CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 24 gennaio 2022

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio la seguente funzione e se ne tracci un grafico qualitativo (**non** è richiesta la derivata seconda):

$$f(x) = \log\left(2\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2\right).$$

Si mostri che esiste (almeno) un valore $x_o < 0$ per il quale $f''(x_o) = 0$.
Dopo aver disegnato il grafico di f nel suo dominio, si disegni il grafico di $x \mapsto f(|x|)$ nel suo dominio.

2. Si studi la seguente serie al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{arctg} \alpha^n)\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Per $\alpha \leqslant 0$ cosa si può dire?

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2(x-1)^{3/2}-4(x-1)+6\sqrt{x-1}}\,dx$$

4. Si studi il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3}-\cos(\alpha\sqrt{x})}{\alpha x+\log^2(1+x+x^2+x^3)}$$

Soluzioni

1. L'espressione di f è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, per cui il dominio su cui studiare f è $\mathbf{R}$. Svolgendo i limiti agli estremi del dominio si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiamo la derivata prima. La funzione f potrebbe non essere derivabile quando $e^x - 2 = 0$, cioè per $x = \log 2$. Derivando f si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2}\ \frac{1}{\sqrt{e^x|e^x-2|}}\left(e^x|e^x-2| + e^{2x}\frac{|e^x-2|}{e^x-2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2}\ \frac{e^x|e^x-2|}{\sqrt{e^x|e^x-2|}}\left(1 + e^x\frac{1}{e^x-2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2}\ \sqrt{e^x|e^x-2|}\ 2\ \frac{e^x-1}{e^x-2} \end{aligned}$$

per cui il segno è dato dal rapporto

$$\frac{e^x-1}{e^x-2}$$

e in effetti per $x = \log 2$ la funzione f' non è definita. Di conseguenza si ha che

$$\mathrm{dom}\,(f') = (-\infty, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$$

e

$$f' \begin{cases} > 0 & \text{in } (-\infty, 0) \cap (\log 2, +\infty), \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ > 0 & \text{in } (0, \log 2). \end{cases}$$

Si osservi che f' può essere riscritta (moltiplicando e dividendo l'espressione di sopra per $\sqrt{e^x|e^x-2|}$) come segue:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2}\ \dfrac{e^x(e^x-1)}{\sqrt{e^x|e^x-2|}} & \text{in } (-\infty, \log 2), \\ \dfrac{1}{\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2}\ \dfrac{e^x(e^x-1)}{\sqrt{e^x|e^x-2|}} & \text{in } (\log 2, +\infty). \end{cases}$$

Svolgendo i limiti verso $\log 2$ di f' si ottiene:

$$\lim_{x\to\log 2^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\log 2^+} f(x) = +\infty,$$

per cui il punto $(\log 2, 2)$ è un punto di cuspide. Inoltre, poiché a $-\infty$ la funzione ha limite 2, f ha come asintoto orizzontale la retta $y = 2$ a $-\infty$. Vediamo se ne esiste uno anche a $+\infty$. Poiché, riscrivendo f come segue

$$f(x) = x + \log\left(2\sqrt{1-e^{-x}} + e^{2-x}\right),$$

si ottengono i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - x\big] = \log 2$$

la retta $y = x + \log 2$ risulta essere un asintoto obliquo a $+\infty$ per f.

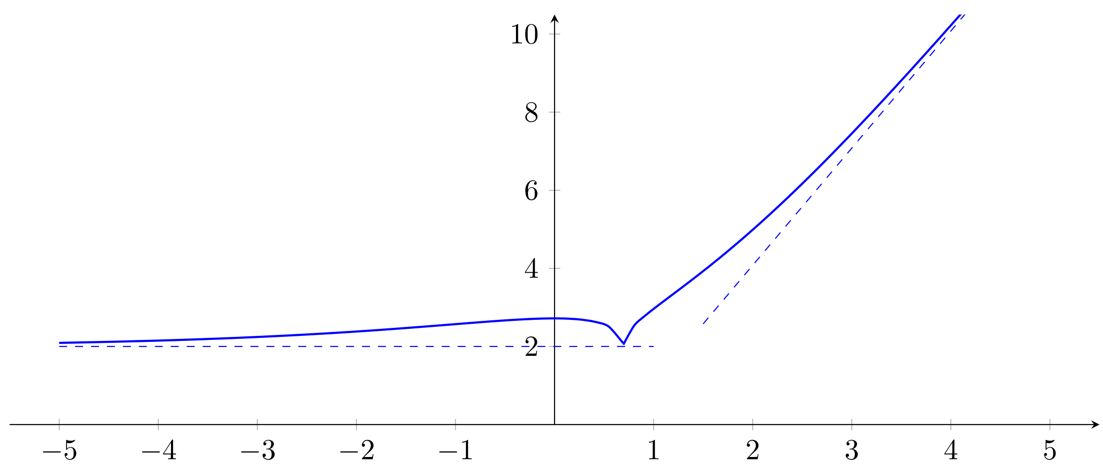
Inoltre l'unico punto stazionario è 0 che, studiando il segno di f', si deduce essere un punto di massimo locale. Un altro valore che va preso in considerazione è $\log 2$, dove f non è derivabile, nel quale la funzione vale 2. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, per $x < 0$ la funzione cresce, per $x \in (0, \log 2)$ decresce e infine per $x > \log 2$ la funzione cresce, si ha che f ammette minimo assoluto in $\log 2$.

Lo studio della derivata seconda non è richiesto, e sarebbe complicato. Vediamo come rispondere al quesito richiesto. Poiché

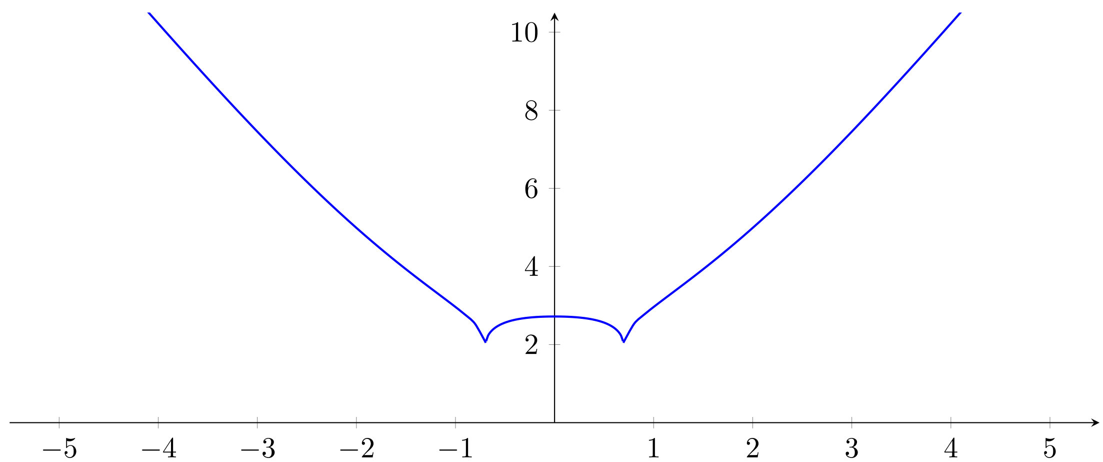
$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f'(x) > 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0),$$

si deve necessariamente avere almeno un punto in $(-\infty, 0)$ in cui la derivata di f', cioè f'' si annulla, e quindi c'è almeno un cambio di concavità in $(-\infty, 0)$.

Il grafico di f (gli asintoti sono tratteggiati) è riportato in figura.



Infine riportiamo il grafico di $x \mapsto f(|x|)$.



2. La serie è a termini positivi. Poiché $\operatorname{arctg} t < t$ per $t > 0$, per $\alpha \in (0,1)$ si ha:

$$0 < (\operatorname{arctg} \alpha^n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha} \right) < \frac{\alpha^n}{n^\alpha} \leqslant \alpha^n$$

per cui per confronto con la serie geometrica la serie converge. Per $\alpha > 1$ si ha

$$0 < (\operatorname{arctg} \alpha^n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha} \right) < \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^\alpha}$$

per cui per confronto la serie converge. Per $\alpha = 1$ si ha

$$(\operatorname{arctg} \alpha^n) \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha} \right) = \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{n},$$

termine che è confrontabile con $1/n$, per cui la serie diverge positivamente.
Volendo si può anche studiare, perlomeno per $\alpha \in (0,1)$, la serie

$$\sum \alpha^n \frac{1}{n^\alpha}$$

che ha lo stesso carattere della serie di partenza. Anche qui con le stime fatte prima (oppure usando i criteri del rapporto o della radice n-esima) si giunge alle medesime conclusioni.

Volendo studiare il caso $\alpha \leqslant 0$: se $\alpha = 0$ il termine generale è nullo, per cui la serie converge.
Se $\alpha < 0$ il termine $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^\alpha}$ converge a $\pi/2$. Fintanto che $\alpha \in (-1,0)$ si ha che α^n tende a zero per cui

$$|\operatorname{arctg} \alpha^n| < |\alpha|^n$$

e la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente.
Per $\alpha \leqslant -1$ la serie è indeterminata, in quanto il fattore

$$\operatorname{arctg} \alpha^n = (-1)^n \operatorname{arctg} |\alpha|^n.$$

3. Ponendo $t = \sqrt{x-1}$ si ottiene

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x-1}, \\ x &= t^2 + 1, \\ dx &= 2t\, dt. \end{aligned}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{2t-1}{2t^3 - 4t^2 + 6t}\, 2t\, dt &= \int \frac{2t-1}{t^2 - 2t + 3}\, dt = \\ &= \int \frac{2t-2+1}{t^2-2t+3}\, dt = \\ &= \log(t^2 - 2t + 3) + \int \frac{1}{(t-1)^2 + 2}\, dt \end{aligned}$$

e il secondo integrale diventa

$$\int \frac{1}{(t-1)^2 + 2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

per cui le primitive sono date da

$$\log(t^2 - 2t + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

al variare di $c \in \mathbf{R}$.
Sostituendo a t la quantità $\sqrt{x-1}$ si ottengono le primitive cercate.

4. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor nello zero, ci basterà il secondo ordine:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \alpha x + x^2 + 3x^3} &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha x + x^2 + 3x^3) - \frac{1}{8}(\alpha x + x^2 + 3x^3)^2 + o((\alpha x + x^2 + 3x^3)^2), \\ \cos(\alpha\sqrt{x}) &= 1 - \frac{\alpha^2}{2}x + \frac{\alpha^4}{4!}x^2 + o((\alpha\sqrt{x})^5), \\ \log^2(1 + x + x^2 + x^3) &= \left[x + x^2 + x^3 + o(x + x^2 + x^3)\right]^2 \end{aligned}$$

che possiamo semplificare scrivendo

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3} &= 1+\frac{\alpha}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{8}\right)x^2+o((\alpha x+x^2)^2),\\
\cos(\alpha\sqrt{x}) &= \begin{cases} 1-\dfrac{\alpha^2}{2}x+\dfrac{\alpha^4}{4!}x^2+o(x^2) & \text{se } \alpha\neq 0\\ 1 & \text{se } \alpha=0\end{cases}\\
\log^2(1+x+x^2+x^3) &= x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\log^2(1+x+x^2+x^3)=\log^2(1+x+o(x))=(x+o(x))^2=x^2+o(x^2),$$

per cui

$$\frac{\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3}-\cos(\alpha\sqrt{x})}{\alpha x+x^{3/2}+\log^2(1+x+x^2+x^3)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{8}-\frac{\alpha^4}{4!}\right)x^2+o((\alpha x+x^2)^2)+o(x^2)}{\alpha\, x+x^2+o(x^2)}$$

dove

$$o((\alpha x+x^2)^2)=o(x^2)\quad \text{se } \alpha\neq 0,\qquad o((\alpha x+x^2)^2)=o(x^4)\quad \text{se } \alpha=0.$$

Nel secondo caso può comunque essere riassorbito nell'ultimo addendo, $o(x^2)$, quindi in conclusione

$$o((\alpha x+x^2)^2)+o(x^2)=o(x^2)\qquad \text{per ogni } \alpha\in\mathbf{R}.$$

Passando al limite si ottengono i seguenti risultati.
Se $\alpha\neq 0$ e $\alpha\neq -1$ si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3}-\cos(\alpha\sqrt{x})}{\alpha x+\log^2(1+x+x^2+x^3)}=\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}}{\alpha}=\frac{\alpha+1}{2},$$

se $\alpha=-1$ si ha (coerentemente con il limite precedente, cioè ancora $\frac{\alpha+1}{2}$),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x+x^2+3x^3}-1}{\alpha x+\log^2(1+x+x^2+x^3)}=0.$$

Infine se $\alpha=0$ ricordiamo che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2+3x^3} &= 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\\
\cos(\alpha\sqrt{x}) &= 1
\end{aligned}$$

e quindi in questo caso si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x + x^2 + 3x^3} - 1}{\alpha x + \log^2(1 + x + x^2 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}$$

(questa volta casualmente coincide con il limite precedente).