**CdL Ingegneria Meccanica**

**Prova scritta di Analisi Matematica 1**

Padova, 26 gennaio 2023

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

**1.** Si studino in dettaglio le funzioni $f$ e $g$ definite dalle espressioni

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x^2-1}\right), \qquad g(x) = \operatorname{arctg}\left|\frac{2}{x^2-1}\right|,$$

tracciandone un grafico qualitativo.
Si studino poi i seguenti integrali generalizzati

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} g(x)\,dx.$$

**2.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$a$) si scriva lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) al secondo ordine di $f$ nel punto 0;
$b$) si calcolino i seguenti limiti, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\,f(x) - \sqrt{1+x} + 3\,x^2}{x\log(1+x) + \cos x - 1};$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,f(x^2) - \sqrt{1+x^2} + 3\,x^4}{\big(\log(1+x)\big)^2 + 2\alpha\,(\cos x^\alpha - 1) + \operatorname{sen} x^3}.$$

**3.** Si calcoli

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}\big(x^2-1\big)\,dx$$

**4.** Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$\sqrt{x} = \log(e\,x) \qquad \text{nell'insieme } [1, +\infty).$$

## Soluzioni

**1.** La funzione $f$, a priori, non è definita per $x = -1$ e per $x = 1$, quindi

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \frac{\pi}{2}\,, & \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) &= -\frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= -\frac{\pi}{2}\,, & \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= 0\,, & \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Si osservi che la funzione è pari, ci si potrebbe quindi limitare a studiarla solamente per $x \geqslant 0$, ma non c'è un gran risparmio di lavoro.
La derivata di $f$, per $x^2 \neq 1$, è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2} \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \tag{1}$$

da cui

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2+4}, \qquad x^2 \neq 1, \qquad \mathrm{dom}(f') = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{x\to -1^-} f'(x) = \lim\nolimits_{x\to -1^+} f'(x) = 1,\\
\lim\nolimits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\nolimits_{x\to 1^+} f'(x) = -1,
\end{aligned} \tag{2}$$

ma questo non significa che $f$ è derivabile nei punti $-1$ e $1$, in quanto in quei punti non è nemmeno definita.
La derivata prima è positiva per $x < 0$, si annulla in $0$ ed è negativa per $x > 0$. Se ne deduce immediatamente che

$$\begin{aligned}
f \quad &\text{è crescente in } (-\infty, -1) \cup (-1, 0),\\
f \quad &\text{è decrescente in } (0, 1) \cup (1, +\infty, -1).
\end{aligned}$$

Inoltre ha un massimo locale in $0$ il cui valore è $\operatorname{arctg}(-2)$.
Studiamo ora la derivata seconda, definita anch'essa in $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{\big((x^2-1)^2+4\big)^2}\Big[4(x^2-1)^2 + 16 - 16x^2(x^2-1)\Big].$$

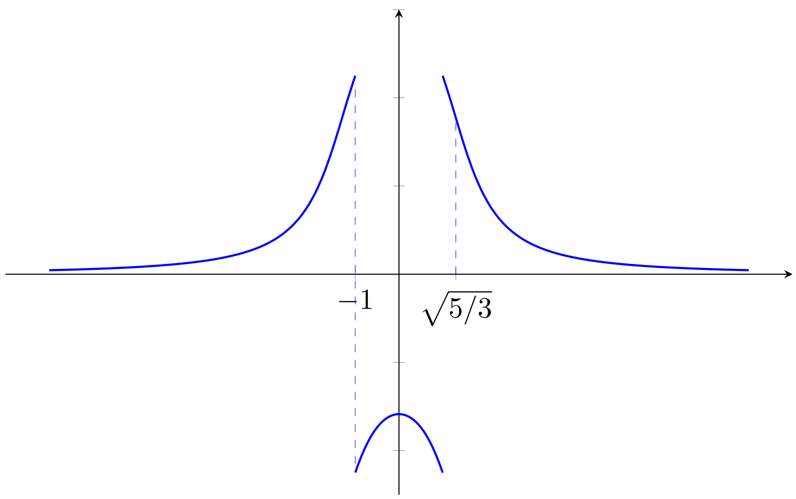
Per studiare il segno di $f''$ ci si può limitare a studiare il segno di

$$-\big[4(x^2-1)^2 + 16 - 16x^2(x^2-1)\big] = 4\big[3x^4 - 2x^2 - 5\big].$$

Gli zeri reali di $3x^4 - 2x^2 - 5$ (visto come polinomio di secondo grado in $x^2$) sono $-\sqrt{5/3}$ e $\sqrt{5/3}$, per cui

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -\sqrt{5/3}) \cup (\sqrt{5/3}, +\infty)\,, \\ = 0 & \text{per } x = -\sqrt{5/3} \quad \text{o} \quad x = \sqrt{5/3}\,, \\ < 0 & \text{per } x \in (-\sqrt{5/3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{5/3})\,. \end{cases}$$

Il grafico di $f$ è quindi il seguente




Venendo alla funzione $g$, anch'essa a priori non è definita per $x = -1$ e per $x = 1$, però

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x \to -1^+} g(x) = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

La funzione può quindi essere estesa nei punti $-1$ e $1$. In tal caso si ha una nuova funzione definita in $\mathbf{R}$, **continua** nel suo dominio, definita da

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x^2 \neq 1\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x^2 = 1 \end{cases}$$

che per semplicità continueremo a chiamare $g$.
La derivata di $g$ (si controlli (1)) è semplicemente

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2} \frac{\left|\frac{2}{x^2-1}\right|}{\frac{2}{x^2-1}} \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{\left|\frac{2}{x^2-1}\right|}{\frac{2}{x^2-1}}\, f'(x),$$

per cui

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x^2 > 1, \\ -f'(x) & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

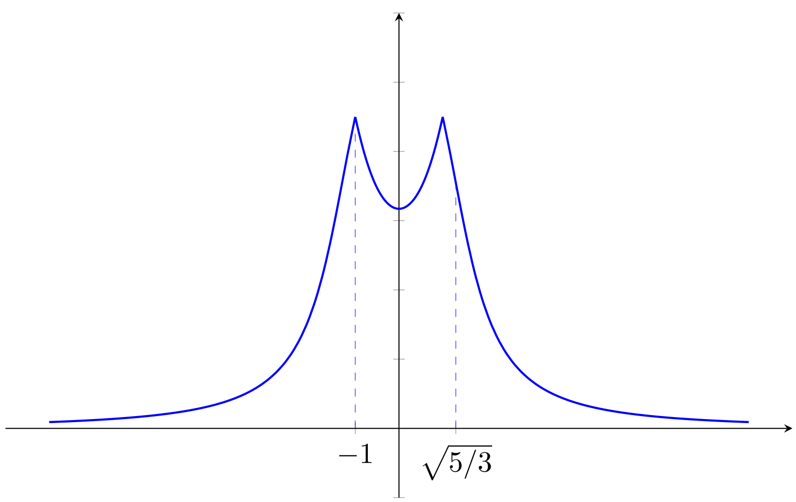
Da (2) si deduce che

$$\lim_{x \to -1^-} g'(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -1^+} g'(x) = -1,$$
$$\lim_{x \to 1^-} g'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 1^+} g'(x) = 1,$$

per cui $g$ risulta continua in $\mathbf{R}$, ma non derivabile in $-1$ e in $1$. Ovviamente

$$g''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{se } x^2 > 1, \\ -f''(x) & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

Il grafico di $g$ è quindi il seguente




Per quanto riguarda gli integrali generalizzati: le funzioni integrande sono limitate, quindi l'unico problema è che l'intervallo di integrazione è illimitato, va quindi verificato solamente il comportamento all'infinito.
Poiché, per $x > 1$, $f$ e $g$ coincidono, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 2,$$

per cui entrambi gli integrali convergono.

**2.** Valutando le derivate

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

di $f$ si ottiene:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}\Big[e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\Big] = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^{3/2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{(e^{2x}+1)^3}\Big[e^x(e^{2x}+1)^{3/2} - 3e^{3x}(e^{2x}+1)^{1/2}\Big] = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^{5/2}}\big[1-2e^{2x}\big].$$

Per cui lo sviluppo di $f$ al secondo ordine in 0 è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,x - \frac{1}{8\sqrt{2}}\,x^2 + o(x^2).$$

Sviluppando $x \mapsto \sqrt{1+x}$ al secondo ordine, $x \mapsto \log(1+x)$ al primo ordine e il coseno al secondo si ha che

$$\frac{\sqrt{2}\,f(x) - \sqrt{1+x} + 3\,x^2}{x\log(1+x) + \cos x - 1} = \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + 3\,x^2 + o(x^2)}{x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{3\,x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Facendo il primo limite si ottiene quindi 6.

Per quanto riguarda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,f(x^2) - \sqrt{1+x^2} + 3\,x^4}{\big(\log(1+x)\big)^2 + 2\alpha\,(\cos x^\alpha - 1) + \operatorname{sen} x^3}.$$

si ha che il numeratore è, similmente a prima,

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 3\,x^4 + o(x^4) = 3\,x^4 + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il denominatore invece si ha:

$$\begin{aligned}
\big(\log(1+x)\big)^2 &= \big(x + o(x^2)\big)^2 = x^2 + o(x^2), \qquad \text{(al secondo ordine)}\\
\big(\log(1+x)\big)^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 - x^3 + o(x^3), \qquad \text{(al terzo ordine)}\\
\big(\log(1+x)\big)^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^4) =\\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}\,x^4 + o(x^4) \qquad \text{(al quarto ordine)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\cos x^\alpha = 1 - \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{4\alpha}}{4!} - \frac{x^{6\alpha}}{6!} + \ldots + o(x^{k\alpha})\\
&\operatorname{sen} x^3 = x^3 + o(x^4)
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\log(1+x)\bigr)^2 + 2\alpha\,(\cos x^\alpha - 1) + \operatorname{sen} x^3 = \\
&= \begin{cases}
x^2 - \alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x^3 = -\alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) & \text{se } \alpha < 1, \\
x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + o(x^4) - \alpha x^{2\alpha} + \alpha\dfrac{x^{4\alpha}}{12} + o(x^{4\alpha}) + \operatorname{sen} x^3 = & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 1, \\
x^2 + o(x^2) - \alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) + \operatorname{sen} x^3 = x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

In conclusione il limite richiesto è

$$0 \quad \text{se } \alpha \neq 1, \qquad 3 \quad \text{se } \alpha = 1.$$

**3.** Integrando per parti si ha:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \operatorname{arcsen}\bigl(x^2-1\bigr)\,dx &= x\operatorname{arcsen}\bigl(x^2-1\bigr)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} x\,\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\,dx = \\
&= -\int_{-1}^{0} x\,\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\,dx.
\end{aligned}
$$

Per valutare questo integrale si osservi che

$$1-(x^2-1)^2 = 2x^2 - x^4 = x^2(2-x^2)$$

e che, poiché $x<0$ (in quanto l'integrale va calcolato per $x$ tra $-1$ e $0$),

$$\sqrt{1-(x^2-1)^2} = -x\sqrt{2-x^2}.$$

Allora si ha

$$-\int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx.$$

Poiché

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2-x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}$$

l'ultimo integrale è

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = -2\,\sqrt{2-x^2}\,\Big|_{-1}^{0} = -2\,\sqrt{2}+2 = -2(\sqrt{2}-1).$$

Si osservi che, poiché l'argomento della funzione arcoseno è una funzione pari (ma su questo bisogna meditare un pochino, sostituendo $x$ con $-x$ e poi $-x$ con una nuova variabile $y$), si ha

$$\int_{-1}^{0} \operatorname{arcsen}\bigl(x^2-1\bigr)\,dx = \int_{0}^{1} \operatorname{arcsen}\bigl(x^2-1\bigr)\,dx.$$

**4.** Per risolvere l'equazione si consideri la funzione

$$f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x} - \log(e\,x).$$

Derivando $f$ ed eguagliando la derivata a zero si ottiene

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = 2.$$

Analogamente studiando il segno di $f'$ si ottiene

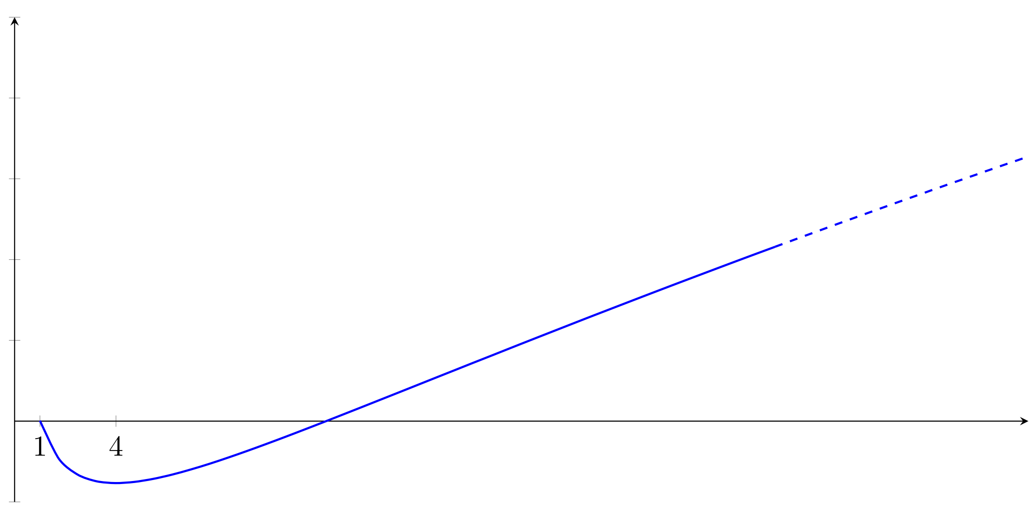
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad f' \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in [1,4), \\ = 0 & \text{per } x = 4, \\ > 0 & \text{per } x \in (4, +\infty), \end{cases}$$

cioè $f$ decresce fino a 4 e poi cresce da 4 in poi.
Si osservi che agli estremi del dominio si ha:

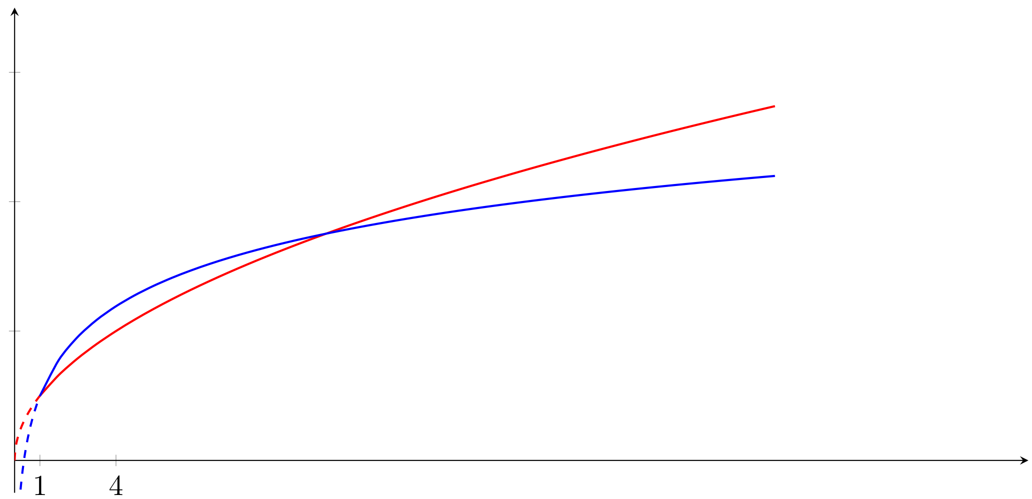
$$f(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui $f$ si annulla in 1 e in un altro punto, che sarà maggiore di 4, quindi l'equazione avrà due soluzioni nell'insieme $[1, +\infty)$.

Per completezza mostriamo il grafico di $f$:




e di seguito i grafici di $g(x) = \sqrt{x}$ in rosso, di $h(x) = \log(ex)$ in blu:


1
4