CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 18 febbraio 2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si calcolino i due integrali indefiniti

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+x^2}\,dx\,, \qquad \int \frac{x^5-1}{x^4+x^2}\,dx,$$

dopodiché si trovino tutte le soluzioni di

$$y' - 2\sqrt{y}\,\frac{x^5-1}{x^4+x^2} = 0.$$

Esiste una soluzione definita nell'intervallo $(0,+\infty)$?

2. Si studino le seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$ (log denota il logaritmo in base naturale):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{2\alpha}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log\left(1+\frac{2\alpha}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \cos\sqrt{\frac{2}{n}} - 1\right)$$

Soluzioni

1. L'equazione differenziale è a variabili separabili. Prima di tutto si osservi che la soluzione dovrà essere non negativa, dal momento che è sotto radice quadrata.
Inoltre si osservi che

$$y \equiv 0$$

è soluzione definita in $\mathbf{R}$ (per cui si può già rispondere affermativamente alla domanda finale).
A questo punto per integrare (1) si possono separare le variabili, a patto che y non si annulli. Si ottiene

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{x^5 - 1}{x^4 + x^2}. \tag{1}$$

Integriamo il termine di destra: prima di tutto dobbiamo dividere il polinomio di grado 5 per quello di grado 4. Si ottiene che

$$x^5 - 1 = x(x^4 + x^2) - x^3 - 1.$$

Per integrare il termine $\frac{-x^3-1}{x^4+x^2}$ scriviamo

$$-\frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

Si ottengono $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 1$ per cui

$$\frac{x^5 - 1}{x^4 + x^2} = x - \frac{1}{x^2} - \frac{x - 1}{x^2 + 1} = x - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}. \tag{2}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + \operatorname{arctg} x + c \tag{3}$$

dove c è una generica costante. Si osservi che, per avere senso, nella la precedente uguaglianza il termine di destra deve essere non negativo. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + \operatorname{arctg} x$$

è positiva in $(0, +\infty)$ per cui l'espressione (3) ha senso per ogni $x > 0$ ad esempio per qualunque $c \geqslant 0$ e quindi esistono infinite soluzioni definite in $(0, +\infty)$.
Attenzione! non per tutti i valori di c la funzione f è non negativa.
Infatti derivando f si ottiene da (2) che f' si annulla solo per $x = 1$, punto di minimo di f. Poiché si ha che $f(1) = \frac{3}{2} + \frac{\log 2}{2} + \operatorname{arctg} 2 > 0$ si ha che una generica soluzione è definita in $(0, +\infty)$ per $c \geqslant -f(1)$.

Si conclude che, dove la quantità a destra di (3) è non negativa, l'espressione di una generica soluzione sarà

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + c\right)^2, \qquad \text{con } c \in \mathbf{R}.$$

2. Per $\alpha > 0$ la quantità $\frac{1}{n^\alpha}$ è infinitesima. Utilizzando gli sviluppi di Taylor al secondo ordine si ottiene che

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{2\alpha}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{2\alpha}{n^\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2\alpha}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{n^\alpha}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} - \frac{2\alpha^2}{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Sviluppando al secondo ordine anche il coseno

$$\cos\sqrt{\frac{2}{n}} - 1 = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

per cui, detto a_n il termine generale della serie, si ha

$$a_n = \frac{2\alpha}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} - \frac{2\alpha^2}{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Per confronto asintotico si ha che

$$\begin{aligned} &a_n \quad \text{è asintotico a} \quad \frac{2\alpha}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ se } \alpha + \frac{1}{2} < 1 \\ &a_n \quad \text{è asintotico a} \quad -\frac{1}{n} \text{ se } 1 < \alpha + \frac{1}{2} \\ &a_n \quad \text{è asintotico a} \quad -\frac{2\alpha^2}{n^{2\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ se } \alpha + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

e quindi si ha che la serie

$$\begin{aligned} &\text{diverge a } +\infty \qquad \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ &\text{diverge a } -\infty \qquad \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ &\text{converge} \qquad \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$