CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19.2.2020

Traccia 1

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{|x+2|}\right).$$

2. Si studi il seguente limite al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - (\cosh\sqrt{x})^2}{(\operatorname{senh} x)^\alpha}.$$

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 9}}\, dx$$

4. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} = 0 \qquad (*)$$

dopodiché si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

$(*)$ Si ricorda che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$

Soluzioni

1. La funzione non è definita per $x = -2$, per cui il suo dominio naturale è $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Vediamo che può essere estesa a tutto $\mathbf{R}$.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

e per questo motivo si può estendere la funzione f ad una funzione definita anche nel punto -2 definendola uguale a $-\frac{\pi}{2}$. Per cui considereremo la nuova funzione, denotata ancora con f per semplicità, definita in tutto $\mathbf{R}$, che risulta continua in tutto il suo dominio.
Vediamo di studiarne la derivata prima. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2 + x^2} \left(|x+2| - \frac{x+2}{|x+2|}\, x \right) = \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{2x^2 + 4x + 4} & \text{per } x < -2 \\ \dfrac{2}{2x^2 + 4x + 4} & \text{per } x > -2 \end{cases} = \\ &= \frac{2}{2x^2 + 4x + 4} \frac{x+2}{|x+2|} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \frac{x+2}{|x+2|}. \end{aligned}$$

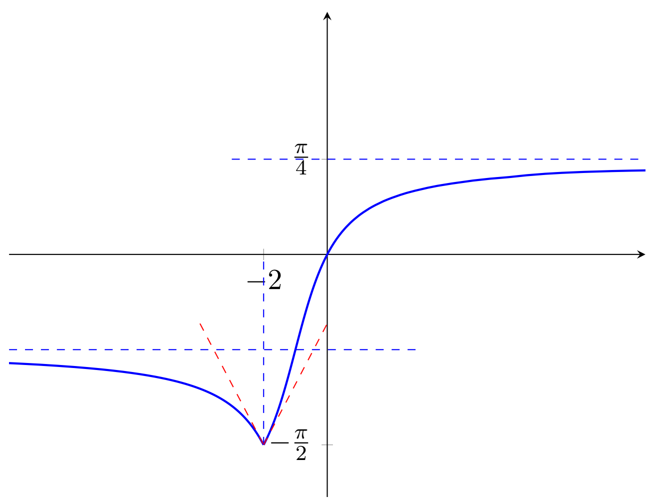
Lo studio del segno di f' è immediato: si vede innanzitutto che f' non è definita per $x = -2$, poi che f' non si annulla mai, è negativa per $x < -2$, è positiva per $x > -2$. Studiamo la regolarità di f':

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

per cui f' non è estendibile nel punto -2 e il grafico di f avrà uno spigolo nel punto -2, come evidenziato dal tratteggio rosso nella figura più in basso.
Studiamo la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8x + 8}{(2x^2 + 4x + 4)^2} & \text{per } x < -2 \\ -\dfrac{8x + 8}{(2x^2 + 4x + 4)^2} & \text{per } x > -2 \end{cases}$$

il cui segno è positivo per $x \in (-2,-1)$, nullo per $x = -1$, negativa per $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,+\infty)$.
In conclusione la funzione ha due asintoti orizzontali, è decrescente e concava in $(-\infty,-2)$, ha un cambio di concavità in -1, è crescente per $x > -2$ ed è convessa tra -2 e -1, mentre concava in $(-1,+\infty)$.
Non ammette massimo e ammette minimo assoluto nel punto -2 dove assume il valore $-\pi/2$. Il grafico è riportato in figura:



2. Useremo gli sviluppi di Taylor. In questo caso **non è necessario sviluppare il denominatore** del quale conosciamo già l'ordine di inifinitesimo.
Sviluppando la funzione $x \mapsto e^x$ al secondo ordine si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e la funzione $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ al quarto ordine si ha

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2).$$

Da questo si ottiene che

$$\begin{aligned} \cosh\sqrt{x} = \frac{1}{2}\Big[1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2) + \\ + 1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\Big] = \\ = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2). \end{aligned}$$

Infine, elevando al quadrato,

$$\begin{aligned}\cosh^2\sqrt{x} = &\ \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}+o(x^2)\right)^2 = \\ = &\ 1+x+\frac{x^2}{4}+2\frac{x^2}{4!}+o(x^2) = 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\end{aligned}$$

dove i termini di ordine superiore a 2 sono inglobati in $o(x^2)$.
Si osservi come è possibile anche trovare lo sviluppo svolgendo prima il quadrato e poi sviluppando:

$$\begin{aligned}\cosh^2\sqrt{x} &= \left(\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}+2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}\Bigg[1+2\sqrt{x}+\frac{4x}{2}+\frac{8x^{3/2}}{6}+\frac{16\,x^2}{4!}+o(x^2)+ \\ &\qquad +1-2\sqrt{x}+\frac{4x}{2}-\frac{8x^{3/2}}{6}+\frac{16\,x^2}{4!}+o(x^2)+2\Bigg] = \\ &= 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\end{aligned}$$

da cui infine

$$e^x-(\cosh\sqrt{x})^2 = \frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2) = \frac{x^2}{6}+o(x^2).$$

Si conclude quindi che

$$\frac{e^x-(\cosh\sqrt{x})^2}{(\operatorname{senh} x)^\alpha} = \frac{\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x^\alpha}\ \frac{x^\alpha}{(\operatorname{senh} x)^\alpha}$$

e passando al limite si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} &\qquad \text{per } \alpha = 2,\\ +\infty &\qquad \text{per } \alpha > 2,\\ 0 &\qquad \text{per } 0 < \alpha < 2.\end{aligned}$$

3. L'integrale può essere fatto facendo due sostituzioni,

$$y = e^x \qquad \text{e poi} \qquad t = \sqrt{y-9},$$

oppure una sola sostituzione

$$t = \sqrt{e^x-9}.$$

Supponendo di farne una sola (provare a farne due per esercizio) si ottiene

$$\begin{aligned}e^x &= t^2+9,\\ x &= \log(t^2+9),\\ dx &= \frac{2t}{t^2+9}\,dt\end{aligned}$$

da cui si ricava l'integrale

$$\int \frac{2t}{t(t^2+9)}\,dt = \int \frac{2}{t^2+9}\,dt = \frac{2}{9}\int \frac{1}{(t/3)^2+1}\,dt.$$

Ponendo $s = t/3$ si ottiene

$$\frac{2}{9}\int \frac{3}{s^2+1}\,ds = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} s + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

A ritroso, sostituendo a s la quantità $\frac{1}{3}\sqrt{e^x-9}$ si ottiene che l'insieme delle primitive è dato da

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-9}}\,dx = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{e^x-9}}{3}\right) + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

4. La serie data è a segni alterni. Detto a_n il termine $\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\log(n^{n!})}$ si ha che la serie data converge se il termine generale è infinitesimo e decrescente. Verifichiamo che sia infinitesimo: come suggerito nella traccia valutiamo il limite di a_n usando la formula di Stirling:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\,\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\,\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 0.\end{aligned}$$

Verifichiamo ora che $\{a_n\}_n$ sia decrescente:

$$\begin{gathered} a_{n+1} < a_n \\ \Updownarrow \\ \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} < \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \\ \Updownarrow \\ \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n}\frac{1}{e}\,\frac{1}{n!} < \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \\ \Updownarrow \\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{e} < 1 \\ \Updownarrow \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e \end{gathered}$$

Poiché l'ultima disuguaglianza è vera per ogni n si ha che $\{a_n\}_n$ è decrescente e quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge.