente n radici, se si conta m volte una radice di molteplicità m .*

Non abbiamo al momento bisogno di queste ulteriori informazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi matematica II. Enunciamo invece subito un risultato riguardante i polinomi a coefficienti reali.

Teorema 1.37 (Polinomi a coefficienti reali) *Se $P(z)$ è un polinomio nella variabile complessa z i cui coefficienti sono tutti numeri reali, allora $z_0 \in \mathbf{C}$ è radice di $P(z)$ se e solo se il suo coniugato $\bar{z}_0$ lo è, ed in tal caso z_0 e $\bar{z}_0$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che se $P(z_0) = 0$ allora

$$P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0.$$

$\square$