

CdL Ingegneria Meccanica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 26 gennaio 2023

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte. Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione. Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studino in dettaglio le funzioni f e g definite dalle espressioni

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{x^2 - 1} \right), \quad g(x) = \operatorname{arctg} \left| \frac{2}{x^2 - 1} \right|,$$

tracciandone un grafico qualitativo.

Si studino poi i seguenti integrali generalizzati

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

a) si scriva lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) al secondo ordine di f nel punto 0;

b) si calcolino i seguenti limiti, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} f(x) - \sqrt{1+x} + 3x^2}{x \log(1+x) + \cos x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} f(x^2) - \sqrt{1+x^2} + 3x^4}{(\log(1+x))^2 + 2\alpha(\cos x^\alpha - 1) + \operatorname{sen} x^3}.$$

3. Si calcoli

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) dx$$

4. Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$\sqrt{x} = \log(ex) \quad \text{nell'insieme } [1, +\infty).$$

Soluzioni

1. La funzione f , a priori, non è definita per $x = -1$ e per $x = 1$, quindi

$$\text{dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Si osservi che la funzione è pari, ci si potrebbe quindi limitare a studiarla solamente per $x \geq 0$, ma non c'è un gran risparmio di lavoro.

La derivata di f , per $x^2 \neq 1$, è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2} \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \quad (1)$$

da cui

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2 + 4}, \quad x^2 \neq 1, \quad \text{dom}(f') = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1, \end{aligned} \quad (2)$$

ma questo non significa che f è derivabile nei punti -1 e 1 , in quanto in quei punti non è nemmeno definita.

La derivata prima è positiva per $x < 0$, si annulla in 0 ed è negativa per $x > 0$. Se ne deduce immediatamente che

$$\begin{aligned} f &\text{ è crescente in } (-\infty, -1) \cup (-1, 0), \\ f &\text{ è decrescente in } (0, 1) \cup (1, +\infty, -1). \end{aligned}$$

Inoltre ha un massimo locale in 0 il cui valore è $\text{arctg}(-2)$.

Studiamo ora la derivata seconda, definita anch'essa in $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{((x^2-1)^2 + 4)^2} [4(x^2-1)^2 + 16 - 16x^2(x^2-1)].$$

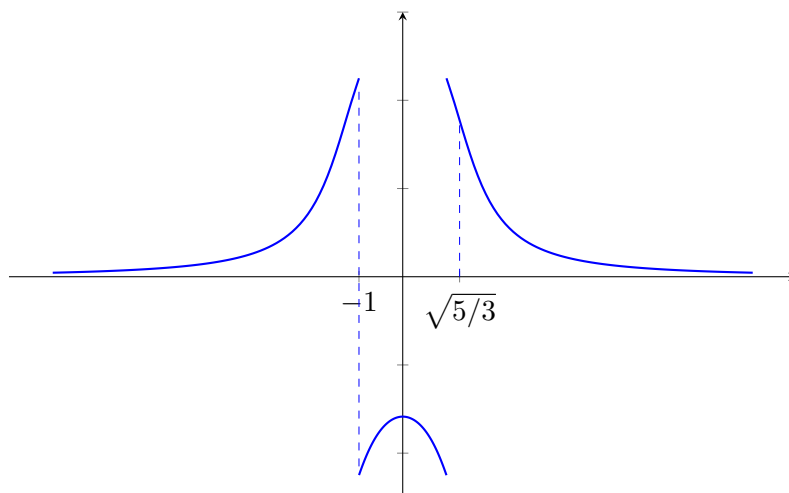
Per studiare il segno di f'' ci si può limitare a studiare il segno di

$$-[4(x^2-1)^2 + 16 - 16x^2(x^2-1)] = 4[3x^4 - 2x^2 - 5].$$

Gli zeri reali di $3x^4 - 2x^2 - 5$ (visto come polinomio di secondo grado in x^2) sono $-\sqrt{5/3}$ e $\sqrt{5/3}$, per cui

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -\sqrt{5/3}) \cup (\sqrt{5/3}, +\infty), \\ = 0 & \text{per } x = -\sqrt{5/3} \quad \text{o} \quad x = \sqrt{5/3}, \\ < 0 & \text{per } x \in (-\sqrt{5/3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{5/3}). \end{cases}$$

Il grafico di f è quindi il seguente



Venendo alla funzione g , anch'essa a priori non è definita per $x = -1$ e per $x = 1$, però

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) &= \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La funzione può quindi essere estesa nei punti -1 e 1 . In tal caso si ha una nuova funzione definita in \mathbf{R} , **continua** nel suo dominio, definita da

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x^2 \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x^2 = 1 \end{cases}$$

che per semplicità continueremo a chiamare g .

La derivata di g (si controlla (1)) è semplicemente

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2} \frac{\left|\frac{2}{x^2-1}\right|}{\frac{2}{x^2-1}} \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{\left|\frac{2}{x^2-1}\right|}{\frac{2}{x^2-1}} f'(x),$$

per cui

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x^2 > 1, \\ -f'(x) & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

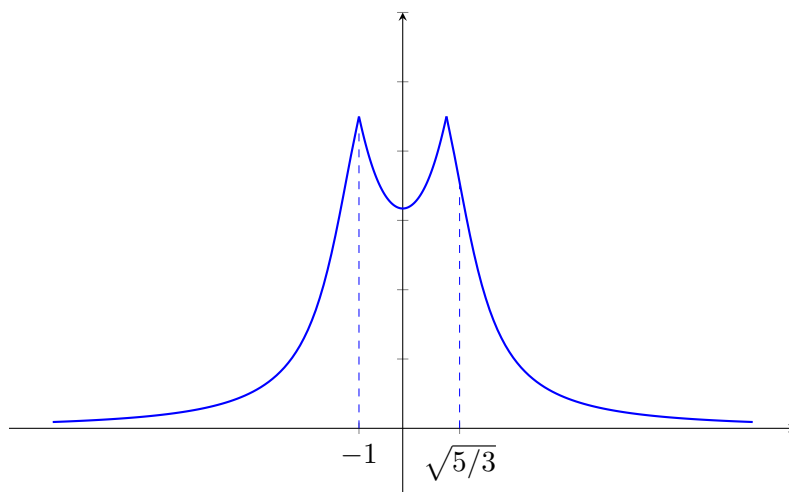
Da (2) si deduce che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) &= -1, & \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) &= 1, \end{aligned}$$

per cui g risulta continua in \mathbf{R} , ma non derivabile in -1 e in 1 . Ovviamente

$$g''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{se } x^2 > 1, \\ -f''(x) & \text{se } x^2 < 1. \end{cases}$$

Il grafico di g è quindi il seguente



Per quanto riguarda gli integrali generalizzati: le funzioni integrande sono limitate, quindi l'unico problema è che l'intervallo di integrazione è illimitato, va quindi verificato solamente il comportamento all'infinito.

Poiché, per $x > 1$, f e g coincidono, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 2,$$

per cui entrambi gli integrali convergono.

2. Valutando le derivate

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

di f si ottiene:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1} \left[e^x \sqrt{e^{2x} + 1} - \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \right] = \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^{3/2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{(e^{2x} + 1)^3} \left[e^x (e^{2x} + 1)^{3/2} - 3e^{3x} (e^{2x} + 1)^{1/2} \right] = \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^{5/2}} [1 - 2e^{2x}].$$

Per cui lo sviluppo di f al secondo ordine in 0 è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 + o(x^2).$$

Sviluppando $x \mapsto \sqrt{1+x}$ al secondo ordine, $x \mapsto \log(1+x)$ al primo ordine e il coseno al secondo si ha che

$$\frac{\sqrt{2}f(x) - \sqrt{1+x} + 3x^2}{x \log(1+x) + \cos x - 1} = \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + 3x^2 + o(x^2)}{x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{3x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Facendo il primo limite si ottiene quindi 6.

Per quanto riguarda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}f(x^2) - \sqrt{1+x^2} + 3x^4}{(\log(1+x))^2 + 2\alpha(\cos x^\alpha - 1) + \text{sen } x^3}.$$

si ha che il numeratore è, similmente a prima,

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + 3x^4 + o(x^4) = 3x^4 + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il denominatore invece si ha:

$$(\log(1+x))^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^2), \quad (\text{al secondo ordine})$$

$$(\log(1+x))^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 = x^2 - x^3 + o(x^3), \quad (\text{al terzo ordine})$$

$$\begin{aligned} (\log(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \\ &= x^2 - x^3 - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \quad (\text{al quarto ordine}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos x^\alpha &= 1 - \frac{x^{2\alpha}}{2} + \frac{x^{4\alpha}}{4!} - \frac{x^{6\alpha}}{6!} + \dots + o(x^{k\alpha}) \\ \text{sen } x^3 &= x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 & (\log(1+x))^2 + 2\alpha(\cos x^\alpha - 1) + \operatorname{sen} x^3 = \\
 & = \begin{cases} x^2 - \alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x^3 = -\alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) & \text{se } \alpha < 1, \\ x^2 - x^3 - \frac{5}{12} x^4 + o(x^4) - \alpha x^{2\alpha} + \alpha \frac{x^{4\alpha}}{12} + o(x^{4\alpha}) + \operatorname{sen} x^3 = \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{3} x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 1, \\ x^2 + o(x^2) - \alpha x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) + \operatorname{sen} x^3 = x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

In conclusione il limite richiesto è

$$0 \quad \text{se } \alpha \neq 1, \quad -9 \quad \text{se } \alpha = 1.$$

3. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) dx &= x \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} dx = \\
 &= - \int_{-1}^0 x \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} dx.
 \end{aligned}$$

Per valutare questo integrale si osservi che

$$1 - (x^2 - 1)^2 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2)$$

e che, poiché $x < 0$ (in quanto l'integrale va calcolato per x tra -1 e 0),

$$\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2} = -x\sqrt{2 - x^2}.$$

Allora si ha

$$- \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$$

Poiché

$$\frac{d}{dx} \sqrt{2 - x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

l'ultimo integrale è

$$\int_{-1}^0 \frac{2x}{\sqrt{2 - x^2}} dx = -2 \sqrt{2 - x^2} \Big|_{-1}^0 = -2\sqrt{2} + 2 = -2(\sqrt{2} - 1).$$

Si osservi che, poiché l'argomento della funzione arcoseno è una funzione pari (ma su questo bisogna meditare un pochino, sostituendo x con $-x$ e poi $-x$ con una nuova variabile y), si ha

$$\int_{-1}^0 \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) dx = \int_0^1 \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) dx.$$

4. Per risolvere l'equazione si consideri la funzione

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} - \log(ex).$$

Derivando f ed eguagliando la derivata a zero si ottiene

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 2.$$

Analogamente studiando il segno di f' si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f' \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in [1, 4), \\ = 0 & \text{per } x = 4, \\ > 0 & \text{per } x \in (4, +\infty), \end{cases}$$

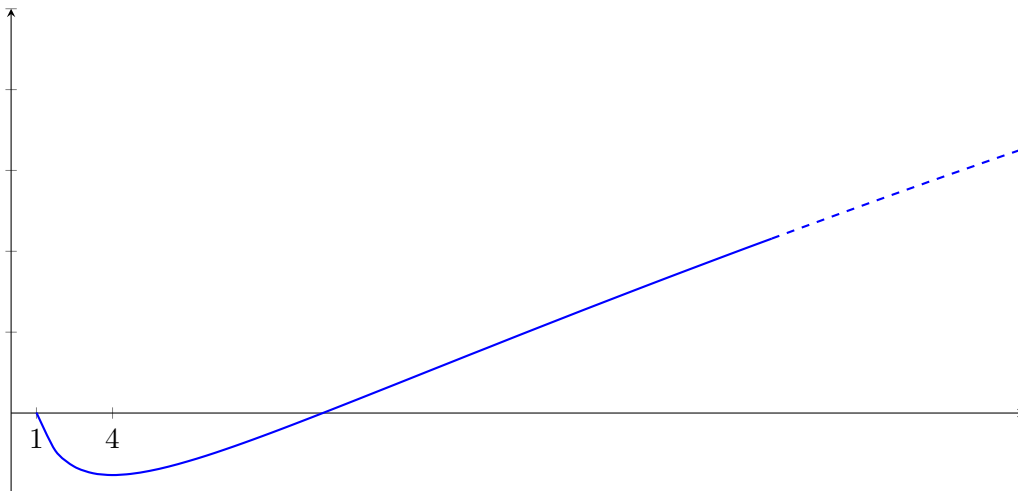
cioè f decresce fino a 4 e poi cresce da 4 in poi.

Si osservi che agli estremi del dominio si ha:

$$f(1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui f si annulla in 1 e in un altro punto, che sarà maggiore di 4, quindi l'equazione avrà due soluzioni nell'insieme $[1, +\infty)$.

Per completezza mostriamo il grafico di f :



e di seguito i grafici di $g(x) = \sqrt{x}$ in rosso, di $h(x) = \log(ex)$ in blu:

