

## CdL Ingegneria Meccanica

### Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6 settembre 2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte. Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione. Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si risponda ai seguenti quesiti.

- a) Si dica per quali valori dei parametri  $\alpha, \beta \geq 0$  il seguente integrale è convergente

$$\int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\beta \sqrt{(x^2 - 1)^\alpha}} dx$$

- b) Si dica se il seguente integrale improprio è convergente ed in caso affermativo lo si calcoli

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

- c) Infine si dica se esiste una funzione  $f$  tale che  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  in  $(1, 2]$  che sia continua in  $[1, 2]$ .

2. Si studino i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x + \frac{\alpha}{3}x^2 - (\cos \sqrt{x})^2}{x^{5/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}.$

## Soluzioni

1.

(a) Scrivendo il denominatore come

$$(\log x)^\beta \sqrt{(x^2 - 1)^\alpha} = (\log(1 + (x - 1)))^\beta \sqrt{(x - 1)^\alpha (x + 1)^\alpha}$$

si osservi che (sviluppando eventualmente il logaritmo al primo ordine)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\log x)^\beta \sqrt{(x^2 - 1)^\alpha}}{(x - 1)^\beta (x - 1)^{\frac{\alpha}{2}}} = 2^{\frac{\alpha}{2}}$$

cioè la funzione integranda è asintotica (in 1) a

$$\frac{1}{(x - 1)^\beta (x - 1)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

da cui l'integrale è convergente se  $\beta + \frac{\alpha}{2} < 1$ .

(b) L'integrale è convergente, basta considerare  $\beta = 0$  e  $\alpha = 1$  nel caso precedente. Per calcolarne il valore è sufficiente sostituire  $\cosh t$  a  $x$ . Usando la formula di inversione

$$t = \log \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_0^{\log(2 + \sqrt{3})} dt = \log(2 + \sqrt{3}).$$

(c) La risposta è sì: infatti la funzione

$$f(x) = - \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$$

ha ovviamente come derivata la funzione integranda in  $(1, 2]$ . Il fatto che sia continua in  $[1, 2]$  scende proprio dal fatto che l'integrale al punto b) è convergente, infatti

$$f(1) = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

2. 1. Per quanto riguarda il primo sviluppiamo  $\cos \sqrt{x}$  nello 0 fino al secondo ordine:

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^{5/2}).$$

Si osservi che avremmo potuto scrivere  $o(x^2)$ , ma sarà utile sfruttare il massimo dell'informazione. Da ciò si ricava

$$(\cos \sqrt{x})^2 = 1 + \frac{x^2}{4} - x + \frac{x^2}{12} + o(x^{5/2}) = 1 - x + \frac{x^2}{3} + o(x^{5/2}).$$

A questo punto, mettendo assieme le cose, per  $\alpha = 1$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^{5/2})}{x^{5/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

dal momento che  $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$ ; per  $\alpha \neq 1$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{12} \frac{4(\alpha - 1)x^2}{x^{5/2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Il primo fattore tende a  $+\infty$ , mentre il secondo non ha limite, per cui il limite non esiste.

2. Il risultato è:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e$ . Vediamo tre possibili svolgimenti.

(a) Possiamo sviluppare la funzione  $\cos x + \operatorname{sen} x$  in 0 come segue:

$$\cos x + \operatorname{sen} x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \left(x + o(x^2)\right) = 1 + x + o(x).$$

Senza sviluppare l'esponente si può scrivere (dove  $l'o(x)$  denota una medesima funzione)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + o(x))^{\frac{1}{x+o(x)} \frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x} \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + x + o(x))^{\frac{1}{x+o(x)}} \right]^{\frac{x+o(x)}{\operatorname{sen} x} \cos x} = e. \end{aligned}$$

(b) Oppure si può raccogliere  $\cos x$  e ottenere

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}.$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = e,$$

basta quindi studiare  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$ . Sviluppando al secondo ordine il coseno si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Per cui si ha ( $o(x^2)$  denota una medesima funzione in tutte le espressioni che seguono)

$$\begin{aligned} (\cos x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{-\frac{1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x}} \cos x . \end{aligned}$$

Allora poiché

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}} &= e, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x &= 1 \end{aligned}$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{-\frac{1}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\operatorname{sen} x}} \cos x = 1 .$$

(c) Scrivendo ( $\exp x = e^x$ )

$$\begin{aligned} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \exp \left( \log (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \right) = \\ &= \exp \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log (\cos x + \operatorname{sen} x) \right) . \end{aligned}$$

ci si può limitare a studiare l'argomento dell'esponenziale. Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log (\cos x + \operatorname{sen} x) = 1 .$$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{\log (\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{\log (1 + x + o(x))}{\operatorname{sen} x}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log (1 + x + o(x))}{\operatorname{sen} x} &= 1 . \end{aligned}$$