CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 11 luglio 2022

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi <u>in dettaglio</u> la funzione data dall'espressione

$$f(x) = \frac{1}{x}\, \exp\left(-\frac{\log^2|x|}{2}\right)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.
Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma si richiede di dire qual è il minimo numero di flessi che necessariamente ha f.
Infine si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \lambda$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Si calcolino i seguenti limiti:

$$a)\qquad \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{e^t - \cosh^2\sqrt{t}}{t^3}\, dt\,,$$

$$b)\qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x} \int_x^1 \frac{e^t - \cosh^2\sqrt{t}}{t^3}\, dt\,.$$

3. Si trovino, quando possibile, le soluzioni ai tre problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\,x\,y^3}{(x+1)^2} \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

con

$$a)\quad y_o = 1\,, \qquad b)\quad y_o = -1\,, \qquad c)\quad y_o = 0\,.$$

4. Si studino la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+1}}\,.$$

Soluzioni

1. Innanzitutto per semplicità qualche volta scriveremo g per l'espressione

$$g(x) = \exp\left(-\frac{\log^2|x|}{2}\right).$$

L'espressione che definisce f non è definita, a priori, per $x = 0$, mentre è definita per ogni altro valore di x. Si osservi che per $x > 0$ possiamo scrivere

$$\frac{1}{x} = e^{-\log x}.$$

Possiamo quindi scrivere f per $x > 0$ come segue:

$$f(x) = e^{-\log x} e^{-\frac{\log^2|x|}{2}} = e^{-\log x\left(\frac{\log x}{2}+1\right)}$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,.$$

Per simmetria, poiché la funzione è dispari, oppure scrivendo per $x < 0$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{-x} = -e^{-\log(-x)} = -e^{-\log|x|}$$

si conclude in maniera analoga.
Quindi f può essere estesa ad una funzione definita in $\mathbf{R}$, che denoteremo ancora con f per semplicità.
Svolgendo i limiti agli estremi del dominio, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

Derivando f (per $x \neq 0$) si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\,g(x) + \frac{1}{x}\,g(x)\left(-2\,\frac{1}{|x|}\,\frac{|x|}{x}\,\frac{\log(|x|)}{2}\right) = \\ &= -\frac{g(x)}{x^2}\big(1+\log|x|\big)\,. \end{aligned}$$

Tale derivata si annulla per $x = 1/e$ e $x = -1/e$.
Calcoliamo ora la derivata in $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\,\exp\left(-\frac{\log^2|h|}{2}\right) = 0\,.$$

Alternativamente si può calcolare il limite in zero della derivata prima (per un corollario delle regola di de l'Hôpital).
Quindi si hanno tre punti critici per f:

$$-\frac{1}{e}\,,\quad 0\,,\quad \frac{1}{e}\,.$$

Dal segno di f si deduce immediatamente che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e} &\qquad \text{è punto di minimo}\,, \\ 0 &\qquad \text{è punto di flesso}\,, \\ \frac{1}{e} &\qquad \text{è punto di massimo}\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\qquad \text{in } (-e^{-1}, 0) \cup (0, e^{-1}), \\ f'(x) < 0 &\qquad \text{in } (-\infty, -e^{-1}, 0) \cup (e^{-1}, +\infty). \end{aligned}$$

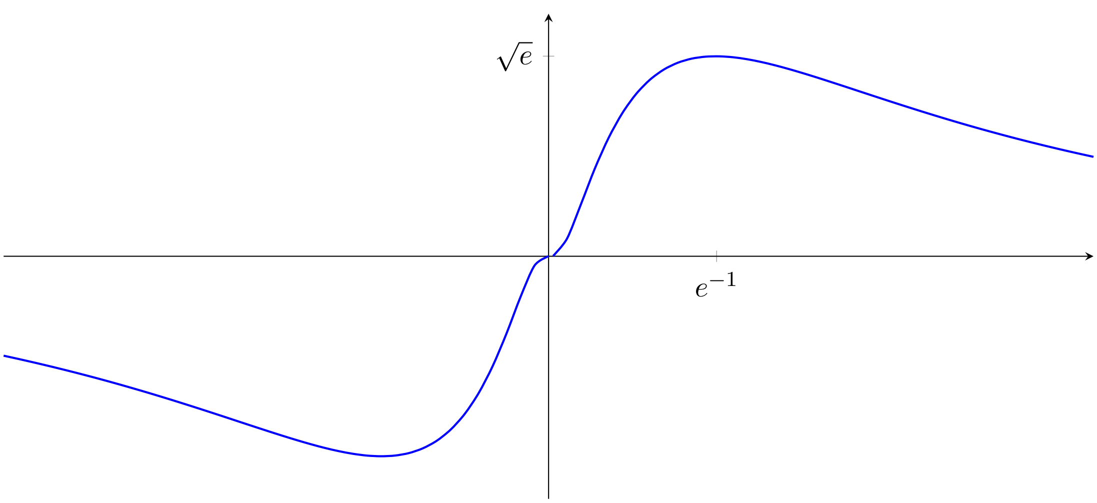
La derivata seconda è data dall'espressione

$$f''(x) = -\frac{g(x)}{x^3}\big(1 + (2 + g(x)) \log |x|\big)$$

e l'equazione $1 + (2 + g(x)) \log |x| = 0$ non si risolve.
Però, dal momento che f in zero ha un flesso orizzontale, i punti $x = 1/e$ e $x = -1/e$ sono stazionari e

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

ci deve essere (almeno) un punto di flesso tra 0 ed $1/e$ ed (almeno) un altro tra $1/e$ e $+\infty$. Poiché l'analogo vale per $x < 0$ e contando anche $x = 0$ si conclude che f deve avere almeno cinque punti di cambio di concavità.
Il grafico è riportato in figura.



Per rispondere all'ultima domanda: calcoliamo i valori minimo e massimo di f,

$$f(-1/e) = -\sqrt{e}, \qquad f(1/e) = \sqrt{e}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{array}{ll} f(x)=\lambda & \text{non ha soluzione per } \lambda<-\sqrt{e} \text{ o } \lambda>\sqrt{e}, \\ f(x)=\lambda & \text{ha esattamente una soluzione per } \lambda=-\sqrt{e} \text{ o } \lambda=0 \text{ o } \lambda=\sqrt{e}, \\ f(x)=\lambda & \text{ha esattamente due soluzioni per } \lambda\in(-\sqrt{e},0) \text{ o } \lambda\in(0,\sqrt{e}). \end{array}$$

2. *a*) Sviluppiamo dapprima la funzione

$$t \mapsto e^t - \cosh^2 \sqrt{t}$$

nello zero. Si ha

$$\begin{aligned} e^t - \cosh^2\sqrt{t} &= e^t - \left(\frac{e^{\sqrt{t}}+e^{-\sqrt{t}}}{2}\right)^2 = e^t - \left(\frac{e^{2\sqrt{t}}+e^{-2\sqrt{t}}+2}{4}\right) = \\ &= 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)+ \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(1+2\sqrt{t}+\frac{4t}{2}+\frac{8t^{3/2}}{6}+\frac{16t^2}{4!}+1-2\sqrt{t}+\frac{4t}{2}-\frac{8t^{3/2}}{6}+\frac{16t^2}{4!}+o(t^2)+2\right) = \\ &= 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-\left(1+t+\frac{1}{3}t^2+o(t^2)\right) = \frac{1}{6}t^2+o(t^2). \end{aligned}$$

Chiaramente è equivalente scrivere

$$\begin{aligned} e^t - \cosh^2\sqrt{t} &= e^t - \left(\frac{e^{\sqrt{t}}+e^{-\sqrt{t}}}{2}\right)^2 = e^t - \left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4!}+o(t^2)\right)^2 = \\ &= 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) - \left(1+t+\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{12}+o(t^2)\right) = \frac{1}{6}t^2+o(t^2). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{e^t-\cosh^2\sqrt{t}}{t^3} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{t} + \frac{o(t^2)}{t^3}$$

e tale funzione può essere confrontata asintoticamente con $1/t$ nell'origine. Di conseguenza l'integrale improprio richiesto ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt\,,$$

che diverge a $+\infty$.

b) Utilizzando il punto precedente e la formula di de l'Hôpital (si verifichi l'applicabilità) si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x}\int_x^1 \frac{e^t-\cosh^2\sqrt{t}}{t^3}\,dt &= -\lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^x-\cosh^2\sqrt{x}}{x^3} = \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+\frac{o(x^2)}{x^3}\right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. Separando le variabili, nel caso in cui y non si annulli, si ottiene

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{2\,x}{(x+1)^2}\,.$$

Integrando si ottiene

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} &= 2\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \\ &= 2\log|x+1| + 2\frac{1}{x+1} + c = \log(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + c'\end{aligned}$$

da cui

$$y^2(x) = \frac{1}{\log(x+1)^{-4} - \dfrac{4}{x+1} + c} \qquad \text{con } c = -2c'.$$

Da ciò si ottiene che

$$y^2(0) = 1 \qquad \text{per } c = 5\,.$$

Di conseguenza il problema $a\,)$ ha come soluzione

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{\log(x+1)^{-4} - \dfrac{4}{x+1} + 5}}\,,$$

il problema $b\,)$ ha come soluzione

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{\log(x+1)^{-4} - \dfrac{4}{x+1} + 5}}\,,.$$

Per quanto riguarda il problema $c\,)$, nel qual caso non possiamo dividere per y^3, si verifica facilmente che

$$y \equiv 0$$

è soluzione.

4. Poiché la quantità $\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+1}} > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ la serie risulta a segni alterni. A questo punto l'unica cosa che rimane da fare è vedere se la successione

$$a_n := \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+1}}$$

è decrescente. Per far ciò deriviamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^6+1}}$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x^6+1}\frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\big(-x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 2x + 1\big).$$

Tale funzione è definitivamente negativa, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty,$$

per cui f è definitivamente strettamente decrescente, per cui anche $(a_n)_n$ è strettamente (definitivamente) decrescente.
A questo punto si può applicare il criterio di Leibniz per concludere.
Si osservi che la serie non converge assolutamente: infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1.$$