CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6 settembre 2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si risponda ai seguenti quesiti.

a) Si dica per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geqslant 0$ il seguente integrale è convergente

$$\int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\beta \sqrt{(x^2-1)^\alpha}}\, dx$$

b) Si dica se il seguente integrale improprio è convergente ed in caso affermativo lo si calcoli

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

c) Infine si dica se esiste una funzione f tale che $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ in $(1,2]$ che sia continua in $[1,2]$.

2. Si studino i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x + \frac{\alpha}{3}x^2 - (\cos\sqrt{x})^2}{x^{5/2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$.

Soluzioni

1.

(a) Scrivendo il denominatore come

$$(\log x)^\beta \sqrt{(x^2-1)^\alpha} = \big(\log(1+(x-1))\big)^\beta \sqrt{(x-1)^\alpha (x+1)^\alpha}$$

si osservi che (sviluppando eventualmente il logaritmo al primo ordine)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(\log x)^\beta \sqrt{(x^2-1)^\alpha}}{(x-1)^\beta (x-1)^{\frac{\alpha}{2}}} = 2^{\frac{\alpha}{2}}$$

cioè la funzione integranda è asintotica (in 1) a

$$\frac{1}{(x-1)^\beta (x-1)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

da cui l'integrale è convergente se $\beta + \frac{\alpha}{2} < 1$.

(b) L'integrale è convergente, basta considerare $\beta = 0$ e $\alpha = 1$ nel caso precedente. Per calcolarne il valore è sufficiente sostituire $\cosh t$ a x. Usando la formula di inversione

$$t = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} dt = \log\left(2+\sqrt{3}\right).$$

(c) La risposta è sì: infatti la funzione

$$f(x) = -\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

ha ovviamente come derivata la funzione integranda in $(1,2]$. Il fatto che sia continua in $[1,2]$ scende proprio dal fatto che l'integrale al punto b) è convergente, infatti

$$f(1) = -\lim_{x\to 1^+} \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt.$$

2. 1. Per quanto riguarda il primo sviluppiamo $\cos\sqrt{x}$ nello 0 fino al secondo ordine:

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o\left(x^{5/2}\right).$$

Si osservi che avremmo potuto scrivere $o(x^2)$, ma sarà utile sfruttare il massimo dell'informazione. Da ciò si ricava

$$(\cos\sqrt{x})^2 = 1 + \frac{x^2}{4} - x + \frac{x^2}{12} + o\left(x^{5/2}\right) = 1 - x + \frac{x^2}{3} + o\left(x^{5/2}\right).$$

A questo punto, mettendo assieme le cose, per $\alpha = 1$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{o\left(x^{5/2}\right)}{x^{5/2}}\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0,$$

dal momento che $|\operatorname{sen}(1/x)| \leqslant 1$; per $\alpha \neq 1$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{12}\frac{4(\alpha-1)x^2}{x^{5/2}}\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

Il primo fattore tende a $+\infty$, mentre il secondo non ha limite, per cui il limite non esiste.

2. Il risultato è: $\lim_{x\to 0}(\cos x + \operatorname{sen}x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} = e$. Vediamo quattro possibili svolgimenti.

(a) Possiamo sviluppare la funzione $\cos x + \operatorname{sen}x$ in 0 come segue:

$$\cos x + \operatorname{sen}x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \left(x + o(x^2)\right) = 1 + x + o(x).$$

Senza sviluppare l'esponente si può scrivere (dove l'$o(x)$ denota una medesima funzione)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x + \operatorname{sen}x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} &= \lim_{x\to 0}(1 + x + o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}\ \frac{x+o(x)}{\operatorname{sen}x}\ \cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left[(1 + x + o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}}\right]^{\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen}x}\ \cos x} = e.\end{aligned}$$

(b) Oppure si può raccogliere $\cos x$ e ottenere

$$(\cos x + \operatorname{sen}x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} = (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} = e,$$

basta quindi studiare $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$. Sviluppando al secondo ordine il coseno si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Per cui si ha ($o(x^2)$ denota una medesima funzione in tutte le espressioni che seguono)

$$(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x} \cos x} .$$

Allora poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}} = e\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\operatorname{sen} x} \cos x} = 1\,.$$

(c) Scrivendo ($\exp x = e^x$)

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \exp\left(\log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)\right) .$$

ci si può limitare a studiare l'argomento dell'esponenziale. Si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right) = 1\,.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \cos x \frac{\log\left(\cos x + \operatorname{sen} x\right)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\log\left(1 + x + o(x)\right)}{\operatorname{sen} x}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1\,,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x + o(x)\right)}{\operatorname{sen} x} = 1\,.$$

(d) Il precedente svolgimento può essere portato avanti anche senza scomodare gli o piccoli e gli sviluppi di Taylor (EX si provi), come del resto quello che stiamo per vedere:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} .$$

Il secondo fattore, per $x \to 0$, converge ad e. Rimane da valutare

$$
\begin{aligned}
(\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= (1 + (\cos x - 1))^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \\
&= \left[\Big(1 + (\cos x - 1) \Big)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x^2} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} \cos x} .
\end{aligned}
$$

Il termine tra parentesi quadre tende ad e, mentre l'esponente tende a 0, di conseguenza tutto tende ad 1.
Nuovamente si trova che il limite è e.