CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 25 gennaio 2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

2. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{e^t - \cosh^2\sqrt{t}}{\operatorname{sen} t^3}\, dt,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x} \int_x^1 \frac{e^t - \cosh^2\sqrt{t}}{\operatorname{sen} t^3}\, dt.$$

Soluzioni

1. Si deduce immediatamente dalla disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ che

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1,$$

per cui il dominio di f è $\mathbf{R}$. Il grafico è riportato al termine dello svolgimento. Svolgendo i limiti agli estremi (all'infinito) si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right] = +\infty.$$

A questo punto ci si accorge facilmente che la funzione ha anche un asintoto. Infatti

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right]\frac{1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - x\right] = 0,$$

da cui la retta $r(x) = x$ è un asintoto obliquo a $-\infty$, ma facilmente si trova che la stessa retta lo è anche a $+\infty$.
Svolgendo la derivata si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\,\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\,\frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = 1 + \frac{1-x^2}{|1-x^2|}\,\frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

per cui per $x = 1$ e $x = -1$ f non è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{1+x^2} & \text{per } |x| > 1 \\ 1 + \dfrac{2}{1+x^2} & \text{per } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Poiché in $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ l'uguaglianza vale solo per $a = b$ si deduce che

$$\frac{2}{1+x^2} < 1 \qquad \text{per ogni } x \text{ tale che } |x| \neq 1,$$

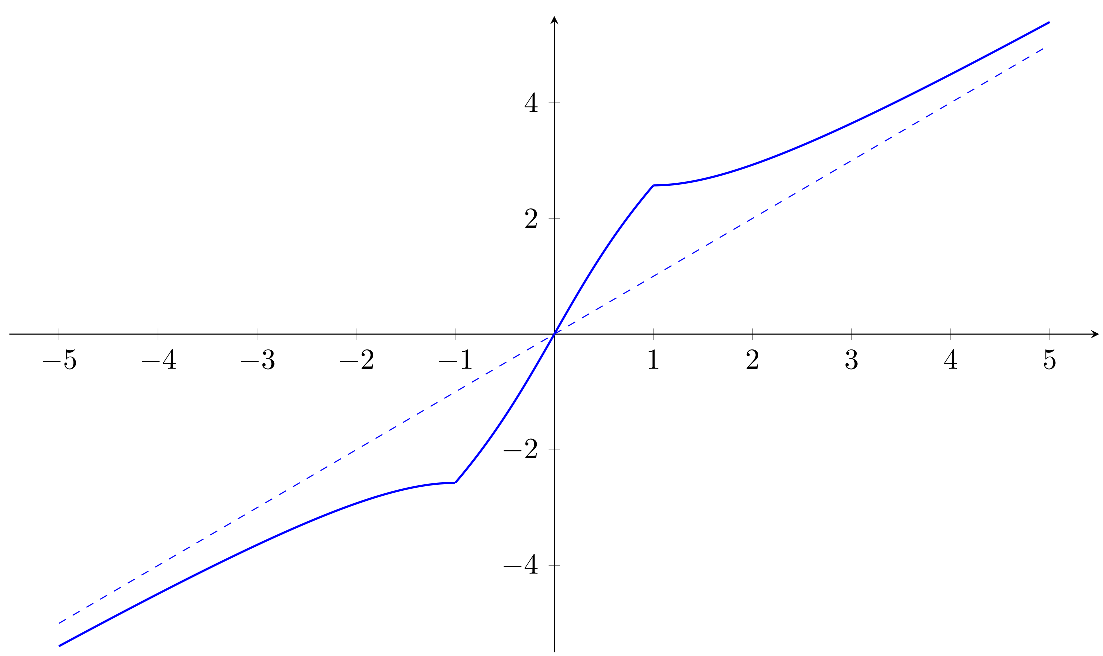
per cui f' è sempre positiva, dove definita. Valutando i limiti della derivata prima a destra e sinistra di -1 ed 1 si ha:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to +1^+} f'(x) = 0, \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to +1^-} f'(x) = 2.$$

Rimane da studiare la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{per } |x| > 1 \\ -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{per } -1 < x < 1, \end{cases}$$

per cui f risulta convessa per $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, concava per $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ e 0 è un punto di flesso.
La funzione non ha né minimo, né massimo, neanche locali (relativi).



2. Il limite è un integrale improprio e il problema è nello zero, dove la funzione potrebbe essere illimitata a causa di $\operatorname{sen} t^3$.
Utilizzando lo sviluppo di Taylor intorno al punto 0 si può scrivere, fermandoci al secondo ordine per la prima funzione,

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Se la seconda funzione a numeratore venisse sviluppata solo fino al secondo ordine si avrebbe

$$\cosh^2\sqrt{t} = \left(\frac{e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{t}+\frac{t}{2}+o(t)\right)+\left(1-\sqrt{t}+\frac{t}{2}+o(t)\right)\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2+t+o(t)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4+o(t)\right) = 1+o(t)$$

quindi andiamo oltre:

$$\cosh^2\sqrt{t} = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{t}+\frac{t}{2}+\frac{t^{3/2}}{6}+\frac{t^2}{4!}+1-\sqrt{t}+\frac{t}{2}-\frac{t^{3/2}}{6}+\frac{t^2}{4!}+o(t^2)\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2+t+\frac{t^2}{12}+o(t^2)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4+4t+\frac{4}{3}t^2+o(t^2)\right) = 1+t+\frac{t^2}{3}+o(t^2)$$

Mettendo assieme le cose il numeratore risulta essere

$$e^t - \cosh^2\sqrt{t} = \frac{t^2}{6}+o(t^2)$$

e infine

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{e^t-\cosh^2\sqrt{t}}{\operatorname{sen} t^3}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{6}$$

quindi l'integrale improprio ha lo stesso carattere di

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt, \qquad \text{che diverge.}$$

Per calcolare il secondo limite si può usare la regola di de l'Hôpital, visto che entrambi i termini tendono ad infinito per $x \to 0^+$. Si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{e^x-\cosh^2\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x^3}\right) = -\frac{1}{6}$$

per anche il secondo limite richiesto sarà $-1/6$.