CAPITOLO 4

CALCOLO INTEGRALE

Con lo studio del Calcolo integrale ci prefiggiamo di risolvere due problemi apparentemente distinti, ma che in realtà si vedranno essere intimamente legati. Essi sono:

Problema 1 (antiderivazione) Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo; data $f : I \to \mathbf{R}$, dire se esiste una funzione G derivabile in I tale che $G' = f$.

Problema 2 (quadratura) Date $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, con $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, assegnare un valore numerico che esprima l'*area* dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ a \le x \le b, \ f(x) \le y \le g(x)\}.$$

Per quanto riguarda il problema 2 si vuole definire l'area di una regione piana in modo che certi (naturali) requisiti siano soddisfatti: per esempio, si vuole che l'area di una regione A contenuta in una B sia più piccola dell'area di B, o che l'area dell'unione di due regioni disgiunte sia la somma delle aree, e così via. Non formalizziamo tutte le richieste, ma è importante avere in mente che una funzione che esprima l'area non può essere arbitraria.

Definizione 4.1 (Primitive) *Date $f, G : I \to \mathbf{R}$, si dice che G è una* primitiva *di f in I se G è derivabile in I e risulta $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.*

Osservazioni 4.2 Le seguenti proprietà delle primitive sono immediate conseguenze della definizione.

1. Se G è una primitiva della funzione f in I, ogni funzione del tipo $G(x) + c$, con $c \in \mathbf{R}$, è ancora una primitiva di f in I. Infatti, $D(G + c) = G' = f$.

2. Se G_1 e G_2 sono primitive della stessa funzione in un intervallo I, allora la funzione differenza $G_1 - G_2$ è costante in I. Infatti, risulta $D(G_1 - G_2) = G_1' - G_2' = 0$ in I, e quindi $G_1 - G_2$ è costante in I per il Corollario ???.

3. Tenendo conto delle precedenti osservazioni, il problema del calcolo di *tutte* le primitive di una funzione f *in un intervallo* si riconduce al calcolo di *una sola* primitiva. Infatti trovatane una, sia G, le funzioni $G + c$, al variare della costante c in $\mathbf{R}$, sono *tutte e sole* le primitive di f in I.

4.1 Funzioni integrabili secondo Riemann

In questo paragrafo considereremo sempre funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato che denoteremo $[a, b]$. Daremo una definizione di integrale di una funzione, ma precisiamo che questa non è l'unica definizione possibile per affrontare i problemi su esposti. Le idee presentate in questo capitolo sono state sviluppate dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866), ed è per questo che l'integrale che definiremo viene detto *integrale di Riemann*.

Definizione 4.3 (suddivisione) *Si dice* suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ *la scelta di un numero finito di punti* $x_0, \ldots, x_n$ *tali che*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b.$$

Per la generica suddivisione di $[a, b]$ *useremo la notazione* $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$.

Notiamo che fra le suddivisioni di un intervallo sussiste l'ovvia relazione di inclusione. Costruiremo l'integrale di una funzione con un procedimento di approssimazione basato sulle nozioni introdotte nella seguente definizione.

Definizione 4.4 (Somme integrali) *Sia data* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *limitata, e fissiamo una suddivisione* $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ *di* $[a, b]$. *Per* $k = 1, \ldots, n$ *poniamo*

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \tag{4.1.1}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \tag{4.1.2}$$

e definiamo la somma integrale inferiore di f relativa a P *ponendo*

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \tag{4.1.3}$$

e la somma integrale superiore di f relativa a P *ponendo*

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}). \tag{4.1.4}$$

Tutta la costruzione è basata sulle proprietà delle somme integrali esposte nella proposizione seguente.

Proposizione 4.5 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *limitata, e siano* P, Q *suddivisioni di* $[a, b]$, *con* $P \subset Q$. *Allora*

$$s(f, P) \le s(f, Q) \le S(f, Q) \le S(f, P).$$

Dim. Proviamo l'enunciato per Q ottenuta da P aggiungendo un punto, poiché nel caso generale basterà ripetere l'argomento per ogni punto appartenente a Q e non a P. Siano allora $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, e $Q = P \cup \{\bar{x}\}$. Se, com'è ovvio, assumiamo che $\bar{x}$ non appartenga a P, esiste un indice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Posto

$$\begin{aligned} m'_j &= \inf\{f(x) : \ x_{j-1} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad m''_j = \inf\{f(x) : \ \bar{x} \leq x \leq x_j\}, \\ M'_j &= \sup\{f(x) : \ x_{j-1} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad M''_j = \sup\{f(x) : \ \bar{x} \leq x \leq x_j\}, \end{aligned}$$

risulta, dall'osservazione 1.9.4, $m'_j \geq m_j$, $m''_j \geq m_j$, $M'_j \leq M_j$, $M''_j \leq M_j$, e quindi

$$\begin{aligned} s(f,Q) - s(f,P) &= m'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + m''_j(x_j - \bar{x}) - m_j(x_j - x_{j-1}) \geq 0, \\ S(f,Q) - S(f,P) &= M'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j(x_j - \bar{x}) - M_j(x_j - x_{j-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Poiché la diseguaglianza $s(f,Q) \leq S(f,Q)$ è ovvia dalla definizione per ogni suddivisione Q, la tesi è dimostrata. $\boxed{QED}$

Definizione 4.6 (Funzioni integrabili) *Data* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *limitata, definiamo il suo* integrale inferiore in $[a,b]$ *ponendo*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : \ P \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

e il suo integrale superiore in $[a,b]$ *ponendo*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : \ P \text{ suddivisione di } [a,b]\}.$$

Diciamo che f *è* integrabile in $[a,b]$ *se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In tal caso, il loro comune valore si denota con

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si dice integrale definito di f in $[a,b]$.

Notiamo che nella notazione appena introdotta per gli integrali la variabile x è *muta*, può cioè essere sostituita con qualunque altro simbolo senza alterare il significato dell'espressione. In particolare, se f è integrabile in $[a,b]$ allora le scritture $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b f(t)dt$ indicano lo stesso numero.

Osservazione 4.7 Mostriamo con un esempio che non tutte le funzioni sono integrabili. Come si vedrà, l'esempio è piuttosto "artificiale", rispetto agli esempi considerati fin qui, che sono sempre stati costruiti usando le funzioni elementari, malgrado sia probabilmente il più semplice possibile. Questo fa capire che in generale le funzioni che incontreremo saranno tutte integrabili negli intervalli chiusi e limitati. D'altra parte, è impornante essere consapevoli che una definizione ha senso solo se qualche oggetto sfugge alla classe che si sta definendo; altrimenti, la definizione è quanto meno inutile. Vediamo l'esempio di funzione non integrabile, che in genere viene chiamata *funzione di Dirichlet*, dal nome di un matematico dell'ottocento. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Poiché fra due qualunque numeri reali ci sono sempre un numero razionale ed un numero irrazionale, per ogni suddivisione $P = \{0 = x_0, \ldots, x_n = 1\}$ di $[0,1]$ e per ogni $k = 1, \ldots, n$ risulta (con la solita notazione) $m_k = 0$ e $M_k = 1$, e quindi $s(f,P) = 0$ e $S(f,P) = 1$. Segue

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

e quindi f non è integrabile.

L'integrale definito gode di alcune semplici proprietà, che valgono in modo ovvio per le somme integrali e seguono facilmente per l'integrale.

Proposizione 4.8 (Proprietà degli integrali) *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabili, e siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora:*

1. **[Linearità]** *La funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile, e risulta*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

2. **[Additività rispetto all'intervallo]** *Se $c \in]a,b[$ allora*

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

3. **[Confronto]** *Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ allora*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Osservazione 4.9 È utile definire l'integrale anche quando il primo estremo d'integrazione è un numero reale maggiore del secondo estremo. Il modo più coerente di definire l'integrale è il seguente:

$$\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx$$

per ogni $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabile. Con questa definizione, la proprietà di additività rispetto all'intervallo vale qualunque sia l'ordine dei punti a, b, c.

La verifica dell'integrabilità di una funzione, più che sulla definizione, fa spesso uso del seguente risultato.

Teorema 4.10 (Caratterizzazione delle funzioni integrabili) *Una $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitata è integrabile in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

DIM. Sia f integrabile, sia $I \in \mathbf{R}$ il valore dell'integrale e sia ε fissato. Siccome I è sia il valore dell'integrale superiore che quello dell'integrale inferiore, dalla Proposizione 1.11 (con $\varepsilon/2$ al posto di ε) segue che esistono due suddivisioni P_1 e P_2 tali che

$$S(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s(f, P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $P = P_1 \cup P_2$ risulta allora, grazie alla Proposizione 4.5,

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) - s(f, P_2) < \varepsilon$$

e la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$, poiché la differenza tra integrale superiore ed integrale inferiore è minore della differenza $S(f, P) - s(f, P)$ per ogni suddivisione, risulta

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, e, per l'Osservazione 1.10, ciò è possibile solo se $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, cioè se f è integrabile. QED

Usando il precedente risultato, si può dimostrare che ampie classi di funzioni sono integrabili. Vediamo alcuni risultati abbastanza generali.

Teorema 4.11 (Integrabilità delle funzioni continue) *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Useremo la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 4.10. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché f è uniformemente continua in $[a, b]$ in virtù del Teorema di Cantor ??, esiste un $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Di conseguenza, se fissiamo una suddivisione $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che $x_k - x_{k-1} < \delta$ per ogni $k = 1, \dots, n$, con la solita notazione risulta $M_k - m_k < \varepsilon$, e pertanto

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$

QED

Definizione 4.12 (Funzioni continue a tratti) *Diciamo che* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è* continua a tratti in $[a, b]$ *se è continua per ogni* x *in* $[a, b]$ *eccetto un numero finito di punti in cui ha discontinuità di prima specie.*

In modo equivalente, si può dire che f è continua a tratti se è continua per ogni x in $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti, siano $x_1, \ldots, x_n$, e le restrizioni di f agli intervalli $[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ sono continue.

Osservazione 4.13 (Integrabilità delle funzioni continue a tratti) Se f è continua a tratti in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$. Infatti, con la notazione appena introdotta, f è integrabile negli intervalli $[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ e risulta

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f + \int_{x_n}^b f$$

Le funzioni monotone in un intervallo possono presentare un numero infinito di punti di discontinuità, ma sono ancora integrabili.

Teorema 4.14 (Integrabilità delle funzioni monotone) *Se* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è monotona in* $[a, b]$ *allora è integrabile in* $[a, b]$*.*

Dim. Useremo anche im questo caso la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 4.10. Per fissare le idee, supponiamo f crescente. In tal caso, per ogni suddivisione $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ risulta, con la solita notazione, $M_k = f(x_k)$ e $m_k = f(x_{k-1})$. Dato allora $\varepsilon > 0$, basta scegliere P tale che $x_k - x_{k-1} < \varepsilon$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, così che si abbia

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \varepsilon(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

$\boxed{QED}$

Il seguente risultato ci permetterà di estendere notevolmente la classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 4.15 *Siano* f *integrabile in* $[a, b]$ *e* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *lipschitziana in ogni intervallo limitato. Allora* $g \circ f$ *è integrabile in* $[a, b]$*.*

Dim. Poiché f è integrabile in $[a, b]$, f è limitata, diciamo $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia L la costante di Lipschitz di g nell'intervallo $[-M, M]$, sicché risulti

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in [-M, M]. \tag{4.1.5}$$

Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste una suddivisione $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon/L$. Posto, per $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\ M_k &= \sup\{f(x) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\ m'_k &= \inf\{g(f(x)) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\ M'_k &= \sup\{g(f(x)) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\} \end{aligned}$$

per (4.1.5) risulta $M'_k - m'_k \le L(M_k - m_k)$. Quindi

$$\begin{aligned} S(g \circ f, P) - s(g \circ f, P) &\le \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\le L \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = L(S(f, P) - s(f, P)) < \varepsilon \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε la tesi segue dal Teorema 4.10 di caratterizzazione delle funzioni integrabili. QED

Il precedente risultato è molto generale: vediamone alcune semplici conseguenze. È utile introdurre le seguenti notazioni. Poniamo

$$\begin{aligned} g^+(y) &= \begin{cases} y & \text{se } y \ge 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases} \\ g^-(y) &= \begin{cases} 0 & \text{se } y \ge 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e, per $f : I \to \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le funzioni f^+ ed f^- si dicono rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di f. Notiamo che le funzioni f^+ ed f^- sono entrambe positive e che $f = f^+ - f^-$, mentre $|f| = f^+ + f^-$. Dal momento che risulta $f^+ = g^+ \circ f$, $f^- = g^- \circ f$ e le funzioni g^+, g^- sono lipschitziane, si ha subito che se f è integrabile in $[a, b]$ allora anche $f^+, f^-, |f|$ sono integrabili. Inoltre, vale la diseguaglianza

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.1.6}$$

Infatti, $-|f| \le f \le |f|$, per la proprietà di confronto, implica

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

e da (1.1.1) segue (4.1.6). Applicando ancora la Proposizione 4.15 si ottiene che se f è integrabile anche f^2 è integrabile ($f^2 = g \circ f$, con $g(y) = y^2$ lipschitziana sugli intervalli limitati) e, se f e g sono integrabili, lo è anche il prodotto fg; infatti,

$$fg = \frac{1}{4}\Big[(f+g)^2 - (f-g)^2\Big]$$

e, se f e g sono integrabili, sia $f+g$ che $f-g$ lo sono, così come i loro quadrati. Naturalmente, è possibile completare questi risultati, estendendoli al caso di potenze diverse da 2 e al prodotto di più di due funzioni.

Possiamo ora dare una soluzione (parziale) al Problema 2 posto all'inizio del capitolo.

Definizione 4.16 (Area di figure piane) *Siano date $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabili, con $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Si dice* area *dell'insieme*

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ a \le x \le b, \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

il numero $\int_a^b (g-f)dx$.

Osserviamo che gli insiemi del tipo descritto nella definizione precedente (cioè gli insiemi di punti compresi tra i grafici di due funzioni integrabili) possono essere usati in situazioni più generali: dato un insieme qualunque del piano, si può infatti tentare di scomporlo nell'unione disgiunta di un numero finito di insiemi del tipo detto, e la sua area sarà data dalla somma delle aree dei singoli sottoinsiemi, ciascuna calcolata come spiegato.

Abbiamo visto che l'integrale è, in un certo senso, un'estensione dell'operazione di somma. Come per un numero finito di numeri $a_1, \dots, a_n$ si definisce la *media aritmetica* m ponendo

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

si può definire un concetto di media integrale.

Definizione 4.17 *Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabile; si definisce la* media integrale di f in $[a,b]$ *ponendo*

$$m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 4.18 (Teorema della media integrale) *Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabile, e siano*

$$m = \min\{f(x) : \ a \le x \le b\}; \qquad M = \max\{f(x) : \ a \le x \le b\};$$

allora $m \le m(f) \le M$. Se inoltre f è continua in $[a,b]$ allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = m(f)$.

DIM. Per provare la prima affermazione, basta integrare le diseguaglianze $m \leq f(x) \leq M$ in $[a,b]$, tenendo conto della proprietà di confronto. Si ottiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

da cui, dividendo per $b-a$, la tesi.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, basta applicare il Teorema ?? dei valori intermedi al numero $m(f) \in [m, M]$. QED

Osserviamo che, se $f(x) \geq 0$, il numero $m(f)$ è l'altezza del rettangolo di base $[a,b]$ che ha la stessa area del *trapeziode di f* definito da $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

4.2 Teorema fondamentale del calcolo e integrali indefiniti

In questo paragrafo mostriamo come si risolve il Problema 1 del calcolo delle primitive di una funzione, e quali sono i legami tra i due problemi enunciati. Iniziamo osservando che, data una funzione f integrabile in $[a,b]$, per ogni $x \in [a,b]$ si può considerare l'integrale tra a ed x di f, ottenendo un risultato che (ovviamente!) dipende solo da x, e pertanto definsce una nuova funzione con dominio $[a,b]$. Vediamone una prima importante proprietà.

Proposizione 4.19 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *integrabile; definiamo la sua* funzione integrale F *ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{4.2.7}$$

La funzione F è lipschitziana in $[a,b]$.

DIM. Sia $M = \max\{f(x) : \ a \leq x \leq b\}$. Notiamo che per l'Osservazione 4.9 e per la proprietà (4.1.6) risulta

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \Big| \leq \Big| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \Big| \leq \Big| \int_{x_1}^{x_2} M dt \Big| \leq M|x_1 - x_2|.$$

QED

La precedente proposizione mostra che la funzione integrale di f è più regolare della f stessa. Utilizzando F si possono costruire le primitive di f, sotto l'ulteriore ipotesi che f sia continua. È questo il contenuto del seguente importante risultato.

Teorema 4.20 (Teorema fondamentale del calcolo) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *continua in* $[a,b]$. *Allora la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b]$$

è derivabile in $[a,b]$ e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$

Dim. Fissiamo $x_0 \in [a,b]$ e proviamo che $F'(x_0) = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di x_0 questo prova la tesi. Esplicitando la definizione della derivata, dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

cioè, esplicitando anche la definizione di limite, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|h| < \delta$ risulta

$$\Big|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| < \varepsilon. \tag{4.2.8}$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$ fissato. Per ipotesi, f è continua in $[a,b]$ e in particolare in x_0, sicché, in corrispondenza del numero ε fissato,

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4.2.9}$$

Notiamo che risulta

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx \tag{4.2.10}$$

(è la media integrale della costante $f(x_0)$ nell'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$) e che, per l'Osservazione 4.9, possiamo scrivere il rapporto incrementale di F nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\Big] \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Da (4.2.11) e (4.2.10) deduciamo

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\Big(f(x) - f(x_0)\Big)dx, \tag{4.2.12}$$

Se ora prendiamo $|h| < \delta$, con δ dato da (4.2.9), risulta anche $|x - x_0| < \delta$ per x compreso tra x_0 ed $x_0 + h$, sicché, usando (4.1.6), otteniamo

$$\Big|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\Big|f(x) - f(x_0\Big|dx < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dx = \varepsilon,$$

cioè (4.2.8). $\boxed{QED}$

Osservazione 4.21 È importante notare che nel teorema fondamentale del calcolo non è necessario che l'intervallo I in cui la funzione f è definita sia chiuso e limitato. Infatti, anche se il dominio di f è un intervallo aperto o illimitato (anche $\mathbf{R}$, che anzi è un caso frequentissimo), pur di fissare (arbitrariamente, ma una volta per tutte) un punto $a \in I$, tutti gli integrali che abbiamo scritto sono calcolati su intervalli chiusi e limitati, in accordo con la trattazione precedente.

Il teorema fondamentale del calcolo mostra come si può calcolare una primitiva di una assegnata funzione continua in un intervallo. In realtà, grazie alle Osservazioni 4.2, il procedimento fornisce *tutte* le primitive cercate. Il teorema mostra lo stretto legame che c'è tra i Problemi 1 e 2 enunciati all'inizio del capitolo: il procedimento usato per risolvere il Problema 2, che fornisce l'area delle regioni di piano descritte nel Paragrafo precedente, permette infatti di costruire, facendo variare l'estremo superiore d'integrazione, le primitive di una funzione *continua* data. Notiamo che, com'è evidente dalla dimostrazione, avremmo potuto definire una funzione integrale diversa, ponendo

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

con c punto *qualunque* di $[a, b]$, ed avremmo ottenuto ancora una primitiva di f (e quindi tutte le primitive). La costruzione appena vista dà ragione della seguente definizione.

Definizione 4.22 (Integrale indefinito) *Sia I un intervallo, e sia $f : I \to \mathbf{R}$; si dice* integrale indefinito di f *l'insieme di tutte le primitive di f. Si denota con*

$$\int f(x)dx.$$

Osservazioni 4.23

1. Non bisogna confondere l'integrale definito con quello indefinito, che sono evidentemente oggetti del tutto diversi: l'integrale di f tra a e b è un numero reale, mentre l'integrale indefinito di f è un insieme di funzioni. Il legame tra i due, che giustifica i nomi, è nella costruzione del secondo, che è basata sulla definizione del primo.

2. Abbiamo dato la definizione di integrale indefinito per una generica funzione f, ma saremo quasi sempre interessati all'integrale di funzioni continue sull'intervallo I. In questo caso possiamo scrivere

   $$\int f(x)dx = \Big\{\int_a^x f(t)dt + c : \ c \in \mathbf{R}\Big\}, \tag{4.2.13}$$

   dove a è un qualunque punto di I. Infatti, la funzione integrale di f è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo, e tutte le altre primitive si ottengono sommando un'arbitraria costante, come spiegato nelle Osservazioni 4.2.

3. Se il dominio di f non è un intervallo, ma, per esempio, l'unione di più intervalli, allora la descrizione dell'integrale indefinito cambia. Per esempio, sapendo che $\log x$ è una primitiva della funzione $1/x$, definita per $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$, l'integrale indefinito di $1/x$ è dato da tutte le funzioni del tipo

   $$\begin{cases} \log x + c_1 & \text{se } x > 0 \\ \log x + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

al variare di tutte le possibili scelte di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, che non c'è alcun motivo di scegliere uguali. In particolare, la descrizione completa dell'integrale indefinito non dipende da una sola costante arbitraria (come nel caso in cui il dominio sia un intervallo) ma da più di una, in questo caso due. La ragione è che nell'Osservazione 4.2.2 abbiamo usato il Corollario ???, che vale per funzioni derivabili *in un intervallo*.

4. Il Teorema fondamentale del calcolo 4.20 afferma che *ogni funzione continua ammette primitive*. Bisogna tener distinta ques'affermazione, che è molto generale, dal problema del *calcolo effettivo* delle primitive di una funzione data. Anzi, anche l'espressione "calcolo effettivo" è da definire con chiarezza. In generale, il problema sarà di determinare le primitive di una *funzione elementare*, che, com'è noto, è sostanzialmente il risultato di (un numero finito di) operazioni algebriche e di composizione sulle funzioni elencate nel Capitolo 1. Anche in questo caso, però, *non è detto che le primitive della funzione data siano ancora funzioni elementari in quest'accezione*. Possiamo dare esempi semplicissimi, come e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, o le funzioni irrazionali del tipo $x^m(a + bx^n)^p$, con $a, b \in \mathbf{R}$ non nulli, $m, n, p \in \mathbf{Q}$ tali che nessuno dei tre numeri
$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad p + \frac{m+1}{n}$$
sia intero.

Il legame tra l'integrale indefinito e quello definito è ulteriormente illustrato dal seguente risultato, che è il principale strumento per calcolare integrali definiti senza ricorrere alla definizione.

Teorema 4.24 (Secondo teorema fondamentale del calcolo) *Se $f : I \to \mathbf{R}$ è continua in I e G è una qualunque primitiva di f, allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dim. Posto al solito $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per l'Osservazione 4.2.2, esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$, e quindi
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = [G(b) - c] - [G(a) - c] = G(b) - G(a).$$

$\boxed{QED}$

4.3 Metodi d'integrazione

In questo paragrafo affronteremo il problema del calcolo effettivo degli integrali indefiniti e definiti, cioè della determinazione delle primitive di una funzione data e dell'applicazione di questo al calcolo degli integrali definiti. Dal momento che il teorema fondamentale del calcolo dice sostanzialmente che l'integrazione indefinita è il procedimento inverso della derivazione, è lecito aspettarsi che i metodi di calcolo degli integrali indefiniti siano fondati su un'opportuna elaborazione dei metodi di calcolo delle derivate. Così è, infatti, ed i due principali metodi d'integrazione, detti *per parti* e *per sostituzione*, sono, rispettivamente, i procedimenti inversi del calcolo delle derivate del prodotto e della composizione di funzioni.

Teorema 4.25 (Integrazione per parti) *Siano f e g due funzioni di classe C^1 nell'intervallo I. Allora*
$$\int fg'dx = fg - \int f'g.$$

Dim. Basta osservare che la funzione fg è una primitiva della funzione $fg' + f'g$. QED

Osservazioni 4.26

1. Il teorema precedente può sembrare inutile ai fini del calcolo effettivo di integrali, dal momento che al primo ed al secondo membro appaiono due integrali simili. In realtà, come si vede su esempi concreti, se usata in modo opportuno, la formula può fornire un integrale più semplice di quello di partenza. Per esempio, consideriamo l'integrale
$$\int xe^x dx.$$
Posto $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, risulta evidentemente $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^x$, sicché si ha:
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c, \qquad c \in \mathbf{R}$$
ed è evidente che al primo passaggio si è ottenuto un integrale più semplice di quello dato.

2. Anche quando dall'integrazione per parti si ottiene un integrale molto simile a quello dato, non è detto che il calcolo sia stato inutile. Ad esempio, consideriamo l'integrale
$$\int \cos^2 x\, dx.$$
Posto $f(x) = g'(x) = \cos x$, risulta $f'(x) = -g(x) = -\sin x$, e si ha:
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= -\sin x \cos x + \int \sin^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\, dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx\end{aligned}$$
da cui
$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

3. La formula di integrazione per parti si applica ovviamente anche agli integrali definiti. Con la notazione del teorema, se $[a,b] \subset I$, allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Teorema 4.27 (Integrazione per sostituzione) *Siano I, J due intervalli, $f : I \to \mathbf{R}$ continua, $\varphi : J \to I$ di classe C^1. Risulta:*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{4.3.14}$$

Per quanto riguarda gli integrali definiti, risulta

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{4.3.15}$$

per ogni intervallo $[c,d] \subset J$.

Dim. Se G è una qualunque primitiva di f, allora $G \circ \varphi$ è una primitiva della funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$. Infatti:

$$\frac{d}{dt}(G \circ \varphi) = (G' \circ \varphi)\varphi' = f \circ \varphi)\varphi'$$

e quindi la formula dice semplicemente che l'integrale indefinito di f è $\{G + c\}$ se e solo se l'integrale indefinito di $f \circ \varphi$ è $\{G \circ \varphi + c\}$. $\boxed{QED}$

Osservazioni 4.28

1. Il modo forse più semplice (almeno dal punto di vista mnemonico) di applicare il Teorema 4.27 è il seguente. Ricordando la notazione $\varphi' = \frac{dx}{dt}$ per la derivata della funzione $x = \varphi(t)$, si può ricavare (formalmente) $dx = \varphi'(t)dt$, e questa sostituzione, assieme alla $x = \varphi(t)$, fornisce l'enunciato corretto del teorema, malgrado non sia giustificata dalle conoscenze presentate fin qui.

2. Il Teorema 4.27 si può usare nei due versi. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \sqrt{1-x^2}dx.$$

Ponendo $x = \varphi(t)$ con $\varphi(t) = \sin t$ si ottiene, procedendo come appena indicato, $dx = \cos t\,dt$ e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

e l'ultimo integrale è stato calcolato nell'Osservazione 4.26.2. Invece, se si considera l'integrale

$$\int \tan t\,dt$$

conviene porre $x = \varphi(t) = \cos t$, sicché $dx = \varphi'(t)dt = \sin t\, dt$ e si ottiene

$$\int \tan t\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c = \log|\cos t| + c.$$

3. Nel calcolo per sostituzione degli intergali definiti si può procedere in due modi. Dovendo calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, si possono prima calcolare le primitive in termini della variabile x e sostituire alla fine i valori a e b, oppure calcolare le primitive in termini della variabile t e sostituire alla fine i valori c e d tali che $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. È essenziale però verificare l'applicabilità del teorema *nell'intervallo* $[a, b]$. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt.$$

È facile verificare che la sostituzione $x = \tan t$ fornisce

$$\int \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{2 + \tan^2 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{2 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(x/\sqrt{2}) + c.$$

Se ora proviamo a sostituire gli estremi, otteniamo che $t = 0$ dà $x = 0$ e $t = \pi$ dà ancora $x = 0$, e da questi calcoli dedurremmo che l'integrale è nullo, risultato assurdo dal momento che l'integrale di una funzione strettamente positiva è strettamente positivo. L'errore è dovuto al fatto che la funzione tan *non è definita nell'intervallo* di integrazione $[0, \pi]$ perché $\pi/2$ non è nel suo dominio. La sostituzione indicata si può ancora adoperare, ma il calcolo corretto è quest'altro (in cui si tiene conto che $\cos^2(t + \pi/2) = \cos^2 t$):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt + \int_{\pi/2}^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + x^2} dx = \sqrt{2}\pi/4, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato nell'esempio 4.42 del paragrafo seguente.

4. A volte è dato da calcolare un integrale definito nella forma

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si vuol cercare una funzione φ che ne semplifichi il calcolo. Gli estremi c e d dell'integrale nella nuova variabile t tale che $x = \varphi(t)$ saranno due punti del dominio J di φ tali che $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$ e in generale non sono univocamente determinati, dal momento che nell'enunciato del Teorema 4.27 non abbiamo supposto che φ sia invertibile. Se però φ è invertibile, possiamo scrivere (4.3.15) nella forma

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{4.3.16}$$

A tal proposito, osserviamo che se la funzione φ è decrescente allora l'ordine degli estremi di integrazione viene scambiato, cioè $a < b$ allora $\varphi^{-1}(a) > \varphi^{-1}(b)$. Se si vuole conservare l'ordine crescente negli estremi d'integrazione, detto $[c, d]$ l'intervallo di estremi $\varphi^{-1}(a)$ e $\varphi^{-1}(b)$, la formula (4.3.16) va scritta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt.$$

4.4 Integrali impropri

Finora abbiamo trattato solo integrali di funzioni *limitate* su intervalli *limitati*. Vediamo ora com'è possibile generalizzare la teoria per considerare casi più generali, che fra l'altro, come vedremo nel Capitolo 5, sono connessi con la teoria delle serie numeriche. Distinguiamo due casi, quello di funzioni non limitate su intervalli limitati e quello di intervalli non limitati, che si chiamano integrali generalizzati (o impropri) di prima e di seconda specie, rispettivamente. Naturalmente, tutta la trattazione si basa sui procedimenti già visti.

Definizione 4.29 (Integrali generalizzati di 1^a specie) *Sia $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c]$ per ogni $c < b$; diciamo che f* è integrabile in senso generalizzato in *$[a, b[$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in *$[a, b[$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c |f(x)|dx.$$

Se $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ è integrabile in $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b]$, allora i limiti considerati sopra vanno sostituiti con

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx, \qquad \lim_{c\to a^+} \int_c^b |f(x)|dx,$$

Sulle relazioni tra integrabilità assoluta e non assoluta torneremo nell'Osservazione 4.36 e nell'Esempio 4.44.

La proprietà che la funzione f sia (assolutamente) integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ dipende da quanto velocemente $f(x)$ diventa grande per x che tende a b da destra. Ritroviamo questa considerazione qualitativa nel fondamentale esempio che segue.

Esempio 4.30 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $]0, 1]$ della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$. Ovviamente, per $\alpha \leq 0$ la funzione è continua nell'intervallo chiuso $[0, 1]$ e quindi è integrabile, grazie al Teorema 4.11. Il problema dell'integrabilità in senso generalizzato si pone per $\alpha > 0$. Usando la definizione otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx &= \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \lim\limits_{c\to 0^+} \dfrac{1-c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\ \\ \lim\limits_{c\to 0^+} -\log c & \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha+1} & \alpha < 1 \\ \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

e quindi x^α è integrabile in senso generalizzato in $]0,1]$ se e solo se $\alpha < 1$.

Come abbiamo accennato prima, una funzione che tenda all'infinito troppo velocemente in un estremo dell'intervallo di definizione non sarà integrabile in senso generalizzato. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende all'infinito per $x \to 0$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, come spiegato nell'esempio, è il valore $\alpha = 1$: se α è più piccolo la funzione x^α è integrabile, se α è più grande non lo è. Questo punto di vista è utile per comprendere il seguente teorema di confronto. Trattiamo il caso di una funzione che può essere illimitata in prossimità dell'estremo destro dell'intervallo di definizione. Nel caso in cui il problema dell'integrabilità si ponga nell'estremo sinistro, le modifiche da apportare sono ovvie.

Teorema 4.31 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 1^a specie) *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbf{R}$ integrabili in $[a, c]$ per ogni $c < b$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b[$. Se g è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$.*

Osservazione 4.32 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g *non* è integrabile in senso generalizzato allora neanche f lo è.

Combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 4.30 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.33 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in [a, b[$. Allora:*

(i) se esistono $C > 0$ ed $\alpha < 1$ tali che $|f(x)| \leq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato;

(ii) se esistono $C > 0$ ed $\alpha \geq 1$ tali che $|f(x)| \geq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, b[$ allora f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato.

Osservazione 4.34 Quanto visto finora per funzioni definite in un intervallo semiaperto a destra $[a,b[$ si può facilmente riformulare per funzioni definite in un intervallo semiaperto a sinistra del tipo $]a,b]$ o per funzioni definite in un intervallo privato di un punto interno.

Se $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile in $[c,b]$ per ogni $c \in]a,b]$, le condizioni nel Corollario 4.33 divengono

$$|f(x)| \leq C(x-a)^{-\alpha}, \qquad |f(x)| \geq C(x-a)^{-\alpha};$$

la prima, con $\alpha < 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \geq 1$, garantisce la non integrabilità.

Consideriamo ora $c \in]a,b[$, e sia $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ integrabile in $[a, c-\delta]$ e in $[c+\delta, b]$ per ogni $\delta > 0$. Allora, f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ se è integrabile in senso generalizzato sia in $[a,c]$ che in $[c,b]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{c-\delta} f(x)dx, \qquad \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. In altri termini, nel caso di uno (o più) punti singolari *interni* all'intervallo di integrazione, si deve studiare un punto per volta, e ciascuno separatamente da destra e da sinistra.

Passiamo ora a considerare l'integrabilità di funzioni su semirette. Anche in questo caso, studiamo in dettaglio il caso della semiretta $[a, +\infty[$, ed esponiamo poi le modifiche da fare nel caso della semiretta $]-\infty, b]$).

Definizione 4.35 (Integrali generalizzati di 2^a specie) *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ integrabile in $[a,b]$ per ogni $b > a$; diciamo che f è* integrabile in senso generalizzato in *$[a,+\infty[$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in *$[a,+\infty[$ se esiste finito il limite*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b |f(x)|dx.$$

Osservazione 4.36 Si può dimostrare che, sia nel caso degli integrali generalizzati di prima che di seconda specie, se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a,b[$ (o $[a,+\infty[$) allora è anche integrabile in senso generalizzato (senza valore assoluto) nello stesso intervallo. Nell'esempio 4.44 vedremo che il viceversa non è vero. Questo tipo di fenomeno sarà più chiaro in relazione alle serie numeriche, dove saremo in grado di dare maggiori dettagli, vedi Proposizione 5.9.

Esempio 4.37 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $[1,+\infty[$ della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$. Usando la definizione otteniamo:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim\limits_{c \to +\infty} \dfrac{c^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\ \\ \lim\limits_{c \to 0^+} \log c & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e quindi $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in $[1,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$.

In questo caso, una funzione che tenda a zero troppo lentamente per $x \to +\infty$ non sarà integrabile in senso generalizzato. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende a zero per $x \to +\infty$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, anche in questo caso, è il valore $\alpha = 1$: stavolta, se α è più grande di 1 la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile, se α è più piccolo non lo è. Vediamo ora un'altra interessante classe di esempi.

Esempio 4.38 Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato nell'intervallo $[2,+\infty[$ della funzione $f(t) = \frac{1}{t \log^\alpha t}$ al variare del parametro $\alpha > 0$. In base alle proprietà dei logaritmi, non è possibile applicare teoremi di confronto con le funzionistudiate nell'esempio 4.37. Possiamo però usare l'esempio 4.37, dopo aver calcolato l'integrale con la sostituzione $x = \log t$, e otteniamo:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t \log^\alpha t} dt = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

e quindi $\frac{1}{t \log^\alpha t}$ è integrabile in senso generalizzato in $[2,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$.

Anche per gli intervalli illimitati vale un teorema di confronto, analogo al Teorema 4.31

Teorema 4.39 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 2^a specie) *Siano $f, g : [a,+\infty[\to \mathbf{R}$ integrabili in $[a,b]$ per ogni $b > a$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,+\infty[$. Se g è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$.*

Osservazione 4.40 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g *non* è integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ allora neanche f lo è.

Come prima, combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 4.37 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.41 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a,+\infty[\to \mathbf{R}$ integrabile in $[a,b]$ per ogni $b > a$. Allora:*

(i) *se esistono* $C > 0$ *ed* $\alpha > 1$ *tali che* $|f(x)| \leq Cx^{-\alpha}$ *per ogni* $x \in [a, +\infty[$ *allora* f *è assolutamente integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$*;*

(ii) *se esistono* $C > 0$ *ed* $\alpha \leq 1$ *tali che* $|f(x)| \geq Cx^{-\alpha}$ *per ogni* $x \in [a, +\infty[$ *allora* f *non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in* $[a, +\infty[$*.*

Il seguente esempio è interessante anche in relazione all'Osservazione 4.28.4.

Esempio 4.42 Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} dx,$$

con $m > 0$. Il Corollario 4.41 ci dice subito che l'integrale è convergente, ma è ancora più semplice procedere al calcolo diretto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} dx = \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (x/m)^2} dx = \frac{1}{m} \lim_{x \to +\infty} \arctan(x/m) = \frac{\pi}{2m}.$$

Osservazioni 4.43 Consideriamo ora il caso in cui l'intervallo d'interesse sia una semiretta del tipo $]-\infty, b]$ o tutta la retta $]-\infty, +\infty[$. Come nel caso degli integrali di prima specie, sarà sufficiente indicare in breve le modifiche da fare. Distinguiamo i due casi.

1. Sia $f :]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. I limiti considerati nella Definizione 4.35 vanno sostituiti con

   $$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx, \qquad \lim_{a \to -\infty} \int_a^b |f(x)| dx,$$

   e le condizioni nel Corollario 4.41 con

   $$|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}, \qquad |f(x)| \geq C|x|^{-\alpha};$$

   la prima, con $\alpha > 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \leq 1$, garantisce la non integrabilità in $]-\infty, b]$.

2. Sia ora $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. Allora, f è integrabile in senso generalizzato in $\mathbf{R}$ se è integrabile in senso generalizzato sia in $[0, +\infty]$ che in $-\infty, 0]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

   $$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x) dx, \qquad \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x) dx.$$

   Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. Naturalmente, l'estremo finito d'integrazione nelle formule precedenti è del tutto arbitrario, e si è scelto 0 solo per non introdurre altri parametri. Qualunque numero reale andrebbe bene.

Esempio 4.44 Consideriamo la funzione $\frac{\sin x}{x}$, per $x \in \mathbf{R}$ (com'è noto, la funzione vale 1 per $x = 0$, trattandosi di una discontinuità eliminabile). Allora l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{4.4.17}$$

è convergente (e vale π), mentre l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big| dx \tag{4.4.18}$$

non è convergente. Questo prova che esistono funzioni integrabili in senso generalizzato che non sono *assolutamente* integrabili in senso generalizzato. È abbastanza facile vedere la divergenza dell'integrale in (4.4.17), mentre non è altrettanto facile provare la convergenza dell'integrale in (4.4.17). La difficoltà risiede nel fatto che le primitive della funzione $\frac{\sin x}{x}$, che ovviamente esistono per il Teorema fondamentale del calcolo, non sono esprimibili in termini delle funzioni elementari (come già osservato nell'Osservazione 4.23.4), per cui il calcolo esplicito, come negli esempi precedenti, è impossibile. Il fenomeno è simile a quello relativo alle serie numeriche, dove avremo più strumenti, vedi l'Osservazione 5.27.4.