CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6.7.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.
Se alcune parti risultassero non leggibili sarà difficile valutarle, si consiglia quindi di spiegare e scrivere in maniera chiara.

1. Si studi in dettaglio la funzione seguente e se ne tracci un grafico qualitativo:

$$f(x) = \left|x^2 - 2x\right|e^x.$$

2. Si studi il seguente limite al variare dei parametri $\alpha, \beta > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - \sqrt{1 + \alpha x + \alpha x^2}}{\operatorname{sen}^\beta x}.$$

3. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + 3x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

È possibile dire qual è il dominio massimale della soluzione?

4. Si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

Soluzioni

1. La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbf{R}$. Studiando i limiti al bordo del dominio si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Vediamo se e dove è derivabile: f sarà derivabile ovunque tranne, al più, nei punti in cui si annulla la quantità $x^2 - 2x$, cioè in $x = 0$ e in $x = 2$. Deriviamola:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{|x^2-2x|}{x^2-2x}\,(2x-2)\,e^x + |x^2-2x|e^x = \\
&= |x^2-2x|\,e^x\left[\frac{2x-2}{x^2-2x}+1\right] = \\
&= |x^2-2x|\,e^x\,\frac{x^2-2}{x^2-2x} = \frac{|x^2-2x|}{x^2-2x}\,e^x\,(x^2-2)
\end{aligned}$$

per cui il dominio di f' è $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Studiando i limiti di f' nei punti 0 e 2 si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^-} f'(x) &= -2\\
\lim_{x\to0^+} f'(x) &= 2\\
\lim_{x\to2^-} f'(x) &= -2\,e^2\\
\lim_{x\to2^+} f'(x) &= 2\,e^2.
\end{aligned}$$

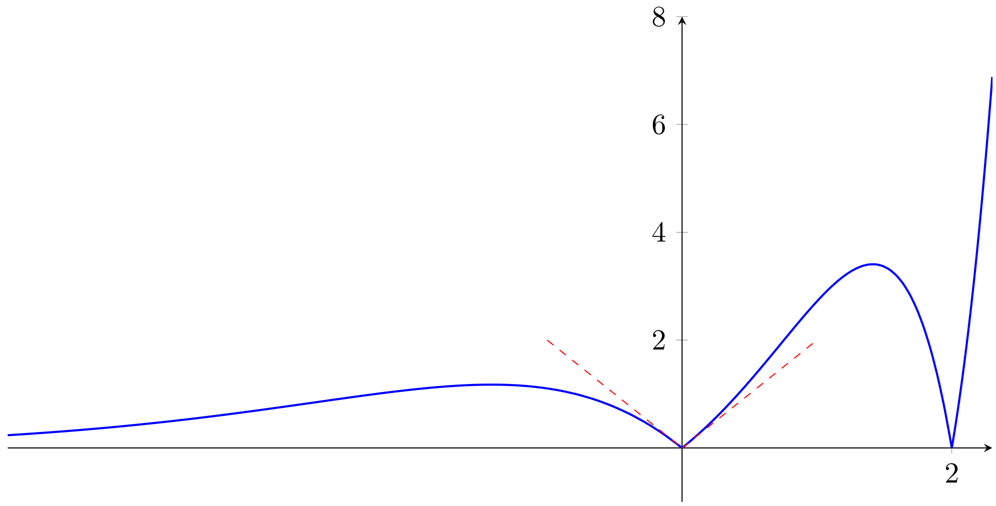
Studiamo il segno di f': è sufficiente studiare il segno di $\frac{x^2-2}{x^2-2x}$: studiamo separatamente il segno di $x^2 - 2$ e di $x^2 - 2x$.

$$\begin{aligned}
x^2-2>0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)\\
x^2-2x>0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
f'(x)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=-\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad x=\sqrt{2},\\
f'(x)>0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})\cup(2,+\infty),\\
f'(x)<0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\in(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},2).
\end{aligned}$$

Da queste prime informazioni si ha, essendo f non negativa, che f ammette minimo assoluto nei due punti dove si annulla, cioè in 0 e in 2 e dalle informazioni su f' e i limiti all'infinito si può tracciare un primo grafico qualitativo (che noi già disegnamo in maniera accurata)



Valutando nei punti $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ la funzione si ottengono i valori

$$f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})\, e^{-\sqrt{2}}, \qquad f(\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 2)\, e^{\sqrt{2}}$$

che, dal segno di f', sono massimi locali.
Derivando f' si ottiene

$$f''(x) = \left|x^2 - 2x\right| e^x\ \frac{x^2 - 2 + 2x}{x^2 - 2x}.$$

Per studiare il segno di f'' è sufficiente studiare il segno del numeratore (il denominatore è già stato studiato). Si ha

$$x^2 - 2 + 2x = (x+1)^2 - 3 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{3} - 1) \cup (\sqrt{3} - 1, +\infty)$$

per cui

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x = -\sqrt{3} - 1 \quad \text{oppure} \quad x = \sqrt{3} - 1,\\
f''(x) > 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{3} - 1) \cup (0, \sqrt{3} - 1) \cup (2, +\infty),\\
f''(x) < 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{3} - 1, 0) \cup (\sqrt{3} - 1, 2).
\end{aligned}$$

2. Useremo gli sviluppi di Taylor. In questo caso **non è necessario sviluppare il denominatore** del quale conosciamo già l'ordine di inifinitesimo.
Sviluppando la funzione $x \mapsto e^{x+x^2}$ al primo ordine si ha

$$e^{x+x^2} = 1 + x + x^2 + o(x + x^2) = 1 + x + o(x);$$

sviluppando la funzione $x \mapsto \sqrt{1 + \alpha x + \alpha x^2}$ al primo ordine si ha

$$\sqrt{1 + \alpha x + \alpha x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}(x + x^2) + o(x + x^2) = 1 + \frac{\alpha}{2}\, x + o(x).$$

Di conseguenza il numeratore è

$$1 + x - 1 - \frac{\alpha}{2}\,x + o(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x + o(x).$$

Per $\alpha \neq 2$ si ha quindi che il numeratore ha ordine di infinitesimo 1, per cui per $\alpha \neq 2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - \sqrt{1+\alpha x + \alpha x^2}}{\operatorname{sen}^\beta x} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} & \text{se } \beta = 1 \\ 0 & \text{se } \beta < 1 \\ +\infty & \text{se } \beta > 1 \text{ e } 1 - \frac{\alpha}{2} > 0 \\ -\infty & \text{se } \beta > 1 \text{ e } 1 - \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases}$$

Se per caso $\alpha = 2$ allora il numeratore va sviluppato al secondo ordine:

$$\begin{aligned} e^{x+x^2} &= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^2) = \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\alpha x+\alpha x^2} &= 1 + \frac{\alpha}{2}(x+x^2) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(\alpha(x+x^2))^2 + o(x+x^2) = \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^2 + o(x^2) = \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2}x + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right) x^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

da cui infine

$$e^{x+x^2} - \sqrt{1+2x+2x^2} = x^2 + o(x^2)$$

per cui per $\alpha = 2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - \sqrt{1+2x+2x^2}}{\operatorname{sen}^\beta x} = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta < 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2. \end{cases}$$

3. Integriamo dapprima la funzione $a(x) = 1/x$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x.$$

Poi integriamo

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^3 - 2t^2 + 3t}\,e^{\log t}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{t^2 - 2t + 3}\,dt = \int_1^x \frac{1}{(t-1)^2 + 2}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_1^x = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Utilizzando la formula

$$y(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} a(t)\,dt}\left[y_o + \int_{x_o}^{x} f(t)e^{\int_{x_o}^{t} a(s)\,ds}dt\right]$$

per risolvere

$$y' + ay = f, \qquad\qquad y(x_o) = y_o,$$

si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

4. Dalla monotonia della successione

$$a_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

per qualunque α reale (almeno definitivamente) si ha che

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{e}.$$

Di conseguenza

$$0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

e per il criterio del confronto la serie data converge.
Alternativamente si può utilizzare il criterio della radice n-*esima* ottenendo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}} = \frac{1}{e} < 1,$$

per cui la serie converge.