CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 12 luglio 2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio, e se ne disegni il grafico, la funzione la cui espressione è

$$f(x) = -x^3 + x^3 \log|x|.$$

2. Si studi la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta > 0$.
Cosa cambia se $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$?
Infine si calcoli

$$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx.$$

Soluzioni

1. L'espressione data ha come dominio $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Svolgendo però i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\big(\log|x|-1\big) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to0^-} x^3\big(\log|x|-1\big) = 0,$$
$$\lim_{x\to0^+} x^3\big(\log|x|-1\big) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3\big(\log|x|-1\big) = +\infty,$$

si deduce che f può essere estesa a tutto $\mathbf{R}$ definendo

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{per } x \neq 0, \qquad \tilde{f}(0) = 0.$$

Per semplicità denoteremo ancora con f tale funzione, che d'ora in poi avrà come dominio $\mathbf{R}$.
Derivando f si ha

$$f'(x) = 3x^2\big(\log|x|-1\big) + x^2, \qquad x \neq 0.$$

Per $x = 0$ si ha che (usando de l'Hôpital)

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} f'(x) = 0.$$

Di conseguenza f risulta derivabile in $\mathbf{R}$. Studiando il segno di f' si ottiene

$$f'(x) = x^2\Big[3\big(\log|x|-1\big)+1\Big] > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$3\big(\log|x|-1\big)+1 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\log|x| > \frac{2}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$|x| > e^{\frac{2}{3}}$$

per cui

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\qquad \text{per } |x| > e^{\frac{2}{3}},\\ f'(x) = 0 &\qquad \text{per } |x| = e^{\frac{2}{3}} \text{ o per } \ x = 0,\\ f'(x) < 0 &\qquad \text{per } 0 < |x| < e^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$x = -e^{\frac{2}{3}} \qquad \text{punto di massimo locale,}$$
$$x = 0 \qquad \text{punto di flesso orizzontale,}$$
$$x = e^{\frac{2}{3}} \qquad \text{punto di minimo locale.}$$

Studiamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x\big(\log|x| - 1\big) + 3x + 2x = x\big(6\log|x| - 1\big), \qquad x \neq 0.$$

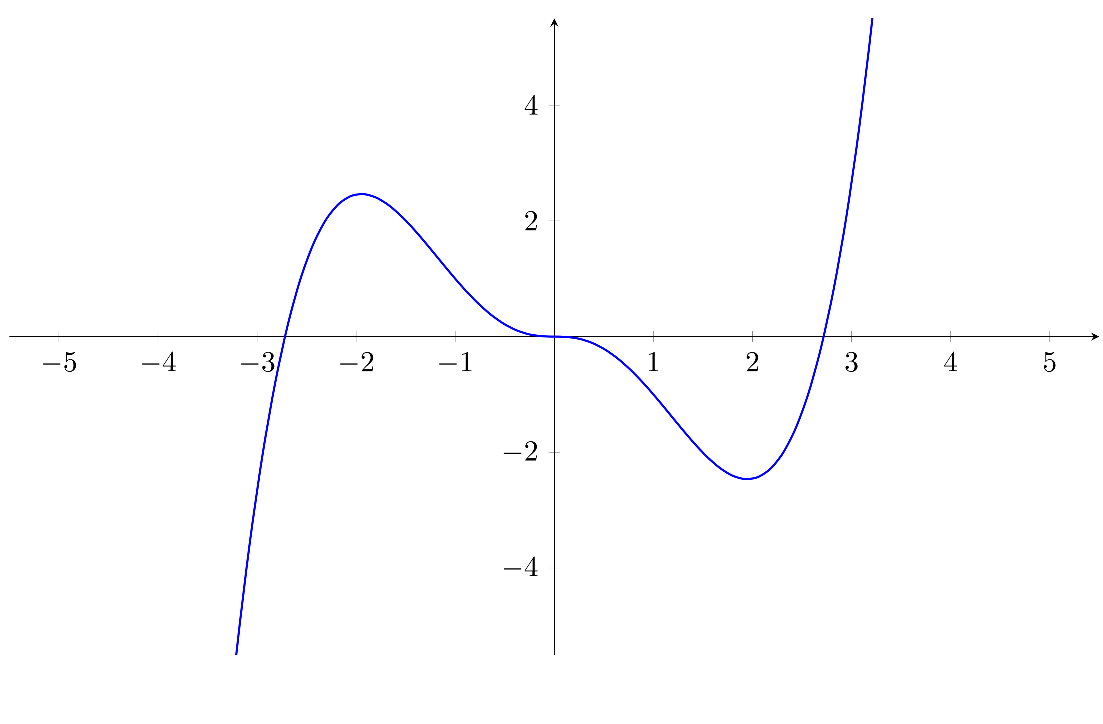
mentre per $x = 0$ si ha

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f''(x) = 0,$$

quindi f risulta (quantomeno) di classe $C^1(\mathbf{R})$ e derivabile due volte in tutto $\mathbf{R}$. (Qual è la massima regolarità che ha f in $\mathbf{R}$?).
Studiando il segno di f'' si ottiene

$$f''(x) > 0 \qquad \text{per } -e^{\frac{1}{6}} < x < 0 \text{ o } x > e^{\frac{1}{6}},$$
$$f''(x) = 0 \qquad \text{per } |x| = e^{\frac{1}{6}} \text{ o per } x = 0,$$
$$f''(x) < 0 \qquad \text{per } x < -e^{\frac{1}{6}} \text{ o } 0 < x < e^{\frac{1}{6}}$$

e quindi si hanno due punti di flesso obliquo. Il grafico è riportato in figura.



2. L'integrale improprio può essere diviso in due parti, ad esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}\, dx\,. \tag{1}$$

Poiché i parametri sono positivi si ha che la funzione integranda nel primo integrale è asintotica a $\frac{1}{x^\alpha}$, per cui il primo converge per $\alpha \in (0,1)$.
Nel secondo invece si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}} = 1,$$

per cui il secondo integrale è convergente per $\alpha + \beta > 1$. In conclusione l'integrale dato converge per

$$\alpha \in (0,1) \quad \text{e} \quad \beta > 1 - \alpha$$

oppure, equivalentemente, per

$$\alpha \in (0,1) \quad \text{e} \quad \alpha > 1 - \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \big(\min\{1, 1-\beta\}, 1\big) \cap (0,1)$$

cioè

$$\text{per } \alpha \in (0,1) \quad \text{se} \quad \beta \geqslant 1, \qquad \alpha \in (1-\beta, 1) \quad \text{se} \quad \beta \in (0,1).$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ possiamo comunque dividere l'integrale nella somma dei due integrali come in (1). A questo punto

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{se } \beta > 0,\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1 \qquad \text{se } \beta = 0,\\
&\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\alpha-\beta}}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{se } \beta < 0
\end{aligned}$$

per cui la funzione integranda in 0 è asintotica a $1/x^\alpha$ se $\beta \geqslant 0$, mentre è asintotica a $1/x^{\alpha-\beta}$ se $\beta < 0$. Per cui il primo dei due integrali converge

$$\text{per } \alpha < 1 \quad \text{se } \beta \geqslant 0, \qquad\qquad \text{per } \alpha - \beta < 1 \quad \text{se } \beta < 0,$$

cioè

$$\text{per } \alpha < \min\{1, 1+\beta\}. \tag{2}$$

Analogamente per il secondo integrale in (1) si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}} = 1 \qquad \text{se } \beta > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = 1 \qquad \text{se } \beta = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{se } \beta < 0$$

per cui la funzione integranda a $+\infty$ è asintotica a $1/x^\alpha$ se $\beta \leqslant 0$, mentre è asintotica a $1/x^{\alpha+\beta}$ se $\beta > 0$. Quindi converge

$$\text{per } \alpha > 1 \quad \text{se } \beta \leqslant 0, \qquad\qquad \text{per } \alpha+\beta > 1 \quad \text{se } \beta > 0,$$

$$\text{per } \alpha > \min\{1, 1-\beta\}. \tag{3}$$

In conclusione l'integrale dato converge per α che soddisfa le due richieste (2) e (3), cioè

$$\text{per } \alpha \in (1-\beta, 1) \quad \text{se } \beta > 0, \qquad\qquad \text{per nessun valore di } \alpha \quad \text{se } \beta \leqslant 0.$$

Venendo al calcolo esplicito: volendo utilizzare il cambio di variabile $t = 1/x$ il calcolo si semplifica e l'integrale diventa

$$-\int t \operatorname{arctg} t\, dt = -\left[\frac{1}{2}\, t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\, t^2 \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c,$$

e si ricavano le primitive risostituendo a t $1/x$.

$$-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + c, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Oppure, direttamente, sempre integrando per parti si può scrivere

$$\int \frac{1}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+x^2}\, dx$$

per cui ci concentriamo ora sull'ultimo addendo. Scrivendo

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c\,x+d}{1+x^2}$$

si ottiene $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$, da cui

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando infine si ottiene ($c \in \mathbf{R}$)

$$\int \frac{1}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c\,.$$

Domanda: i due risultati ottenuti sono uguali?