CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 14 febbraio 2022

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio la seguente funzione e se ne tracci un grafico qualitativo:

$$f(x) = \left| -x - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} \right| .$$

Si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \lambda$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Si studino i seguenti integrali impropri al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$a) \qquad \int_4^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} \, dx ,$$

$$b) \qquad \int_1^{2} \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-1)}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} \, dx .$$

3. Si trovino le soluzioni ai due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4}{x^2 - 4} \operatorname{tg} y \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

con

$$a) \quad x_o = 3, \; y_o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b) \quad x_o = 3, \; y_o = 0$$

4. Si scriva lo sviluppo di Taylor fino al terzo ordine nel punto 0 della funzione

$$f(x) = e^{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3} .$$

Soluzioni

1. Chiamando

$$g(x) = -x - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x}$$

studieremo prima g per poi disegnare il grafico di f.

La funzione g non è definita, a priori, per $x = 0$. Svolgiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to0^+} g(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Allora la funzione f è estendibile a tutto $\mathbf{R}$. Considereremo quindi come dominio di f (non di g!) l'insieme $\mathbf{R}$ continuando a denotare con la lettera f la funzione estesa ad $\mathbf{R}$ il cui valore in 0 è $\pi/2$, funzione che così risulterà continua in $\mathbf{R}$.

Per comodità continueremo a trattare g. Derivando g (per $x \neq 0$) si ottiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\,\frac{-1}{x^2} = -1 + \frac{1}{x^2+(x+1)^2} = \\ &= \frac{1-\left(x^2+(x+1)^2\right)}{x^2+(x+1)^2} = -\frac{2x(x+1)}{x^2+(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Studiandone il segno si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-1,0), \\ = 0 & \text{per } x = -1, \\ < 0 & \text{per } x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty). \end{cases}$$

Prima di tutto si osservi che riguardo la funzione g si ha: per $x < 0$ la funzione è positiva mentre per $x > 0$ è negativa. Infatti

$$g(-1) = 1$$

e per il segno della derivata di g, $g(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e inoltre -1 risulta essere un punto di minimo locale per g; d'altra parte invece $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ e per x positivo g è decrescente.

Di conseguenza

$$f(x) = g(x) \quad \text{per } x < 0, \qquad f(x) = -g(x) \quad \text{per } x > 0. \tag{1}$$

Si noti che

$$\lim_{x\to0^-} g'(x) = \lim_{x\to0^+} g'(x) = 0.$$

Allora, per una conseguenza della regola di de l'Hôpital, si ha che f è derivabile anche in 0 e la sua derivata è nulla, per cui la funzione f' è estendibile a tutto $\mathbf{R}$ e

$$f'(0) = 0.$$

Si ottiene quindi, usando anche (1), anche il segno di f':

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-1, 0), \\ = 0 & \text{per } x = -1, x = 0, \\ < 0 & \text{per } x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty). \end{cases}$$

Derivando una seconda volta (sempre per $x \neq 0$, visto che deriviamo g) si ha che

$$g''(x) = \left(\frac{1}{x^2 + (x+1)^2} \right)^2 \big(-4x - 2 \big)$$

il cui segno è dato da

$$g''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -1/2), \\ = 0 & \text{per } x = -1/2, \\ < 0 & \text{per } x \in (-1/2, 0) \cup (0, +\infty). \end{cases}$$

Il segno di f'', da (1), è quindi

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -1/2) \cup (0, +\infty), \\ = 0 & \text{per } x = -1/2, \\ < 0 & \text{per } x \in (-1/2, 0). \end{cases}$$

Si osservi che

$$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = -2, \qquad \lim_{x \to 0^+} f''(x) = +2,$$

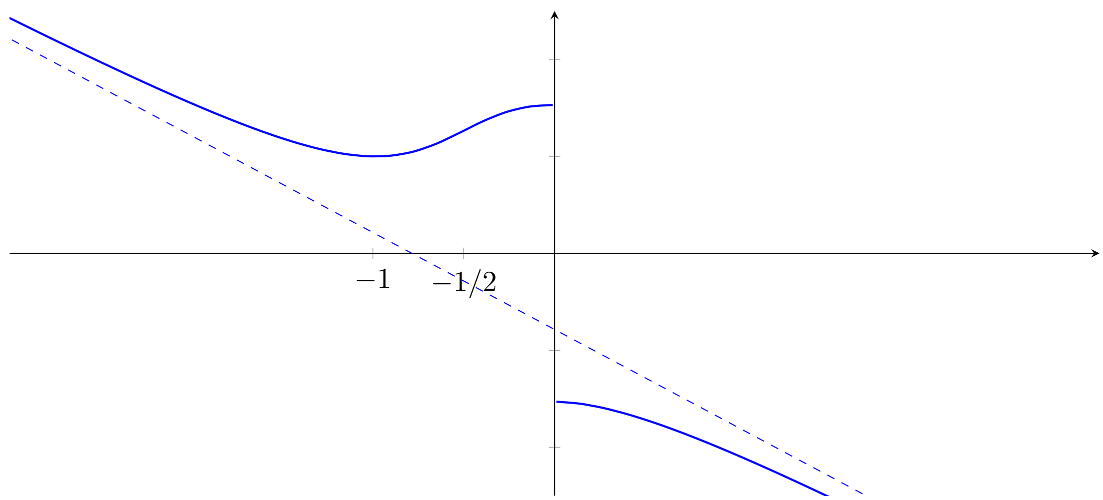
per cui f non risulta derivabile due volte in 0, ma 0 è comunque un punto in cui la concavità cambia.

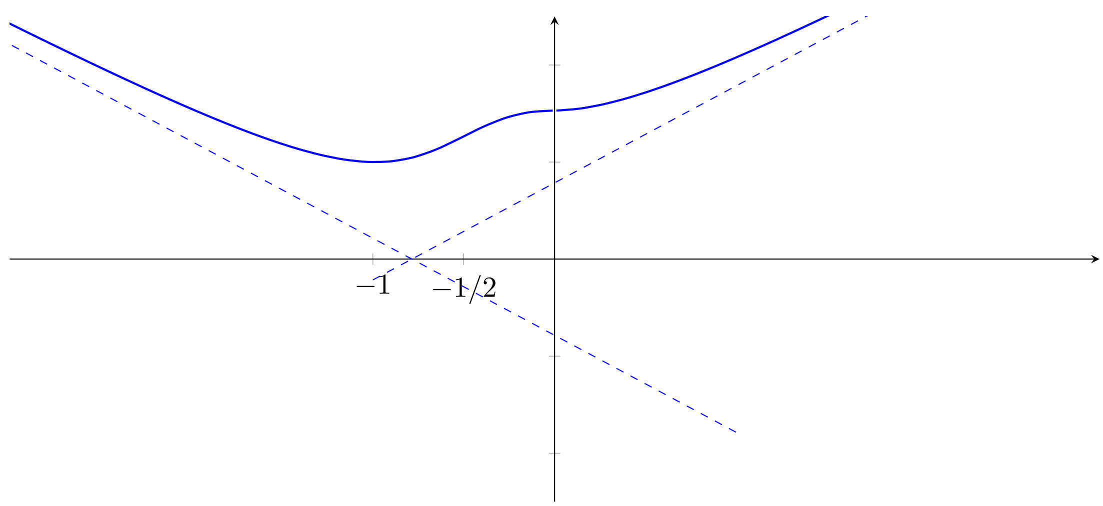
Il punto -1, di minimo locale per g, risulta essere di minimo assoluto per f, che non ha massimo e nemmeno massimo locali.

Infine si osservi che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \big[g(x) + x \big] = -\frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \big[g(x) + x \big] = -\frac{\pi}{4}.$$

per cui g ha come asintoto obliquo, sia a $-\infty$ che a $+\infty$, la retta $-x - \pi/4$, mentre f ha come asintoti la retta $-x - \pi/4$ a $-\infty$ e la retta $x + \pi/4$ a $+\infty$.
Di conseguenza il grafico di g (anche se non richiesto) e il grafico di f sono i seguenti:





La funzione f, come già osservato, ha minimo assoluto in -1 e tale minimo vale 1. Per cui l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

non ha soluzioni per $\lambda < 1$, ha una sola soluzione per $\lambda = 1$ (ed è -1), per ogni altro valore di λ ha esattamente due soluzioni. Infatti in $x = 0$ la derivata di f è nulla, ma tale punto è un punto di flesso orizzontale, per cui l'equazione

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

ha come soluzioni 0 e un valore negativo.

2. *a*) Si osservi che

$$|(x-1)(x-3)|^\alpha = |(x-1)|^\alpha |(x-3)|^\alpha,$$

quindi la quantità a denominatore non si annulla mai nell'intervallo $[4, +\infty)$, l'unica cosa da verificare è l'andamento della funzione integranda a $+\infty$. Tale funzione a $+\infty$ è asintotica a $1/x^{2\alpha}$, di conseguenza l'integrale converge se e solo se $2\alpha > 1$.

b) La funzione a numeratore è limitata, quella a denominatore si annulla nel punto 1 e per questo (e solo per questo) l'integrale risulta improprio. Come già osservato il denominatore può essere riscritto come

$$|(x-1)(x-3)|^\alpha = |(x-1)|^\alpha |(x-3)|^\alpha$$

per cui il denominatore, per $x \to 1$, è un infinitesimo di ordine α.

Analizziamo il numeratore. Prima di tutto ricordiamo gli sviluppi, intorno a 0, delle funzioni seno ed arcotangente, che ci basteranno fino al terzo ordine:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} y &= y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \\ \operatorname{arctg} y &= y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3), \end{aligned}$$

dai quali ricaviamo anche gli sviluppi (mettendo $x-1$ al posto di y)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-1) &= (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big), \\ \operatorname{arctg}(x-1) &= (x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big) \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-1) &= -\frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big), \\ &= \frac{1}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big). \end{aligned}$$

Di conseguenza il confronto asintotico

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-1)}{|x^2-4x+3|^\alpha}}{\dfrac{1}{|x-1|^{\alpha-3}}} = \frac{1}{6}$$

fornisce la risposta alla domanda: l'integrale converge per $\alpha - 3 < 1$, cioè per valori di α che soddisfano
$$\alpha < 4,$$
mentre diverge positivamente per $\alpha \geqslant 4$.

3. Supponendo $y \neq 0$, e quindi $\operatorname{tg} y \neq 0$, si possono separare le variabili
$$\frac{y'}{\operatorname{tg} y} = \frac{4}{x^2-4}.$$
Scrivendo
$$\frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \qquad \text{e} \qquad \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$
e integrando si ottiene
$$\log|\operatorname{sen} y| = \log|x-2| - \log|x+2| + k = \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \log c = \log c\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$
dove $k \in \mathbf{R}$ e $c > 0$. Da ciò si ricava
$$|\operatorname{sen} y| = c\left|\frac{x-2}{x+2}\right|. \tag{2}$$

a) Poiché per $x = 3$ la quantità $\frac{x-2}{x+2}$ è positiva e anche la quantità $\operatorname{sen} y$ è positiva per $y = \sqrt{2}/2$ si ha che la soluzione cercata deve soddisfare
$$\operatorname{sen} y = c\,\frac{x-2}{x+2}$$
da cui si ricava
$$y(x) = \operatorname{arcsen}\left(c\,\frac{x-2}{x+2}\right).$$
Imponendo la condizione iniziale si ha
$$y(3) = \operatorname{arcsen}\left(c\,\frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{c}{5} = \frac{\pi}{4}$$
da cui
$$y(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{5\pi}{4}\,\frac{x-2}{x+2}\right).$$
b) Infine l'ultimo caso. Non possiamo applicare il ragionamento iniziale perchè non è possibile dividere per $\operatorname{tg} y$ che si annulla in 0. In questo caso però si osserva che la soluzione
$$y \equiv 0$$
soddisfa sia il dato iniziale, sia l'equazione differenziale, ed è quindi la soluzione del problema di Cauchy.

4. Sviluppando la funzione esponenziale fino al terzo ordine (i termini che mancano dagli sviluppi del quadrato e del cubo del trinomio sono inglobati nell'o piccolo di x^3)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3} = \\
&= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(x^3) = \\
&= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{6}x^3 \qquad\qquad + o(x^3) = \\
&= 1 + x + o(x^3)
\end{aligned}$$

dove si sono trascurati alcuni termini delle potenze perché o piccoli di x^3.