CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 21.1.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \, \frac{1}{x-1}.$$

2. Si studi il seguente limite al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x + x^2) - \operatorname{sen} x - x^2}{\operatorname{tg}^\alpha x}.$$

3. Si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} \operatorname{sen} n$$

4. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = \cos t$$

a) se ne determini l'integrale generale;
b) si dica se ammette soluzioni limitate;
c) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

Soluzioni

1. La funzione non è definita per $x = 1$, quindi il dominio naturale (per ora) è $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e per questo motivo si può estendere la funzione f ad una funzione definita anche nel punto 1 definendola uguale a 0. Chiameremo per semplicità ancora f la nuova funzione che, a questo punto, ha come dominio $\mathbf{R}$.
Vediamo di studiarne la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} \left[1 + \frac{1}{x-1} \right] = -e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} \left[\frac{x}{x-1} \right].$$

Per studiare il segno di f' è sufficiente studiare il segno della quantità $x/(x-1)$ visto che $-e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2}$ è negativo per ogni $x \neq 1$:

$$\frac{x}{x-1} \begin{cases} = 0 & \text{per } x = 0 \\ < 0 & \text{per } x \in (0,1) \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{per } x = 0 \\ > 0 & \text{per } x \in (0,1) \\ < 0 & \text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Si osservi che

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0.$$

Studiamo la derivata seconda. Scrivendo

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x}{(x-1)^3}$$

si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\frac{1}{x-1}}\,\frac{x}{(x-1)^5} - e^{\frac{1}{x-1}}\,\frac{(x-1)^3-3(x-1)^2x}{(x-1)^6} = \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left[\frac{x}{(x-1)^5} - \frac{(x-1)^3-3(x-1)^2x}{(x-1)^6}\right] = \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left[\frac{x}{(x-1)^5} - \frac{(x-1)-3x}{(x-1)^4}\right] = \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\,\frac{1}{(x-1)^4}\left[\frac{2x^2-1}{x-1}\right]
\end{aligned}$$

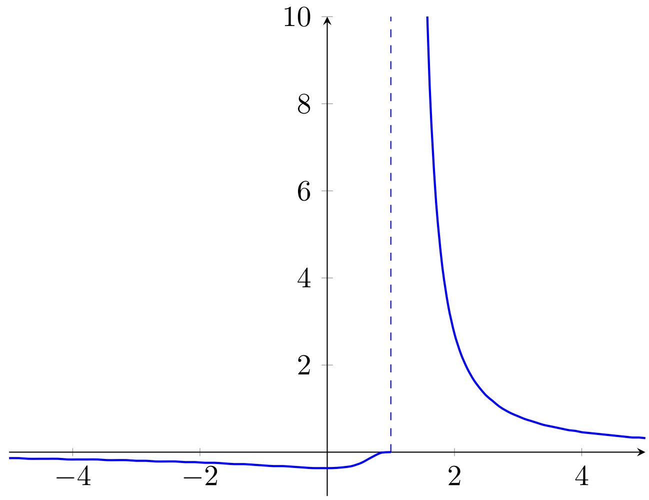
per cui studiare il segno della derivata seconda si riduce a studiare il segno di $(2x^2-1)/(x-1)$. Si ha che

$$\begin{aligned}
&2x^2-1>0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2>\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right),\\
&x-1>0 \quad\Longleftrightarrow\quad x>1
\end{aligned}$$

per cui

$$f''(x)\begin{cases} =0 & \text{per } x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ >0 & \text{per } x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup(1,+\infty) \\ <0 & \text{per } x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right) \end{cases}$$

Questi dati forniscono informazioni riguardo la convessità della funzione f.
Il punto $x=0$, stazionario, è punto di minimo locale, visto che in un intorno di 0 $f''>0$. La stessa conclusione si trae dallo studio del segno di f'. Essendo $x=0$ l'unico punto stazionario, f negativa per $x<1$, decrescente per $x<0$, crescente per $x\in(0,1)$. Inoltre f è positiva per $x>1$, quindi il punto $x=0$ è anche di minimo assoluto. La funzione non ammette massimo (assoluto) poiché è illimitata.
Il grafico è riportato nella figuar che segue:



2. Sviluppando la funzione $t \mapsto \operatorname{sen} t$ al primo ordine si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+x^2) &= x + x^2 + o\big((x+x^2)^2\big) = x + x^2 + o(x^2) \\ \operatorname{sen} x &= x + o(x^2) \end{aligned}$$

per cui il numeratore diventa

$$\operatorname{sen}(x+x^2) - \operatorname{sen} x - x^2 = o(x^2).$$

Questo non è sufficiente per conoscere l'ordine di infinitesimo, bisogna sviluppare ad un ordine superiore:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+x^2) &= x + x^2 - \frac{1}{6}(x+x^2)^3 + o\big((x+x^2)^4\big) = x + x^2 - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^4) + o(x^4) \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

per cui il numeratore in questo caso diventa

$$\operatorname{sen}(x+x^2) - \operatorname{sen} x - x^2 = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4),$$

quindi abbiamo trovato l'ordine di infinitesimo del numeratore, che è 4.
Per quanto riguarda il denominatore **non serve fare lo sviluppo di Taylor**, in quanto è già noto l'ordine di infinitesimo che è α, essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}^\alpha x}{x^\alpha} = 1.$$

Si conclude che il limite richiesto è

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \qquad & \text{per } \alpha = 4, \\ -\infty \qquad & \text{per } \alpha > 4, \\ 0 \qquad & \text{per } 0 < \alpha < 4. \end{aligned}$$

3. La prima cosa da osservare è che la serie data non è a termini di segno costante. Si può sperare che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$$
converga e da ciò dedurre, poiché
$$\left| \frac{\operatorname{sen} n \log n}{n^2} \right| \leqslant \frac{\log n}{n^2},$$
usando il criterio del confronto che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n \log n}{n^2} \right| \qquad \text{converge .}$$
Infine, dalla convergenza assoluta della serie data, concludere che la serie data converge.

Vediamo quindi di studiare la convergenza della serie $\sum_n \frac{\log n}{n^2}$ che è a termini positivi. Vediamo tre possibili svolgimenti.
Il primo usa il criterio del confronto. Poiché
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0$$
scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1/2$ si ha che, poiché
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^{1/2}} = 0$$
si ha che definitivamente
$$0 < \frac{\log n}{n^{1/2}} \leqslant 1$$
e di conseguenza si ha che, definitivamente,
$$\frac{\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Per il criterio del confronto, poiché la serie $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, si ha che converge anche la serie
$$\sum_n \frac{\log n}{n^2}.$$
Si può anche usare il criterio di condensazione di Cauchy. Derivando la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ ci si accorge che f è strettamente decrescente per $x > \sqrt{e}$. Poiché
$$\sum_n 2^n \frac{n \log 2}{(2^n)^2}$$

converge (per questa si può utilizzare il criterio della radice n-esima) si conclude che la serie data converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.
Infine si può anche usare il criterio integrale. Valutando (integrando per parti)

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

si conclude.
4. a) Il polinomio associato all'equazione è

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

che ha come soluzioni $\lambda=1$ e $\lambda=-2$ da cui si ricava che le funzioni

$$t\mapsto c_1e^t+c_2e^{-2t},$$

al variare di c_1, c_2 costanti, sono tutte soluzioni. Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea cerchiamo tra le funzioni del tipo

$$v(t)=a\cos t+b\,\mathrm{sen}\,t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} v'(t)&=-a\,\mathrm{sen}\,t+b\cos t\\ v''(t)&=-a\cos t-b\,\mathrm{sen}\,t \end{aligned}$$

per cui inserendo v nell'equazione si ottiene

$$-a\cos t-b\,\mathrm{sen}\,t-a\,\mathrm{sen}\,t+b\cos t-2a\cos t-2b\,\mathrm{sen}\,t=\cos t$$

da cui

$$\begin{cases} -3a+b=1\\ -3b-a=0 \end{cases}$$

Si conclude che la funzione

$$v(t)=-\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,t$$

è soluzione. L'insieme delle soluzioni è dato da

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{-2t}-\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\,\mathrm{sen}\,t.$$

b) Prendendo $c_1=c_2=0$ si ottiene una soluzione limitata, per cui la risposta alla seconda domanda è affermativa.
c) Imponendo $y(0)=1/4$ si ha

$$\begin{cases} c_1+c_2-\frac{3}{10}=\frac{1}{4}\\ c_1-2c_2+\frac{1}{10}=0 \end{cases}$$

da cui $c_1=1/3$, $c_2=13/60$.