CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 3.9.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (2 - x)\exp\left(\frac{4 - x}{x}\right)$$

(ricordo: $\exp t = e^t$)

2. Si studi la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\alpha}{n} - \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2\right] n^{\alpha^2/4}$$

3. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2 + x)(2 - |x|)}\, dx.$$

4. Si trovino tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$4y'' + y' - 3y = 0.$$

Fra tutte le soluzioni si dica se ce n'è una che soddisfa

$$y(0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to+\infty} e^t y(t) \in \mathbf{R}.$$

Soluzioni

1. La funzione non è definita per $x = 0$, per cui il suo dominio naturale è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Vediamo che può essere estesa a tutto $\mathbf{R}$.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

e per questo motivo si può estendere la funzione f ad una funzione definita anche nel punto 0 definendola uguale a 0. Per cui considereremo la nuova funzione, denotata ancora con f per semplicità, definita in tutto $\mathbf{R}$, che così estesa risulta discontinua nel punto 0 (discontinuità di seconda specie).
Vediamo di studiarne la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \exp\left(\frac{4-x}{x}\right)\left[-1 - \frac{4(2-x)}{x^2}\right] = -\frac{x^2 - 4x + 8}{x^2}\,\exp\left(\frac{4-x}{x}\right)$$

che risulta sempre negativa. Studiando il limite di f' in 0 si ottiene

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0.$$

Studiamo la derivata seconda. Si ha:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[-\frac{4x^2 - 16x}{x^4} - \frac{x^2 - 4x + 8}{x^2}\left(-\frac{4}{x^2}\right)\right]\exp\left(\frac{4-x}{x}\right) = \\ &= \frac{32}{x^4}\,\exp\left(\frac{4-x}{x}\right) \end{aligned}$$

il cui segno è sempre positivo, quando f'' è definita, cioè per $x \neq 0$.
In conclusione la funzione è quindi sempre crescente in $(-\infty, 0)$ e in $[0, +\infty)$, convessa, non ammette né minimo, né massimo.
Si osservi che ha due asintoti: infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{e}.$$

Si osservi che

$$
\begin{aligned}
f(x) + \frac{x}{e} &= 2\exp\left(\frac{4}{x} - 1\right) - x\exp\left(\frac{4}{x} - 1\right) + \frac{x}{e} = \\
&= \frac{2}{e}\, e^{\frac{4}{x}} + \frac{x}{e}\left[1 - e^{\frac{4}{x}}\right] = \\
&= \frac{2}{e}\, e^{\frac{4}{x}} + \frac{x}{e}\left[1 - \left(1 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \\
&= \frac{2}{e}\, e^{\frac{4}{x}} + \frac{x}{e}\left[-\frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]
\end{aligned}
$$

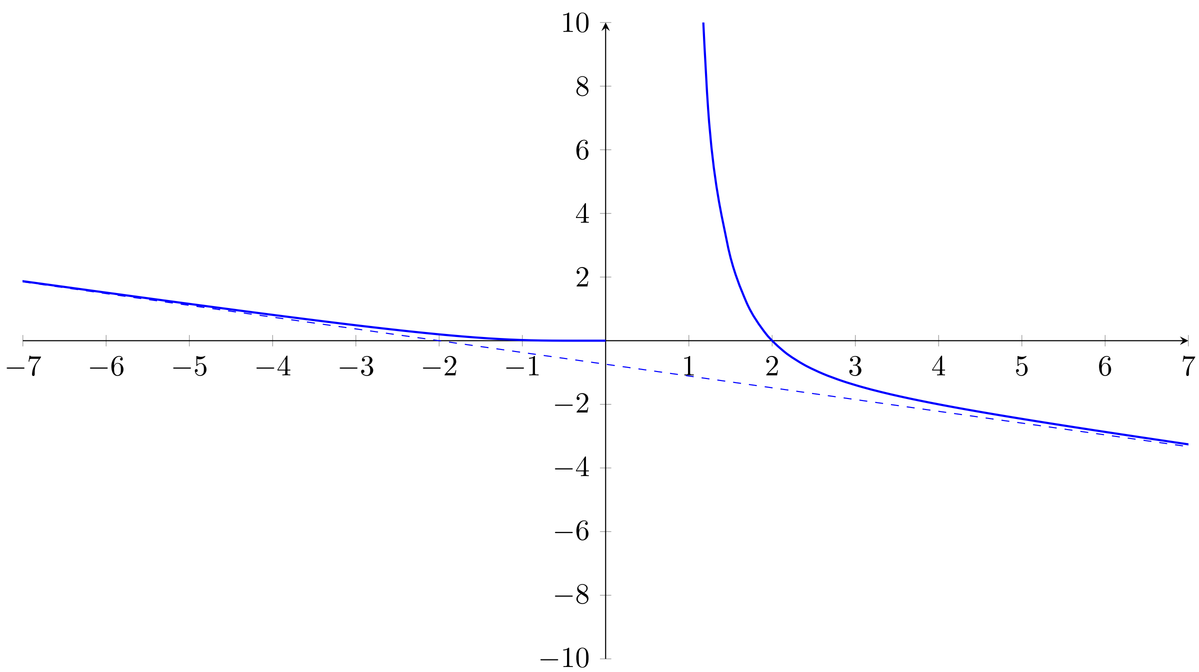
di conseguenza passando al limite si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) + \frac{x}{e}\right] = -\frac{2}{e}.$$

Di conseguenza a $+\infty$ la funzione ha come asintoto obliquo la retta

$$-\frac{x}{e} - \frac{2}{e}.$$

In maniera simile si ottiene lo stesso asintoto anche che a $-\infty$. Il grafico è riportato in figura, dove la linea tratteggiata rappresenta l'asintoto:



2. Utilizzando lo sviluppo di Taylor del logaritmo intorno al punto 1 si può scrivere, fermandoci al primo ordine,

$$\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 = 2\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

A questo punto

$$\left[\frac{\alpha}{n}-\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right]n^{\alpha^2/4} = \left[\frac{\alpha-2\sqrt{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]n^{\alpha^2/4}$$

da cui si deduce, facendo le dovute considerazioni, che

$$\text{la serie diverge per ogni } \alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 2\sqrt{2}.$$

Per completare lo studio della serie bisogna sviluppare ulteriormente la funzione logaritmo intorno al punto 1. Dovremo andare sino al terzo ordine, dove nello sviluppo sono trascurati alcuni termini che vengono assorbiti nell'o piccolo di $1/n^3$:

$$\begin{aligned}
\log&\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 = \\
&= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n}+\frac{2}{n^2}-\left(\frac{2}{n^2}+\frac{2\sqrt{2}}{n^3}\right)+\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

quindi per $\alpha = 2\sqrt{2}$ si ottiene

$$\left[\frac{\alpha}{n}-\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right]n^{\alpha^2/4} = \left[\frac{10\sqrt{2}}{3}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]n^2$$

di conseguenza la serie diverge, fatte le dovute considerazioni, anche per $\alpha = 2\sqrt{2}$.

3. Il calcolo dell'integrale va diviso in due parti. La prima è

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(2+x)^2}\,dx.$$

L'integrando può essere riscritto

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(2+x)^2} &= \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+4}+\frac{-4x-4}{x^2+4x+4} = 1-2\,\frac{2x+4-2}{x^2+4x+4} = \\
&= 1-2\,\frac{2x+4}{x^2+4x+4}+\frac{4}{(2+x)^2}\,.
\end{aligned}$$

Integrando si ottiene

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(2+x)^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \left[1 - 2\,\frac{2x+4}{x^2+4x+4} + \frac{4}{(2+x)^2}\right] dx =$$
$$= \left[x - 2\,\log(x^2+4x+4) - \frac{4}{2+x}\right]\Bigg|_{-1}^{0} =$$
$$= [1 - 4\,\log 2 - 2 + 4] = 3 - 4\,\log 2. \tag{1}$$

La seconda parte è

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x)(2-x)}\,dx.$$

L'integrando può essere riscritto

$$\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{x^2-4+4}{4-x^2} = -1 + \frac{4}{4-x^2}.$$

Riscrivendo il secondo termine come segue

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

si ottengono

$$a = b = 1.$$

Integrando si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x)(2-x)}\,dx = \int_0^1 \left[-1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right] dx =$$
$$= -1 + \log 3.$$

Sommando quest'ultimo a (1) si conclude.

4. Risolvendo l'equazione

$$4\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

si ottengono le due radici $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3/4$, da cui le soluzioni dell'equazione sono

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t/4}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Per verificare se fra queste ce n'è una che soddisfa le richieste imponiamo dapprima che $y(0) = 2$, cioè

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_2 = 2 - c_1.$$

Cercando quindi se esiste qualche funzione del tipo

$$y(t) = c_1\, e^{-t} - (2 - c_1)\, e^{3t/4}$$

che soddisfa la seconda richiesta si ottiene che necessariamente $c_1 = 2$. In tal modo rimane solamente

$$y(t) = 2\, e^{-t}$$

e in particolare

$$\lim_{t \to +\infty} e^t\, y(t) = 2.$$

Per tutti gli altri valori di c_1 si ha che

$$\lim_{t \to +\infty} e^t\, y(t) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{t \to +\infty} e^t\, y(t) = -\infty.$$