CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19 settembre 2022

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi in dettaglio la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = |x|\big(1 + \log|x|\big)^2,$$

tracciandone un grafico qualitativo.

2. Si studi il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + x^2) - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x^2}{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Si dica se esiste, finito o infinito, il seguente limite:

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^{\pi/2} \frac{\cos x \left(x^2 - (\log(1+x))^2\right)}{e^x \sqrt{x^7 + x^{10}}}\, dx$$

4. Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{-\operatorname{sen}^2 t + \cos t + 2}\, dt\,, \qquad \int_0^{\pi} \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{-\operatorname{sen}^2 t + |\cos t| + 2}\, dt\,.$$

Facoltativo - (da farsi dopo aver svolto gli altri quattro esercizi)
Si determinino gli eventuali valori di α nell'insieme $(0, +\infty)$ per i quali la funzione

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha \big(1 + \log|x|\big)^2$$

risulti C^1 su $\mathbf{R}$ o possa essere estesa ad una funzione $C^1(\mathbf{R})$.

Soluzioni

1. La funzione f a priori non è definita per $x \neq 0$, quindi il dominio è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^-} |x|(1+\log|x|)^2 = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} x(1+\log x)^2 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La funzione può essere estesa al punto 0. In tal caso si ha una nuova funzione definita in $\mathbf{R}$, **continua** nel suo dominio, definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che per semplicità continueremo a chiamare f.
Poiché la funzione è pari ci limitiamo a studiarla per $x \geqslant 0$. La derivata di f è

$$f'(x) = (1+\log x)^2 + 2(1+\log x)\,.$$

Guardando f' come un polinomio nella variabile $(1+\log x)$ (oppure scrivendo $f'(x) = (1+\log x)(3+\log x)$ e studiando il segno dei due fattori) si ricava facilmente il segno della derivata di f:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 1+\log x > 0 \quad \text{o} \quad 1+\log x < -2\,, \\ = 0 & \text{se } 1+\log x = 0 \quad \text{o} \quad 1+\log x = -2\,, \\ < 0 & \text{se } 0 < 1+\log x < -2\,, \end{cases}$$

il che è equivalente a

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)\,, \\ = 0 & \text{se } x = e^{-3} \quad \text{o} \quad x = e^{-1}\,, \\ < 0 & \text{se } e^{-3} < x < e^{-1}\,. \end{cases}$$

Valutiamo i valori di f nei punti e^{-3} e e^{-1}:

$$f(e^{-3}) = \frac{4}{e^3}\,, \qquad f(e^{-1}) = 0\,.$$

Poiché f è non negativa e si annulla, e si annulla solamente, in $x = e^{-1}$ e in $x = 0$, tali punti sono di minimo assoluto.
Per disegnare un grafico di f valutiamo anche se esiste la derivata di f in 0. Poiché

$$f'(x) = (1+\log x)\Big[(1+\log x)+2\Big] = (1+\log x)(3+\log x)\,,$$

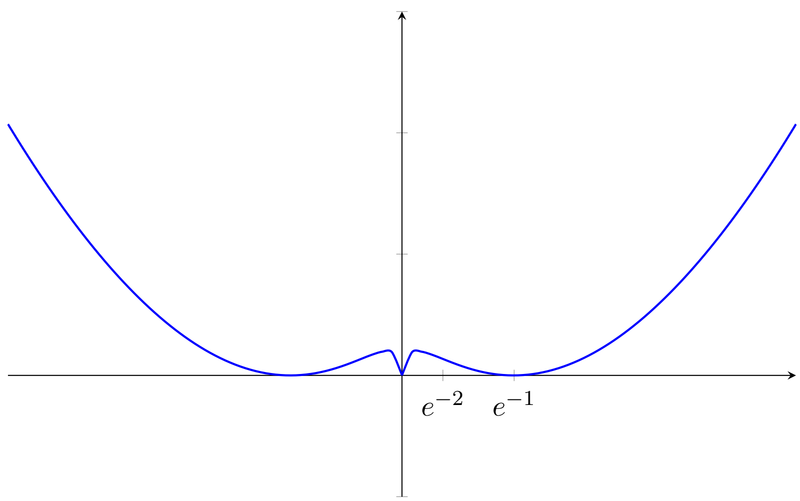
si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

per cui (per simmetria $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$) si avrà una cuspide in 0.
Infine anche la derivata seconda è semplice da studiare, quindi studiamone il segno. Si ha

$$f''(x) = \frac{1}{x}(3 + \log x) + \frac{1}{x}(1 + \log x) = \frac{1}{x}\ (4 + 2\log x)$$

che è positiva per $x > e^{-2}$, per cui f è concava in $(0, e^{-2})$ e convessa in $(e^{-2}, +\infty)$.



Per quanto riguarda il punto FACOLTATIVO, cioè lo studio di $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \big(1 + \log|x|\big)^2$, si osservi prima di tutto che

$$f_\alpha \quad \text{non è definita per } x = 0\,.$$

Affinché la funzione possa essere estesa anche al punto $x = 0$, in modo che l'estensione risulti continua, dovrà esistere, finito, il limite $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$. Per la simmetria di f_α, che è pari, se esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x)\,,$$

tali limiti sono uguali. È sufficiente allora valutarne uno dei due. Si ha ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0 \qquad \text{se } \alpha > 0\,.$$

Poiché il nostro parametro può muoversi nell'insieme $(0, +\infty)$, per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ si ha che

$$\tilde f_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{è continua in } \mathbf{R}.$$

Chiaramente la funzione così estesa è derivabile e di calsse C^1 nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Rimane da vedere se, ed eventualmente per quali valori di α, $\tilde{f}_\alpha$ è derivabile in 0 e tale derivata è continua. Se esiste la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ in 0 è data da

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}_\alpha(h) - \tilde{f}_\alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha \big(1 + \log|h|\big)^2}{h}\,.$$

Tale limite esiste, finito, se e solo se $\alpha > 1$ e inoltre tale limite è 0, quindi

$$\tilde{f}'_\alpha(0) = 0 \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1\,.$$

Per vedere se la funzione è estendibile ad una funzione di classe C^1 si può fare un ragionamento analogo a quanto fatto per studiare la contiuità. L'analogia sta nel fatto che anche la derivata f'_α avrà una simmetria, poiché f_α è pari, f'_α risulterà dispari. Calcoliamo la derivata di $\tilde{f}_\alpha$ per $x > 0$:

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1}\Big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\Big]\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \big[\alpha\,(1+\log x)^2 + 2\,(1+\log x)\big] = +\infty$$

l'unica speranza per avere $\lim_{x\to 0^+} f'_\alpha(x)$ finito è che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \quad \text{sia } 0\,, \quad \text{cioè } \alpha > 1\,.$$

Conclusione: per $\alpha > 1$, e solo per tali valori, $\tilde{f}_\alpha$ è continua, derivabile e la sua derivata è continua.

2. Ricordiamo gli sviluppi che ci serviranno, arrestati all'ordine minimo che ci sarà utile, tutti nel punto 0:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\\
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\\
\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2).
\end{aligned}$$

Si provi a verificare che lo sviluppo $\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ non è sufficiente a risolvere l'esercizio.
Dagli sviluppi appena scritti si ottiene (i termini in grigio saranno poi assorbiti nell'o

piccolo di x^4)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+x^2) - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x^2 &= \\
&= \left[x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{3!} + o((x+x^2)^4)\right] + \\
&\quad - \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right] - \left[x^2 + o(x^4)\right] = \\
&= \left[x + x^2 - \frac{x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6}{3!} + o(x^4)\right] + \\
&\quad - x + \frac{x^3}{3!} - x^2 + o(x^4) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4),
\end{aligned}$$

mentre il denominatore risulta essere

$$\begin{aligned}
&\cos x - \sqrt{1-x^2} = \\
&= \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right] = \frac{x^4}{6} + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Facendo il limite si ottiene quindi -3.

3. La funzione $x \mapsto \frac{\cos x\,(x^2-(\log(1+x))^2)}{e^x\sqrt{x^7+x^{10}}}$ è asintotica a $x \mapsto \dfrac{1}{x^{1/2}}$ in 0. Infatti

$$\begin{aligned}
x^2 - (\log(1+x))^2 &= x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = \\
&= x^2 - \left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

e il denominatore è semplicemente

$$e^x\sqrt{x^7+x^{10}} = e^x x^{7/2}\sqrt{1+x^3}.$$

Di conseguenza l'integrale converge.

4. Chiamando x la quantità $\cos t$ e poiché $-\operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t - 1$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{-\operatorname{sen}^2 t + \cos t + 2}\,dt &= -\int_1^0 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \\
&= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,.
\end{aligned}$$

È sufficiente valutare la primitiva di $\frac{1}{x^2+x+1}$, dal momento che

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \log 3\,.$$

Per quanto riguarda il secondo addendo si osservi che

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right].$$

Effettuando il cambio di variabile

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

si ottiene

$$-\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx = -\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1}\, dy =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

quindi il risultato del primo integrale è

$$\log 3 - \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Per quanto riguarda il secondo integrale si procede il maniera simile. Con la stessa sostituzione si ottiene

$$-\int_1^{-1} \frac{2x}{x^2 + |x| + 1}\, dx = \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + |x| + 1}\, dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 - x + 1}\, dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

Ci limitiamo a calcolare il primo dei due che, analogamente a prima, è

$$\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 - x + 1}\, dx = \int_{-1}^0 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx =$$

$$= \log(x^2 - x + 1)\Big|_{-1}^0 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{-1/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + y^2}\, dy =$$

$$= -\log 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{-1/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + y^2}\, dy$$

che, per simmetria, si elide con il termine precedentemente calcolato, $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$. Di conseguenza il risultato del secondo integrale è 0.